

Информатика и её применения

Том 16 Выпуск 2 Год 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Многомерные бинарные рынки и CC-VaR Г. А. Агасандян	2
Использование критериев стационарности для настройки моделей при прогнозировании временных рядов О. А. Кравцова	11
Управление линейным выходом марковской цепи по квадратичному критерию. Случай полной информации А. В. Босов	19
О монотонности некоторых классов марковских цепей Я. А. Сатин, А. Л. Крюкова, В. С. Ошушкова, А. И. Зейфман	27
О применении топологического подхода к анализу плохо формализуемых задач для построения алгоритмов виртуального скрининга квантово-механических свойств органических молекул II: Сопоставление формализма с конструктами квантовой механики и экспериментальная апробация предложенных алгоритмов И. Ю. Торшин	35
Использование FDR-метода множественной проверки гипотез при обращении линейных однородных операторов С. И. Палионная, О. В. Шестаков	44
Принципы описания показателей логико-семантических отношений и их иерархии А. А. Дурново, О. Ю. Инькова, Н. А. Попкова	52
Средовые модели извлечения из текста новых терминов и индикаторов настроений И. М. Зацман, О. В. Золотарев, А. Х. Хакимова	60
Анализ цепочек причинно-следственных связей А. А. Грушо, Н. А. Грушо, М. И. Забейло, А. А. Зацаринный, Е. Е. Тимонина, С. Я. Шоргин	68
Об аналитической структуре некоторых видов целевых функционалов, связанных с задачами управления полумарковскими случайными процессами П. В. Шнурков	75
Совместная фильтрация и распознавание нормальных процессов в стохастических системах, не разрешенных относительно производных И. Н. Сеницын	85
Метод визуализации снижения интенсивности и разрешения конфликтов в гибридных интеллектуальных многоагентных системах С. Б. Румовская, И. А. Кириков	94
Анализ плотности базовых станций 5G NR для предоставления услуг виртуальной и дополненной реальности В. А. Бесчастный, Д. Ю. Острикова, С. Я. Шоргин, Д. А. Молчанов, Ю. В. Гайдамака	102
Синтез управления двумерным случайным блужданием с эталонным стационарным распределением М. Г. Коновалов, Р. В. Разумчик	109
Об авторах	118
Правила подготовки рукописей	120
Requirements for manuscripts	123

МНОГОМЕРНЫЕ БИНАРНЫЕ РЫНКИ И CC-VaR

Г. А. Агасандян¹

Аннотация: Работа продолжает изучение проблем использования континуального критерия VaR (CC-VaR) на финансовых рынках. Речь идет о некоторых технических проблемах, возникающих на многомерных опционных рынках — рынках, порожденных несколькими стохастически связанными между собой базовыми активами. Рассматривается многомерное расширение бинарных рынков — упрощенного варианта рынков обычных опционов, таких как коллы и путы. В дискретном по инструментарию варианте рынка они также служат простейшим усложнением сценарного рынка. В предположении, что сценарными индикаторами на рынке в полной мере непосредственно не торгуют, предлагается методика получения репликации из бинарных инструментов. Она основывается на теоремах паритета для одномерного бинарного рынка и подробно излагается для двумерного. Приводятся конструкции базисов из бинарных инструментов как однотипных, так и естественных смешанных с некоторым назначенным центром рынка. Теоретические конструкции оптимальных портфелей в этих базисах иллюстрируются на примере конкретного двумерного рынка.

Ключевые слова: базовые активы; многомерный рынок; функция рискованных предпочтений инвестора; континуальный критерий VaR (CC-VaR); стоимостная и прогнозная плотности; сценарные индикаторы; базисы; бинарные опционы; однотипный портфель; центр рынка; смешанный портфель

DOI: 10.14357/19922264220201

1 Введение

Проблемы применения на рынках опционов введенного автором континуального критерия VaR (CC-VaR) рассматриваются в ряде работ [1–5]. Этот критерий служит средством, позволяющим инвестору наиболее адекватно отражать свои рискованные предпочтения. Для его полноценного использования необходимо также, чтобы на рынке были представлены финансовые инструменты в большом разнообразии. На сегодняшний день к таковым можно отнести, пожалуй, лишь рынки опционов с одним базовым активом и подробной линейкой страйков. Для них теоретической моделью служит одномерный δ -рынок [2–4].

Проблема с определением многомерного рынка в контексте применения CC-VaR требует особого подхода. Таких рынков пока нет, а механического объединения нескольких рынков с разными базовыми активами явно недостаточно [6, 7]. Следует вводить опционы на совокупности активов, причем специальным образом. Как оказывается, именно одномерный теоретический δ -рынок со своим специфическим характером без труда обобщается на многомерный случай, а его приближенные версии вполне могут быть реализованы.

В работе решаются проблемы технического характера, которые более свойственны многомерным рынкам, но их зародыши возникают на одномерных. Суть в том, что, например, на (одномерных)

рынках традиционных опционов непосредственно баттерфляями не торгуют, а торгуют коллами и путами, но для применения CC-VaR большее значение имеют именно баттерфляи, что следует учитывать в многомерном случае. В работе проблема решается для бинарного рынка — упрощенной модели рынка обычных опционов.

2 Теоретический ζ -рынок и его свойства

Многомерный δ -рынок — это рынок, в основе которого лежат n (> 1) базовых активов (n — размерность рынка). Как и ранее, рынок рассматривается однопериодным, теоретическим и идеальным [4, 5]. Векторы цен базовых активов в конце периода $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_l \in X_l \subset \mathfrak{A}$, $l \in N = \{1, \dots, n\}$, образуют n -мерное множество $X = \prod_{l \in N} X_l$. Заданы две неотрицательные функции — *прогнозная* и *стоимостная* плотности, соответственно $p(\mathbf{x})$ и $c(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in X$, порождающие меры $P\{\cdot\}$ и $C\{\cdot\}$, первая из которых вероятностная.

Важно отметить, что на введенном n -мерном рынке *не торгуют* инструментами иной размерности. Даже если в описании конкретного инструмента фигурируют лишь k ($< n$) базовых активов, то непременно подразумевается, что в нем присутствуют и остальные базовые активы в форме

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, agasand17@yandex.ru

безрисковых единичных инструментов, хотя они для удобства в записи инструментов могут опускаться. Их называем k -мерными версиями n -мерных инструментов.

Платежная функция инструмента I обозначается $\pi(x; I)$, $|I|$ — его рыночная стоимость, рассчитанная по плотности $c(x)$, а $\|I\|$ — средний с точки зрения инвестора доход, рассчитанный по плотности $p(x)$. Имеют место соотношения:

$$|I| = \int_{\mathbb{X}} \pi(x; I) c(x) dx; \quad \|I\| = \int_{\mathbb{X}} \pi(x; I) p(x) dx.$$

На рынке обращаются δ -инструменты $D(s)$ с (обобщенными) n -мерными δ -функциями относительно s в качестве платежных функций:

$$\pi(x; D(s)) = \delta(x - s); \quad |D(s)| = c(s), \quad s \in \mathbb{X}.$$

Фактически $D(s)$ — это произведение n одномерных δ -инструментов, а его платежная функция — произведение n одномерных δ -функций:

$$\left. \begin{aligned} D(s) &= \prod_{l \in N} D_l(s_l); \\ \pi(x; D(s)) &= \prod_{l \in N} \delta(x_l - s_l). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Рыночный инструмент G с произвольной измеримой платежной функцией $g(x)$ и его стоимость представляются соответственно в виде:

$$\begin{aligned} G &= \int_{\mathbb{X}} g(s) D(s) ds; \\ |G| &= \int_{\mathbb{X}} g(s) |D(s)| ds = \int_{\mathbb{X}} g(s) c(s) ds. \end{aligned}$$

Так, рассматриваются инструменты $H\{M\}$, $M \subset \mathbb{X}$, называемые *индикаторами* (множеств M), и, в частности, $U = H\{s \in \mathbb{X}\}$, при этом

$$\left. \begin{aligned} H\{M\} &= \int_M D(s) ds; \\ |H\{M\}| &= \int_M c(s) ds; \\ |U| = C\{\mathbb{X}\} &= \int_{\mathbb{X}} c(s) ds = \frac{1}{r}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где r имеет смысл безрискового дохода за период. Без ущерба для общности принимается $r \equiv 1$. В таком случае функция $c(x)$ приобретает свойства плотности вероятности и ее можно интерпретировать как порождаемую рынком *стоимостную* плотность. В противовес ей плотность вероятности $p(x)$ можно считать *справедливой* с точки зрения инвестора ценой δ -инструмента.

Частным случаем (2) являются играющие в дальнейшем изложении важную роль многомерные бинарные опционы, которые вводятся по некоторой аналогии с традиционными опционами колл и пут.

На *одномерном* рынке *бинарным коллом* U_s^+ и *бинарным путем* U_s^- со страйком s называются инструменты с платежными функциями соответственно

$$\pi(x; U_s^+) = \chi_{x \geq s}(x); \quad \pi(x; U_s^-) = \chi_{x < s}(x), \quad x, s \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}, \quad (3)$$

где $\chi_M(x)$, $M \subset \mathbb{X}$, — характеристическая функция (индикатор) множества M . Справедливы очевидные соотношения, которые можно рассматривать как теоремы паритета одномерного рынка:

$$\left. \begin{aligned} U_s^+ + U_s^- &= U; \\ H\{M\} &= U_a^+ - U_b^+ = U_b^- - U_a^-, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $M = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{X}$.

Многомерным обобщением одномерных бинарных опционов U_s^+ и U_s^- служат n -мерные инструменты $Z_{\alpha; s}$ векторного типа α и с векторным страйком $s \in \mathbb{R}^n$, называемые ζ -опционами и задаваемые по аналогии с (1) соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} Z_{\alpha; s} &= \prod_{i \in N} O_{i\beta_i; s_i}; \\ \pi(x; Z_{\alpha; s}) &= \prod_{i \in N} \pi(x_i; O_{i\beta_i; s_i}), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Здесь вводятся новые обозначения, которые частично дублируют прежние, но более удобны для целей алгоритмической автоматизации дальнейших построений. Так, для компонентных инструментов

$$O_{0; s} \equiv U_s^-; \quad O_{1; s} \equiv U_s^+. \quad (6)$$

Вектор α , $\alpha_l = \pm 1$ (или просто \pm , как для бинарных коллов и путов в индексах инструментов), $l \in N$, определяет векторный тип ζ -опционов Z , $s \in \mathbb{R}^n$ — векторный страйк. Вектор $\beta = (\alpha + 1)/2$, дублирующий α , вводится по техническим причинам и принимает два значения:

$$\beta_l = \begin{cases} 0 & \text{для пута;} \\ 1 & \text{для колла.} \end{cases}$$

По необходимости в (6) подобно (5) в индексы может добавляться параметр $l \in N$.

Очевидно, для каждого векторного страйка на n -мерном рынке могут котироваться 2^n типов ζ -опционов. Рынок n -мерных ζ -опционов с их k -мерными версиями, $k < n$, называется n -мерным ζ -рынком.

3 Двумерный дискретный рынок

Рассматривается сценарная дискретизация двумерного теоретического δ -рынка. Все конструкции, введенные для многомерного случая, здесь сохраняют свою силу, но для удобства используется в большей мере адаптированная к двумерному случаю легко воспринимаемая система обозначений.

Цены двух базовых активов теоретического двумерного δ -рынка обозначаются x и y , страйки опционов — соответственно s и t , где $x, s \in X = [a_1, b_1) \subset \mathfrak{R}$; $y, t \in Y = [a_2, b_2) \subset \mathfrak{R}$. Сценарный рынок строится равномерным разбиением множества X на v_1 интервалов (сценариев), а Y — на v_2 интервалов. Одномерные сценарии на X и Y даются формулами:

$$S_i = [s_{i-1}, s_i), s_i = a_1 + ih_1, h_1 = \frac{b_1 - a_1}{v_1},$$

$$i \in I, s_0 = a_1;$$

$$T_j = [t_{j-1}, t_j), t_j = a_2 + jh_2, h_2 = \frac{b_2 - a_2}{v_2},$$

$$j \in J, t_0 = a_2.$$

Здесь $I = \{1, \dots, v_1\}$, $J = \{1, \dots, v_2\}$, а номер сценария совпадает с индексом его правой границы. Двумерными сценариями будут прямые произведения всех пар $S_i \times T_j$, $i \in I, j \in J$, образующие равные между собой прямоугольники.

На сценарном рынке базис образуют инструментальные индикаторы сценариев

$$D_{ij} \equiv H [S_i \times T_j],$$

а произвольный портфель с вектором весов g этих инструментов для двумерного случая приобретает вид:

$$G = \sum_{i \in I, j \in J} g_{ij} D_{ij}. \quad (7)$$

Двумерным обобщением бинарных опционов служат инструменты, определяемые векторными страйками (s_i, t_j) , или просто (i, j) , а именно:

$$Z_{\beta_1 \beta_2; i j} = O_{\beta_1; 1, i} O_{\beta_2; 2, j} = O_{\beta_1; i} \cdot O_{\beta_2; j},$$

$$i \in I, j \in J.$$

Дискретный двумерный ζ -рынок образуют инструменты $Z_{ij}, i \in I, j \in J$, с возможной фиксацией типа (в терминах α или β). На нем торгуются и их одномерные версии Z_i и Z_j с маркером «точка» для координаты безрискового актива.

Далее предполагается, что на рынке сценарными индикаторами непосредственно не торгуют, и потому для использования представления (7) приходится реплицировать их из ζ -опционов. Ситуация заимствована с рынков обычных опционов, где

торгуют, как правило, коллами и путами, но не баттерфляями.

Для одномерных компонент рынка с v сценариями справедливы формулы:

$$D_i = \begin{cases} U - U_1^+ = U_1^-, & i = 1; \\ U_{i-1}^+ - U_i^+ = U_i^- - U_{i-1}^- = \\ = U - U_{i-1}^- - U_i^+, & 1 < i < v; \\ U_{v-1}^+ = U - U_{v-1}^-, & i = v. \end{cases} \quad (8)$$

Эти соотношения вытекают из теорем паритета для одномерных бинарных опционов (4). Согласно этим соотношениям для внутренних страйков возможны три варианта репликации — два однотипных и один *естественный* смешанный. В соответствии с (5) для построения репликации необходимо перемножить одномерные представления индикаторов сценариев.

Базис ζ -рынка может быть однотипным (из путов или коллов) и смешанным (одновременно из тех и других). Притом что однотипных базисов всего два, число возможных смешанных базисов даже при больших масштабах рынка весьма значительно. Но именно смешанные базисы представляют интерес, поскольку, как правило, не вся линейка (по страйкам) опционов котируется на рынке. Во всяком случае, на традиционных одномерных рынках опционы со страйками, значимо ниже текущей цены базового актива для колла и значимо выше — для пута, весьма слабо представлены на рынках.

В связи с этим построение многомерного смешанного базиса и смешанного портфеля проводится по упрощенной схеме в предположении наличия так называемого центра рынка (центрального страйка). На реальном рынке центр, как правило, не единствен и располагается вблизи вектора текущих цен базовых активов. В теоретической схеме сценарные индикаторы будут строиться из бинарных путов со страйками ниже центра и из бинарных коллов — выше центра. Такие представления портфелей называем *естественными*.

Согласно (8), для каждого внутреннего, потенциально центрального, страйка с номером m принципиально возможны две качественно различающиеся естественная смешанная и однотипная комбинации бинарных инструментов, реплицирующие индикатор сценария ($1 < m < v$):

$$\left. \begin{aligned} (a) D_m &= U - U_{m-1}^- - U_m^+; \\ (b) D_m &= U_m^- - U_{m-1}^-. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Комбинация $U_{m-1}^+ - U_m^+$, также представленная в (8), неприемлема, поскольку в ней страйк первого колла находится ниже центра.

Для репликации базиса с комбинацией (а) необходимо присутствие на рынке всех бинарных путей U_i^- для $i < m$ и всех бинарных коллов U_i^+ для $i \geq m$. Случай (б) отличается от (а) лишь тем, что на рынке дополнительно присутствует опцион U_{m-1}^+ , т. е. котируются оба опциона: U_{m-1}^- и U_{m-1}^+ .

Для большей универсализации алгоритма оптимизации в работе используется более сложное смешанное представление (а) в (9).

Построение возможных двумерных сценарных базисов из ζ -опционов, как и вообще многомерных, проводится на основе правил построения для одномерного рынка. Для него с учетом (8), (9) возможны три варианта репликации сценарных базисов — два однотипных (один из бинарных путей, другой из бинарных коллов) и третий смешанный (из тех и других с центром в страйке m).

Базис в бинарных путях (тип $\alpha = -1$, или $\beta = 0$) для v сценариев имеет вид:

$$D_1 = O_{0;1}; D_i = -O_{0;i-1} + O_{0;i}, 0 < i < v; D_v = U - O_{0;v-1}; \quad (10)$$

в бинарных коллах ($\alpha = +1$, или $\beta = 1$):

$$D_1 = U - O_{1;1}; D_i = O_{1;i-1} - O_{1;i}, 0 < i < v; D_v = O_{1;v-1}; \quad (11)$$

смешанный:

$$D_1 = O_{0;1}; D_i = -O_{0;i-1} + O_{0;i}, 0 < i < m; D_m = U - O_{0;m-1} - O_{1;i}; D_i = O_{1;i-1} - O_{1;i}, m < i < v; D_v = O_{1;v-1}. \quad (12)$$

Поскольку каждый двумерный сценарный индикатор есть произведение двух одномерных (согласно перемножению платежных функций), его представление в терминах двумерных ζ -опционов получается перемножением пары подходящих базисных инструментов из (10)–(12).

4 Формирование базисов двумерного ζ -рынка

Введенные в многомерном случае произвольной размерности конструкции здесь переписываются для двумерного ζ -рынка. При построении базисов и портфелей рассматриваются два варианта — однотипный и смешанный.

Однотипная репликация сценарных индикаторов проводится в терминах ζ -опционов единого типа α (и $\beta = \{\beta_1, \beta_2\}$), фиксируемого заранее, и потому применяются более простые варианты (10) и (11) без обозначения типа.

Каждое перемножение таких одномерных представлений приводит к сумме парных произведений одномерных опционов, которые затем замещаются

эквивалентными по платежным функциям двумерными ζ -опционами по правилам

$$O_{1,i}O_{2,j} \rightarrow Z_{ij}; O_{1,i}U_2 \rightarrow Z_i; U_1O_{2,j} \rightarrow Z_j. \quad (13)$$

После решения задачи оптимизации [2, 5] дискретным алгоритмом, основанным на процедуре Неймана–Пирсона [8], и нахождения вектора весов оптимального портфеля базисных ζ -опционов находится его платежная функция. Для этого используются соотношения (3) с учетом переопределений (6), и потому сам поиск проводится по правилам:

$$\left. \begin{aligned} Z_{\beta_1;i} &\rightarrow v_{\beta_1;i}(x)v_{\beta_2;j}(y), Z_i \rightarrow v_{\beta_1;i}(x), \\ Z_j &\rightarrow v_{\beta_2;j}(y), U \rightarrow 1; \\ v_{\beta_1;i}(x) &= \{ \chi_{x-s_i < 0}(x), \beta_i = 0; \chi_{x-s_i \geq 0}(x), \beta_i = 1 \}, \\ & i \in I; \\ v_{\beta_2;j}(y) &= \{ \chi_{y-t_j < 0}(y), \beta_j = 0; \chi_{y-t_j \geq 0}(y), \beta_j = 1 \}, \\ & j \in J. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

При *смешанной* репликации каждое слагаемое также является произведением одномерных опционов и замещается двумерным опционом. При этом указание типа в индексах существенно и применяются правила трансформации

$$O_{\beta_1;i}O_{\beta_2;j} \rightarrow Z_{\beta_1\beta_2;ij}; O_{\beta_1;i} \rightarrow Z_{\beta_1;i}; O_{\beta_2;j} \rightarrow Z_{\beta_2;j}; 1 \rightarrow U. \quad (15)$$

Аналогично переписываются правила формирования платежных функций для отдельных опционов и портфеля в целом (с учетом (14)):

$$U \rightarrow 1; Z_{\beta_1\beta_2;ij} \rightarrow v_{\beta_1;i}(x)v_{\beta_2;j}(y); Z_{\beta_1;i} \rightarrow v_{\beta_1;i}(x); Z_{\beta_2;j} \rightarrow v_{\beta_2;j}(y). \quad (16)$$

На двумерном ζ -рынке в соответствии с числом возможных векторов α насчитываются четыре варианта однотипных базисов и один смешанный (естественный с заданным центром рынка).

Для каждого варианта с *однотипным* базисом и оптимальным портфелем фиксируется тип α , и он приписывается всем ζ -опционам варианта. В двумерном случае таких вариантов четыре: $\{-1, -1\}$, $\{-1, +1\}$, $\{+1, -1\}$, $\{+1, +1\}$. Последовательным применением правил (13) ко всем страйкам для каждого значения векторного параметра α найдутся искомые четыре базиса. Поскольку в однотипном случае для каждой компоненты рынка качественно различаются три варианта реплика-

ции — один общий для всех внутренних страйков и еще два для крайних, то для двумерного случая вариантов $3^2 = 9$. Во всех четырех выписываемых ниже списках принимается $0 < i < v_1$ и $0 < j < v_2$.

Однотипные базисы:

$$- \text{с } \alpha = \{-1, -1\}$$

$$D_{1,1} = Z_{1,1};$$

$$D_{1,j} = -Z_{1,j-1} + Z_{1,j};$$

$$D_{1,v_2} = Z_{1,\cdot} - Z_{1,v_2-1};$$

$$D_{i,1} = -Z_{i-1,1} + Z_{i,1};$$

$$D_{i,j} = Z_{i-1,j-1} - Z_{i-1,j} - Z_{i,j-1} + Z_{i,j};$$

$$D_{i,v_2} = -Z_{i-1,\cdot} + Z_{i-1,v_2-1} + Z_{i,\cdot} - Z_{i,v_2-1};$$

$$D_{v_1,1} = Z_{\cdot,1} - Z_{v_1-1,1};$$

$$D_{v_1,j} = -Z_{\cdot,j-1} + Z_{\cdot,j} + Z_{v_1-1,j-1} - Z_{v_1-1,j};$$

$$D_{v_1,v_2} = U - Z_{\cdot,v_2-1} - Z_{v_1-1,\cdot} + Z_{v_1-1,v_2-1};$$

$$- \text{с } \alpha = \{-1, +1\}$$

$$D_{1,1} = -Z_{1,1} + Z_{1,\cdot};$$

$$D_{1,j} = Z_{1,j-1} - Z_{1,j};$$

$$D_{1,v_2} = Z_{1,v_2-1};$$

$$D_{i,1} = Z_{i-1,1} - Z_{i-1,\cdot} - Z_{i,1} + Z_{i,\cdot};$$

$$D_{i,j} = -Z_{i-1,j-1} + Z_{i-1,j} + Z_{i,j-1} - Z_{i,j};$$

$$D_{i,v_2} = -Z_{i-1,v_2-1} + Z_{i,v_2-1};$$

$$D_{v_1,1} = U - Z_{\cdot,1} + Z_{v_1-1,1} - Z_{v_1-1,\cdot};$$

$$D_{v_1,j} = Z_{\cdot,j-1} - Z_{\cdot,j} - Z_{v_1-1,j-1} + Z_{v_1-1,j};$$

$$D_{v_1,v_2} = Z_{\cdot,v_2-1} - Z_{v_1-1,v_2-1};$$

$$- \text{с } \alpha = \{+1, -1\}$$

$$D_{1,1} = -Z_{1,1} + Z_{\cdot,1};$$

$$D_{1,j} = Z_{1,j-1} - Z_{1,j} - Z_{\cdot,j-1} + Z_{\cdot,j};$$

$$D_{1,v_2} = U - Z_{1,\cdot} + Z_{1,v_2-1} - Z_{\cdot,v_2-1};$$

$$D_{i,1} = Z_{i-1,1} - Z_{i,1};$$

$$D_{i,j} = -Z_{i-1,j-1} + Z_{i-1,j} + Z_{i,j-1} - Z_{i,j};$$

$$D_{i,v_2} = Z_{i-1,\cdot} - Z_{i-1,v_2-1} - Z_{i,\cdot} + Z_{i,v_2-1};$$

$$D_{v_1,1} = Z_{v_1-1,1};$$

$$D_{v_1,j} = -Z_{v_1-1,j-1} + Z_{v_1-1,j};$$

$$D_{v_1,v_2} = Z_{v_1-1,\cdot} - Z_{v_1-1,v_2-1};$$

$$- \text{с } \alpha = \{+1, +1\}$$

$$D_{1,1} = U + Z_{1,1} - Z_{1,\cdot} - Z_{\cdot,1};$$

$$D_{1,j} = -Z_{1,j-1} + Z_{1,j} + Z_{\cdot,j-1} - Z_{\cdot,j};$$

$$D_{1,v_2} = -Z_{1,v_2-1} + Z_{\cdot,v_2-1};$$

$$D_{i,1} = -Z_{i-1,1} + Z_{i-1,\cdot} + Z_{i,1} - Z_{i,\cdot};$$

$$D_{i,j} = Z_{i-1,j-1} - Z_{i-1,j} - Z_{i,j-1} + Z_{i,j};$$

$$D_{i,v_2} = Z_{i-1,v_2-1} - Z_{i,v_2-1};$$

$$D_{v_1,1} = -Z_{v_1-1,1} + Z_{v_1-1,\cdot};$$

$$D_{v_1,j} = Z_{v_1-1,j-1} - Z_{v_1-1,j};$$

$$D_{v_1,v_2} = Z_{v_1-1,v_2-1}.$$

Напомним, что маркер «точка» в индексах инструментов указывает на координату безрискового актива, а под $Z_{i,\cdot}$ и $Z_{\cdot,j}$ понимаются двумерные инструменты $Z_i \times U_2$ и $U_1 \times Z_j$ соответственно.

Смешанный базис состоит из $5^2 = 25$ качественно различных вариантов представлений базисных инструментов, поскольку для каждой компоненты рынка вариантов страйков пять: два крайних, один центральный и два внутренних, ниже и выше центра. Их перечень получается применением правил (15), центральные страйки обозначаются i_c и j_c , а тип опционов дается в терминах β :

$$D_{1,1} = Z_{00;1,1};$$

$$D_{1,j} = -Z_{00;1,j-1} + Z_{00;1,j}, \quad 0 < j < j_c;$$

$$D_{1,j_c} = Z_{0;1,\cdot} - Z_{00;1,j_c-1} - Z_{01;1,j_c};$$

$$D_{1,j} = Z_{01;1,j-1} - Z_{01;1,j}, \quad j_c < j < v_2;$$

$$D_{1,v_2} = Z_{01;1,v_2-1};$$

$$D_{i,1} = -Z_{00;i-1,1} + Z_{00;i,1}, \quad 0 < i < i_c;$$

$$D_{i,j} = Z_{00;i-1,j-1} - Z_{00;i-1,j} - Z_{00;i,j-1} + Z_{00;i,j}, \quad 0 < i < i_c, \quad 0 < j < j_c;$$

$$D_{i,j_c} = -Z_{0;i-1,\cdot} + Z_{0;i,\cdot} + Z_{00;i-1,j_c-1} - Z_{00;i,j_c-1} + Z_{01;i-1,j_c} - Z_{01;i,j_c}, \quad 0 < i < i_c;$$

$$D_{i,j} = -Z_{01;i-1,j-1} + Z_{01;i-1,j} + Z_{01;i,j-1} - Z_{01;i,j}, \quad 0 < i < i_c, \quad j_c < j < v_2;$$

$$D_{i,v_2} = -Z_{01;i-1,v_2-1} + Z_{01;i,v_2-1}, \quad 0 < i < i_c;$$

$$D_{i_c,1} = Z_{0;\cdot,1} - Z_{00;i_c-1,1} - Z_{10;i_c,1};$$

$$D_{i_c,j} = -Z_{0;\cdot,j-1} + Z_{0;\cdot,j} + Z_{00;i_c-1,j-1} - Z_{00;i_c-1,j} + Z_{10;i_c,j-1} - Z_{10;i_c,j}, \quad 0 < j < j_c;$$

$$D_{i_c,j_c} = U - Z_{0;i_c-1,\cdot} - Z_{0;\cdot,j_c-1} - Z_{1;i_c,\cdot} - Z_{1;\cdot,j_c} + Z_{00;i_c-1,j_c-1} + Z_{01;i_c-1,j_c} + Z_{10;i_c,j_c-1} + Z_{11;i_c,j_c};$$

$$D_{i_c,j} = Z_{1;\cdot,j-1} - Z_{1;\cdot,j} - Z_{01;i_c-1,j-1} + Z_{01;i_c-1,j} - Z_{11;i_c,j-1} + Z_{11;i_c,j}, \quad j_c < j < v_2;$$

$$D_{i_c,v_2} = Z_{1;\cdot,v_2-1} - Z_{01;i_c-1,v_2-1} - Z_{11;i_c,v_2-1};$$

$$D_{i,1} = Z_{10;i-1,1} - Z_{10;i,1}, \quad i_c < i < v_1;$$

$$D_{i,j} = -Z_{10;i-1,j-1} + Z_{10;i-1,j} + Z_{10;i,j-1} - Z_{10;i,j}, \quad i_c < i < v_1, \quad 0 < j < j_c;$$

$$D_{i,j_c} = Z_{1;i-1,\cdot} - Z_{1;i,\cdot} - Z_{10;i-1,j_c-1} + Z_{10;i,j_c-1} - Z_{11;i-1,j_c} + Z_{11;i,j_c}, \quad i_c < i < v_1;$$

$$D_{i,j} = Z_{11;i-1,j-1} - Z_{11;i-1,j} - Z_{11;i,j-1} + Z_{11;i,j}, \quad i_c < i < v_1, \quad j_c < j < v_2;$$

$$D_{i,v_2} = Z_{11;i-1,v_2-1} - Z_{11;i,v_2-1}, \quad i_c < i < v_1;$$

$$D_{v_1,1} = Z_{10;v_1-1,1};$$

$$D_{v_1,j} = -Z_{10;v_1-1,j-1} + Z_{10;v_1-1,j}, \quad 0 < j < j_c;$$

$$\begin{aligned} D_{v_1, j_c} &= Z_{1;v_1-1, \cdot} - Z_{10;v_1-1, j_c-1} - Z_{11;v_1-1, j_c}; \\ D_{v_1, j} &= Z_{11;v_1-1, j-1} - Z_{11;v_1-1, j}, \quad j_c < j < v_2; \\ D_{v_1, v_2} &= Z_{11;v_1-1, v_2-1}. \end{aligned}$$

В этом списке присутствуют обозначения инструментов Z с четырьмя и тремя индексами. В первой группе пара индексов до точки с запятой означает тип двумерного ζ -опциона (15), а после нее — его страйк. Во второй группе даются одномерные версии двумерных ζ -опционов. Индекс до точки с запятой означает тип опциона, индекс после нее — его страйк.

Тем самым получены пять вариантов репликаций сценарного базиса, выражающих все сценарные индикаторы в терминах ζ -опционов, котирующихся на ζ -рынке. По ним можно находить и цены базисных индикаторов и оптимального портфеля в целом.

Для проверки правильности расчетов использовались несколько тестов. Один аналитически вычисляет сумму базисных инструментов: она должна быть равной двумерному единичному безрисковому активу. Другой выборочно проверяет равенство для каждой пары цен (x, y) портфельных доходов по всем пяти вариантам репликаций между собой. Наконец, то же совпадение устанавливается по графикам доходов просто визуально.

5 Иллюстративный пример

Для построения мер $C\{\cdot\}$ и $P\{\cdot\}$ в примере предлагается удобное средство аналитического задания двумерных функций распределения на основе одномерных $F_X(x)$ и $F_Y(y)$:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \\ &= F_X(x)F_Y(y) (1 + 3r(1 - F_X(x))(1 - F_Y(y))), \quad (17) \end{aligned}$$

где параметр r отвечает за корреляционную связь компонент. В качестве одномерных стоимостных $F_{CX}(x)$, $F_{CY}(y)$ и прогнозных $F_{PX}(x)$, $F_{PY}(y)$ функций распределения задаются бета-распределения с небольшими полуцелыми значениями параметров на множествах $X = [0, 1]$, $Y = [0, 1]$.

Так, для $F_{CX}(x)$ и $F_{CY}(y)$ выбираются параметры $(3/2, 2)$ и $(3/2, 3)$ соответственно, для $F_{PX}(x)$ и $F_{PY}(y)$ — $(2, 3)$ и $(2, 4)$:

$$\begin{aligned} F_{CX}(x) &= \frac{x^{3/2}(5 - 3x)}{2}; \\ F_{CY}(y) &= \frac{y^{3/2}(35 - 42y + 15y^2)}{8}; \\ F_{PX}(x) &= x^2(6 - 8x + 3x^2), \\ F_{PY}(y) &= y^2(10 - 20y + 15y^2 - 4y^3). \end{aligned}$$

Подобное сочетание функций настраивает инвестора на так называемую «продажу волатильности». Принимается еще $r_c = 0$ и $r_p = 0,2$, и тогда искомые двумерные функции распределения $F_C(x, y)$ и $F_P(x, y)$ определяются по формуле (17), а дифференцированием можно находить и плотности. Однако их записи ввиду громоздкости здесь опускаются. Более того, вероятности сценариев вычисляются непосредственно из функций распределения: вероятность паре цен базовых активов оказаться в прямоугольнике $(x_{i-1}, x_i] \times (y_{j-1}, y_j]$ равна второй разности (дискретному аналогу смешанной производной)

$$\begin{aligned} F(x_i, y_j) - F(x_{i-1}, y_j) - F(x_i, y_{j-1}) + \\ + F(x_{i-1}, y_{j-1}). \quad (18) \end{aligned}$$

Двумерная дискретизация множества $X \times Y$ в примере проводится при $v_1 = 6$ и $v_2 = 5$, центральным выбирается страйк $i_c = 3, j_c = 3$. Согласно (18) находятся матрицы стоимостей индикаторов сценариев и их средних доходов (и эквивалентные им записи в форме векторов).

В примере в качестве функции рискованных предпочтений инвестора выбирается функция (повышенного риска) $\phi(\varepsilon) = \varepsilon^2, \varepsilon \in [0, 1]$. На основании такой информации дискретный алгоритм оптимизации [3, 5] дает лексикографически упорядоченный вектор весов матрицы индикаторов сценарного базиса

$$\begin{aligned} g = \{0,118; 0,159; 0,00445; 0,0000989; 0,000008; \\ 0,414; 1,0; 0,228; 0,0151; 0,0000189; 0,0581; 0,788; \\ 0,602; 0,0873; 0,00175; 0,0113; 0,309; 0,495; 0,176; \\ 0,00191; 0,000989; 0,0254; 0,0739; 0,0291; 0,00118; \\ 0,0000058; 0,000261; 0,00159; 0,00112; 0,000009\}. \end{aligned}$$

Он порождает оптимальный сценарный портфель (7) с инвестиционной суммой, средним доходом и средней доходностью соответственно:

$$A = 0,291162; \quad R = 0,376015; \quad y = 0,291428.$$

График его платежной функции дается на рис. 1. Для сравнения на рис. 2 изображен график платежной функции оптимального портфеля на том же δ -рынке (при тех же стоимостной и прогнозной плотностях), но при дискретизации 40×40 , результаты для которой уже весьма близки к теоретическим для непрерывной модели δ -рынка.

Очевидно различие двух графиков вследствие значительного различия в уровнях дискретизации модели сценарного рынка. Тем не менее в функции на рис. 2 без труда угадывается сглаженная версия функции на рис. 1.

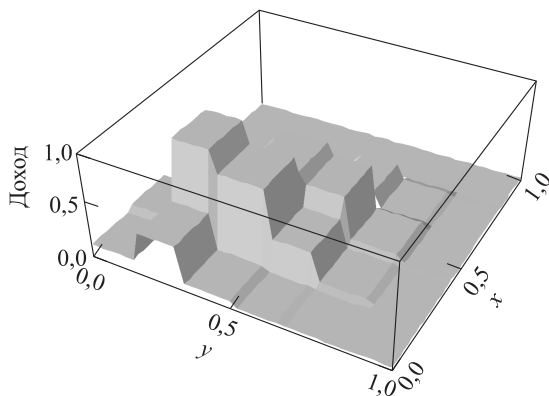


Рис. 1 Доходы оптимального сценарного портфеля при дискретизации 6×5

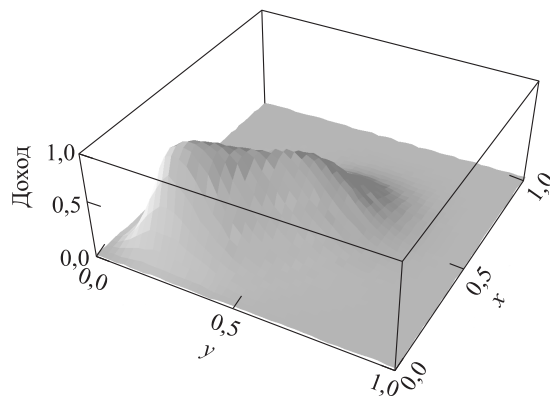


Рис. 2 Доходы оптимального сценарного портфеля при дискретизации 40×40

Однако цель этим еще не достигается, поскольку требуется определить оптимальные портфели не в сценарных индикаторах, а в ζ -опционах рассматриваемых типов. Для нахождения таких представлений в формулу (7) следует для каждой пары (i, j) подставлять вместо индикатора D_{ij} соответствующее ему представление в ζ -опционах с последующим упрощением получаемой суммы.

В результате получаются четыре однотипных портфеля и один смешанный.

Оптимальные однотипные портфели:

– для $\alpha = \{-1, -1\}$

$$G = 0,000009U + 0,546Z_{1,1} - 0,618Z_{1,2} - 0,209Z_{1,3} - 0,015Z_{1,4} - 0,0000109Z_{1,\cdot} + 0,143Z_{2,1} + 0,586Z_{2,2} - 0,302Z_{2,3} - 0,0705Z_{2,4} - 0,00173Z_{2,\cdot} - 0,432Z_{3,1} + 0,371Z_{3,2} + 0,196Z_{3,3} - 0,0886Z_{3,4} - 0,000155Z_{3,\cdot} - 0,274Z_{4,1} - 0,137Z_{4,2} + 0,274Z_{4,3} + 0,146Z_{4,4} + 0,000721Z_{4,\cdot} - 0,0241Z_{5,1} - 0,0472Z_{5,2} + 0,0444Z_{5,3} + 0,0268Z_{5,4} + 0,00118Z_{5,\cdot} - 0,000255Z_{\cdot,1} - 0,00133Z_{\cdot,2} + 0,000469Z_{\cdot,3} + 0,00111Z_{\cdot,4};$$

– для $\alpha = \{-1, +1\}$

$$G = 0,0000058U - 0,546Z_{1,1} + 0,618Z_{1,2} + 0,209Z_{1,3} + 0,015Z_{1,4} - 0,296Z_{1,\cdot} - 0,143Z_{2,1} - 0,586Z_{2,2} + 0,302Z_{2,3} + 0,0705Z_{2,4} + 0,356Z_{2,\cdot} + 0,432Z_{3,1} - 0,371Z_{3,2} - 0,196Z_{3,3} + 0,0886Z_{3,4} + 0,0468Z_{3,\cdot} + 0,274Z_{4,1} + 0,137Z_{4,2} - 0,274Z_{4,3} - 0,146Z_{4,4} + 0,0103Z_{4,\cdot} + 0,0241Z_{5,1} + 0,0472Z_{5,2} - 0,0444Z_{5,3} - 0,0268Z_{5,4} + 0,000984Z_{5,\cdot} + 0,000255Z_{\cdot,1} + 0,00133Z_{\cdot,2} - 0,000469Z_{\cdot,3} - 0,00111Z_{\cdot,4};$$

– для $\alpha = \{+1, -1\}$

$$G = 0,000008U - 0,546Z_{1,1} + 0,618Z_{1,2} + 0,209Z_{1,3} + 0,015Z_{1,4} + 0,0000109Z_{1,\cdot} - 0,143Z_{2,1} - 0,586Z_{2,2} + 0,302Z_{2,3} + 0,0705Z_{2,4} + 0,00173Z_{2,\cdot} + 0,432Z_{3,1} - 0,371Z_{3,2} - 0,196Z_{3,3} + 0,0886Z_{3,4} + 0,000155Z_{3,\cdot} + 0,274Z_{4,1} + 0,137Z_{4,2} - 0,274Z_{4,3} - 0,146Z_{4,4} - 0,000721Z_{4,\cdot} + 0,0241Z_{5,1} + 0,0472Z_{5,2} - 0,0444Z_{5,3} - 0,0268Z_{5,4} - 0,00118Z_{5,\cdot} - 0,0407Z_{\cdot,1} + 0,154Z_{\cdot,2} + 0,00436Z_{\cdot,3} + 0,0000909Z_{\cdot,4};$$

– для $\alpha = \{+1, +1\}$

$$G = 0,118U + 0,546Z_{1,1} - 0,618Z_{1,2} - 0,209Z_{1,3} - 0,015Z_{1,4} + 0,296Z_{1,\cdot} + 0,143Z_{2,1} + 0,586Z_{2,2} - 0,302Z_{2,3} - 0,0705Z_{2,4} - 0,356Z_{2,\cdot} - 0,432Z_{3,1} + 0,371Z_{3,2} + 0,196Z_{3,3} - 0,0886Z_{3,4} - 0,0468Z_{3,\cdot} - 0,274Z_{4,1} - 0,137Z_{4,2} + 0,274Z_{4,3} + 0,146Z_{4,4} - 0,0103Z_{4,\cdot} - 0,0241Z_{5,1} - 0,0472Z_{5,2} + 0,0444Z_{5,3} + 0,0268Z_{5,4} - 0,000984Z_{5,\cdot} + 0,0407Z_{\cdot,1} - 0,154Z_{\cdot,2} - 0,00436Z_{\cdot,3} - 0,0000909Z_{\cdot,4};$$

В этом перечне первый из четырех портфелей образован бинарными путами для каждого актива, второй — бинарными путами для первого актива и бинарными коллами — для второго, третий — бинарными коллами для первого актива и бинарными путами — для второго, четвертый — бинарными коллами для каждого актива. Индексы показывают номера страйков.

Платежные функции всех однотипных портфелей получаются по правилам (14). Проведенные расчеты лишь подтверждают верность алгоритма, поскольку все они, несмотря на внешнее различие их записей, имеют на идеальном рынке единую платежную функцию с тем же графиком на рис. 1.

Оптимальный смешанный портфель строится вновь по формуле (7), но в смешанном базисе естественного происхождения с выделенным центральным страйком (3, 3). Центр рынка образует свои четыре квадранта, в каждом из которых в портфеле используются однотипные двумерные ζ -опционы. В первом квадранте для каждого актива используются бинарные коллы, во втором — бинарные путы для первого актива и бинарные коллы — для второго, в третьем — бинарные путы для каждого актива, в четвертом — бинарные коллы для первого актива и бинарные путы — для второго.

Вычисления с применением (7) дают оптимальный смешанный портфель

$$\begin{aligned}
 G = & 0,602U - 0,224Z_{0;1} - 0,374Z_{0;2} - 0,73Z_{0;1} + \\
 & + 0,186Z_{0;2} - 0,107Z_{1;3} - 0,421Z_{1;4} - 0,0723Z_{1;5} - \\
 & - 0,515Z_{1;3} - 0,0856Z_{1;4} + 0,546Z_{00;1,1} - \\
 & - 0,618Z_{00;1,2} + 0,143Z_{00;2,1} + 0,586Z_{00;2,2} + \\
 & + 0,209Z_{01;1,3} + 0,015Z_{01;1,4} + 0,302Z_{01;2,3} + \\
 & + 0,0705Z_{01;2,4} + 0,432Z_{10;3,1} - 0,371Z_{10;3,2} + \\
 & + 0,274Z_{10;4,1} + 0,137Z_{10;4,2} + 0,0241Z_{10;5,1} + \\
 & + 0,0472Z_{10;5,2} + 0,196Z_{11;3,3} - 0,0886Z_{11;3,4} + \\
 & + 0,274Z_{11;4,3} + 0,146Z_{11;4,4} + 0,0444Z_{11;5,3} + \\
 & + 0,0268Z_{11;5,4}.
 \end{aligned}$$

Здесь первые девять инструментов вида $Z_{\beta;i}$, или $Z_{\beta;:,j}$ отвечают одномерным версиям ζ -опционов и снабжены двумя индексами и маркером «точка». Индекс $\beta = 0$ означает пут, $\beta = 1$ — колл, индексы i и j показывают номера страйков. Остальные восемнадцать инструментов — двумерные ζ -опционы с двумя индексами до точки с запятой, показывающими их тип, и двумя индексами после нее с номерами страйков.

Платежная функция смешанного портфеля строится по правилам (16). Ее описывает все тот же график на рис. 1.

6 Заключение

В работе решена задача алгоритмического нахождения представлений индикаторов многомерного сценарного базиса в терминах ζ -опционов — многомерного обобщения бинарных опционов. На конкретном примере двумерного рынка продемон-

стрирована работа этого алгоритма и ее результат. Подобные расчеты могут быть реализованы без принципиальных трудностей и для рынков большей размерности. Имеет смысл решить такую же задачу для более сложных рынков α -опционов — многомерного обобщения обычных коллов и путов.

Тем не менее «проклятие размерности» не отменяется. Вычислительная сложность задачи быстро возрастает с ростом размерности и степени сценарной детализации. Число качественно различающихся базисных инструментов растет как 3^n для однотипных случаев и 5^n — для смешанных, а также растет и общее число страйков $\prod_{i \in N} v_i$. Представляется, что при наличии адекватного спроса на использование CC-VaR на многомерных рынках лучше торговать непосредственно не ζ -опционами, а индикаторами многомерных сценариев. Все это лишь подчеркивает целесообразность проведенного исследования.

Литература

1. *Agasandian G. A.* Optimal behavior of an investor in option market // Joint Conference (International) on Neural Networks Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2002. Vol. 2. P. 1859–1864.
2. *Агасандян Г. А.* Применение континуального критерия VaR на финансовых рынках. — М.: ВЦ РАН, 2011. 299 с.
3. *Агасандян Г. А.* Континуальный критерий VaR на многомерных рынках опционов. — М.: ВЦ РАН, 2015. 297 с.
4. *Агасандян Г. А.* Континуальный критерий VaR и оптимальный портфель инвестора // Управление большими системами, 2018. Вып. 73. С. 6–26.
5. *Агасандян Г. А.* Континуальный критерий VaR на сценарных рынках // Информатика и её применения, 2018. Т. 12. Вып. 1. С. 32–40.
6. *Brigo D., Mercuri F., Rapisarda F., Scotti R.* Approximated moment matching dynamics for basket-options pricing // Quant. Financ., 2004. Vol. 4. Iss. 1. P. 1–16.
7. *Alexander C., Venkatramanan A.* Analytic approximations for multi-asset option pricing // Math. Financ., 2012. Vol. 22. Iss. 4. P. 667–689.
8. *Краммер Г.* Математические методы статистики / Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. 750 с. (*Cramer H.* Mathematical methods of statistics. — Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1946. 575 p.)

Поступила в редакцию 24.03.21

MULTIDIMENSIONAL BINARY MARKETS AND CC-VaR

G. A. Agasandyan

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The work further investigates the problems of using the continuous VaR-criterion (CC VaR) in financial markets. It deals with some technical problems arising in multidimensional markets — markets generated by several stochastically connected underliers. The multidimensional extension of binary markets, a simplified markets variant of traditional options such as calls and puts, is considered. They are also the simplest extension of scenario markets in discrete-on-instruments markets. Based on the supposition that scenario indicators are not fully traded in the market directly, an approach to replicating such indicators by binary instruments is suggested. This approach is based on the parity theorems for one-dimensional markets. It is formed for multidimensional markets and is described in details for two-dimensional markets. The constructions of bases for both single-type versions and the natural mixed version with a fixed market center are given. The theoretical constructions with optimal portfolios representations in these bases are illustrated on the example of a specific two-dimensional market.

Keywords: underliers; multidimensional market; investor’s risk preferences function; continuous VaR-criterion; cost and forecast densities; scenario indicators; bases; binary options; one-type portfolio; market center; mixed portfolio

DOI: 10.14357/19922264220201

References

1. Agasandyan, G. A. 2002. Optimal behavior of an investor in option market. *Joint Conference (International) on Neural Networks Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 2:1859–1864.
2. Agasandyan, G. A. 2011. *Primenenie kontinual'nogo kriteriya VaR na finansovykh ryinkakh* [Application of continuous VaR-criterion in financial markets]. Moscow: CC RAS. 299 p.
3. Agasandyan, G. A. 2015. *Kontinual'nyy kriteriy VaR na mnogomernykh ryinkakh optionov* [Continuous VaR-criterion in multidimensional option markets]. Moscow: CC RAS. 297 p.
4. Agasandyan, G. A. 2018. Kontinual'nyy kriteriy VaR i optimal'nyy portfel' investora [Continuous VaR-criterion and investor's optimal portfolio]. *Upravleniye bol'shimi sistemami* [Large-Scale Systems Control] 73:6–26.
5. Agasandyan, G. A. 2018. Kontinual'nyy kriteriy VaR na stsennarnykh ryinkakh [Continuous VaR-criterion in scenario markets]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 12(1):32–40.
6. Brigo, D., F. Mercurio, F. Rapisarda, and R. Scotti. 2004. Approximated moment matching dynamics for basket-options pricing. *Quant. Financ.* 4(1):1–16.
7. Alexander, C., and A. Venkatramanan. 2012. Analytic approximations for multi-asset option pricing. *Math. Financ.* 22(4):667–689.
8. Cramer, H. 1946. *Mathematical methods of statistics*. Princeton, NJ: Princeton University Press. 575 p.

Received March 24, 2021

Contributor

Agasandyan Gennady A. (b. 1941) — Doctor of Science in physics and mathematics, leading scientist, A. A. Dorodnicyn Computing Center, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 40 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; agasand17@yandex.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ СТАЦИОНАРНОСТИ ДЛЯ НАСТРОЙКИ МОДЕЛЕЙ ПРИ ПРОГНОЗИРОВАНИИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

О. А. Кравцова¹

Аннотация: Рассматривается возможность использования информации о стационарности остатков для совершенствования процедуры прогнозирования нестационарных временных рядов. При традиционном подходе данная процедура используется только в формате подтверждения или отвержения гипотезы о нестационарности остатков. В настоящей статье критерии стационарности предлагается использовать при настройке гиперпараметров для построения моделей прогнозирования. Методика основана на концепции коинтеграции Грейнджера для поиска статистически значимой связи между временными рядами. Для уменьшения ошибки прогноза моделей в качестве функции потерь используется p -значение тестов на стационарность. В качестве данных для проверки использовались экономические и сгенерированные временные ряды. Проведенные эксперименты показали, что нередко такой подход оказывается более эффективным по сравнению с традиционными способами настройки моделей.

Ключевые слова: временные ряды; стационарность; деревья решений; регрессионный анализ

DOI: 10.14357/19922264220202

1 Введение

Прогнозирование временных рядов является одной из самых исследуемых задач. В общем виде задача прогнозирования состоит в выборе такого алгоритма, который обеспечивает максимальное качество прогноза относительно выбранной функции потерь. Оптимальной настройкой для модели считается та, которая позволяет получить минимум для заданного функционала качества [1].

Если остатки модели нестационарны, то модель имеет неодинаковую точность прогноза в разные периоды времени, т. е. нуждается в корректировке. В связи с этим получил распространение подход, основанный на концепции коинтеграции Грейнджера [2], в котором исследование распределения остатков по времени является составляющей оценки качества регрессионных моделей. Данная концепция широко используется в финансовом секторе, например в парном трейдинге для выявления ложных регрессионных связей [3].

Для прогнозирования нестационарных временных рядов, которые весьма часто представляют основную проблему при прогнозировании экономических временных рядов, используются такие модели, как ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) [4, 5] и деревья решений [6, 7]. Указанные модели обладают ограниченной прогностической способностью при использовании на нестационарных временных рядах. Для увеличения

прогностической способности используются различные гибридные модели и ансамблевые методы. Модель ARIMA используют в качестве дополнения к нейронной сети [8–10] и вместе с вейвлетами [11, 12] деревья решений объединяют в ансамблевый метод [13, 14].

В настоящей статье для стандартных моделей ARIMA и ансамблей деревьев решений функция потерь дополняется информацией о «степени» статистически значимой связи между прогнозом и реальными значениями (p -значение тестов на стационарность). Проверка предложенного метода проведена на экономических рядах и сгенерированных псевдовыборках. В частности, анализ и прогнозирование паттернов поведения акций — одна из самых исследуемых задач в сфере фондового рынка. Особый интерес представляет прогнозирование рядов для краткосрочной перспективы, так как долгосрочная перспектива, как правило, показывает довольно низкие доходности. Большинство инвесторов теряет свой капитал в краткосрочном периоде прогнозирования, поэтому методы анализа цен акций требуют улучшения [15].

2 Стационарность в функции потерь

Среди этапов построения модели ARIMA можно выделить следующие: идентификация модели,

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, phd3984@gse.cs.msu.ru

оценка ее параметров и диагностическая проверка [16]. Наиболее часто используемый в программных пакетах подход к выбору оптимальных гиперпараметров основан на критерии Акаике (AIC) из [17].

Для построения деревьев использовался алгоритм CART (Classification and Regression Trees) [18]. Небольшие модификации могут вызывать сильные изменения в решении дерева, поэтому необходимо тщательно подготавливать данные и следить за процедурой настройки гиперпараметров [19]. Для тестирования использовалась библиотека Scikit-learn. В качестве способа подбора гиперпараметров был выбран так называемый поиск по сетке (Grid search) [18].

Данная работа основана на утверждении, что если остатки стационарны, то модель является хорошо специфицированной, т. е. если модель и совершает ошибки, то эти ошибки происходят по большей части из-за шумовой компоненты в данных, которая не поддается прогнозированию с помощью математических методов.

В качестве первого теста на стационарность был выбран классический тест единичного корня — тест Дики–Фуллера [20], где использование единичного корня с дрейфом и детерминированного временного тренда является опциональным:

$$\Delta y_i = \alpha_0 + \alpha_1 t + \delta y_{i-1} + \varepsilon_i.$$

Для подсчета р-значения используется t-распределение (распределение Стьюдента) со статистикой DF:

$$F(x) = \frac{1}{2} + x\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right), \quad DF = \frac{\bar{\alpha}}{s.e.(\bar{\alpha})},$$

$X \in \mathbf{R} \sim St(v)$, $v > 0$; Γ — гамма-функция Эйлера; s. e. (standard error) — стандартная ошибка; $\bar{\alpha}$ — оценка параметра α . Тогда функцию потерь можно представить с помощью р-значения и итоговая задача оптимизации будет выглядеть следующим образом:

$$F\left(\frac{\bar{\alpha}}{s.e.(\bar{\alpha})}\right) \rightarrow \min. \quad (1)$$

Экономические ряды характеризуются структурными сдвигами, т. е. возникают качественные изменения связей. Такой сдвиг практически невозможно предсказать, поэтому тест Дики–Фуллера покажет отсутствие стационарности даже в случае правильной спецификации. Тест Зивота–Эндрюса позволяет обработать единичное изменение среднего и единичное изменение наклона тренда [21]:

$$\Delta y_i = c + \alpha y_{t-1} + \beta t + \gamma DU_t + \theta DT_t + \sum_{j=1}^k d_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t.$$

Функция потерь для данного теста аналогична случаю теста Дики–Фуллера в формуле (1). Если в обучающих данных наблюдается структурное изменение, т. е. меняется тренд или среднее для одного участка выборки сильно отличается от среднего другого участка, будем использовать тест Зивота–Эндрюса, в противном случае используем тест Дики–Фуллера.

3 Алгоритмы улучшения моделей прогнозирования

В качестве данных для подтверждения гипотезы о релеванности использования остатков в функции потерь для моделей прогнозирования были использованы следующие: курс рубля, цена на нефть, индекс Мосбиржи, цена на золото [22], сгенерированные ряды. Динамика этих данных напрямую отражается на издержках во всех отраслях экономики [23], поэтому прогнозирование данных рядов является актуальной задачей. Для рядов использовались средние показатели за неделю. Под сгенерированными рядами понимаются ряды, полученные с помощью метода бутстрепа из исходных (в итоге получаем 50 различных рядов). Для каждого такого ряда строился прогноз с помощью модели ARIMA. В качестве регрессоров для деревьев решений использовались лаговые значения и — для деревьев решений — остатки от оценок ARIMA. Все прогнозы строились на периоды от 4 до 12 недель. Хорошим прогнозом будем считать модель с прогнозом с наименьшей ошибкой, высокой корреляцией между спрогнозированными значениями и действительными, стационарными остатками.

В общем виде рассмотрим алгоритм для улучшения модели ARIMA с помощью использования р-значения тестов на стационарность.

Алгоритм 1 (ARIMA)

1. Используем метод поиска по сетке для различных гиперпараметров модели прогнозирования для разных размеров обучающей и тестовой выборки.
2. Для каждой комбинации считаем величину среднеквадратичной ошибки (MSE), р-значение теста на стационарность для остатков модели (разница между оцененными значениями обучающей выборки и значениями обучающей выборки) и критерий AIC.

3. Отсортируем комбинации по метрике MSE для фиксированной длины тестовой выборки.
4. Посчитаем разность между показателями p -значения для первой настройки и второй настройки, аналогично посчитаем разность для критерия AIC.
5. Если разность для p -значения оказалась положительной и эта разница превышает 0,001, то переходим к следующему шагу. Иначе выбираем настройку с минимальным AIC.
6. Повторяем процесс сравнения для второй и третьей настройки и т. д., пока не выполняются оба условия.

Таким образом, для обучающей выборки считаем MSE, p -значение и AIC, а для тестовой — только MSE. Для деревьев решений нет необходимости в оценке сложности модели, однако, чтобы лучше контролировать процесс обучения, рассмотрим корреляции. Показатель корреляции Пирсона для фиксированной длины тестовой выборки высчитаем следующим образом.

Алгоритм 2 (Корреляции)

1. Из исходного ряда выберем фиксированный размер обучающей выборки для фиксированной даты последнего наблюдения.
2. Из обучающей выборки исключим последние наблюдения размером с тестовую выборку, на этих значениях будем вычислять коэффициент корреляции. Назовем их валидационной выборкой. Объединим оставшиеся значения из обучающей выборки с предшествующими ей значениями из исходной выборки
3. Для разных размеров обучающей выборки (т. е. различных подвыборок из «предшествующие значения исходной выборки + обучающая выборка – размер тестовой выборки») используем поиск по сетке гиперпараметров, построим прогнозы для валидационной выборки. Посчитаем корреляцию прогноза валидационной выборки с истинными значениями
4. Для каждого набора гиперпараметров для изначальной фиксированной даты последнего наблюдения из п. 1 и изначальной заданной длины тестовой выборки сохраним значения корреляций.

Теперь рассмотрим общий алгоритм для деревьев решений.

Алгоритм 3 (Деревья решений)

1. Используем метод поиска по сетке для различных гиперпараметров модели прогнозирования для разных размеров обучающей и тестовой выборки.

2. Для каждой комбинации считаем величину MSE и p -значение теста на стационарность для остатков модели.
3. Отсортируем комбинации по метрике MSE для фиксированной длины тестовой выборки.
4. Посчитаем разность между показателями p -значения для первой настройки и второй настройки.
5. Если разность для p -значения оказалась положительной и эта разница превышает 0,001, то переходим к следующему шагу. Иначе выбираем настройку с наибольшим показателем корреляции. Показатель корреляции выбирается из сохраненных значений из алгоритма 2 для выбранной длины обучающей и тестовой выборок.
6. Повторяем процесс сравнения для второй и третьей настройки и т. д., пока не выполняются оба условия.

4 Вычислительный эксперимент

Вначале рассмотрим возможность использования величины p -значения тестов на стационарность и среднеквадратичной ошибки для отбора размера тренировочной выборки при прогнозировании с помощью алгоритма построения модели ARIMA на основе критерия Акаике из [17].

В качестве примера на рис. 1 продемонстрирована величина ошибки прогноза (MSE) цены на нефть для разных промежутков ряда, где размер обучающей выборки подбирался на основании критерия стационарности остатков — p -val и на критерии величины среднеквадратичной ошибки — mse. Чем меньше оцененные значения отличаются от действительных, тем лучше получится результат прогноза. График показывает, что использование стационарности остатков в качестве критерия отбора размера обучающей выборки в ряде случаев уже позволяет уменьшать ошибку прогноза.

На рис. 2 для выбранного оптимального размера обучающей выборки показана разница между величиной ошибки алгоритма, основанного на популярном подходе к настройке ARIMA из [17], mse(auto_arima), и на критерии стационарности для различных рядов, mse(p_val). Итоговая разница никогда не становится меньше нуля, что говорит о том, что метод как минимум не хуже, а в ряде случаев и лучше, чем классический подход подбора.

Для деревьев решений рассмотрим анализ одного конкретного нестационарного ряда фиксированной длины на рис. 3 (в данном случае ряд индекса

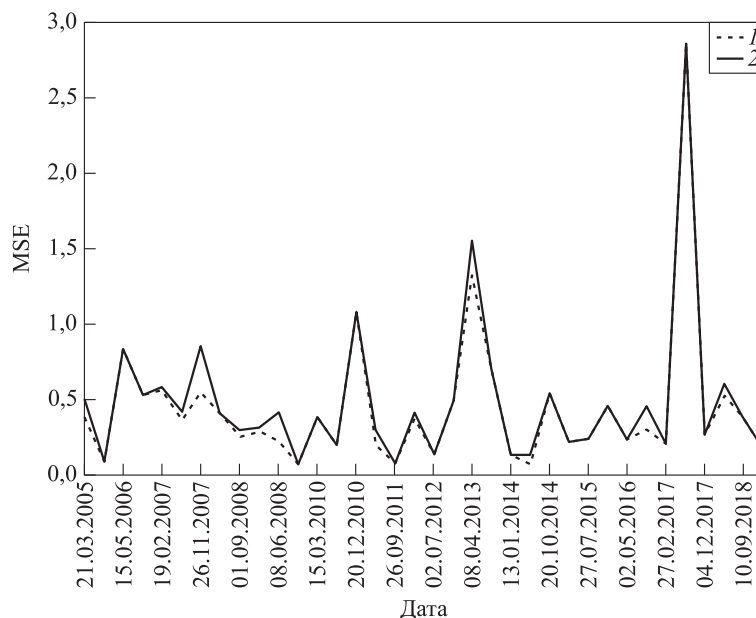


Рис. 1 Величина ошибки прогноза (MSE) цены на нефть для двух критериев отбора размера обучающей выборки: 1 — критерий стационарности остатков — p_val ; 2 — критерий величины среднеквадратичной ошибки — mse

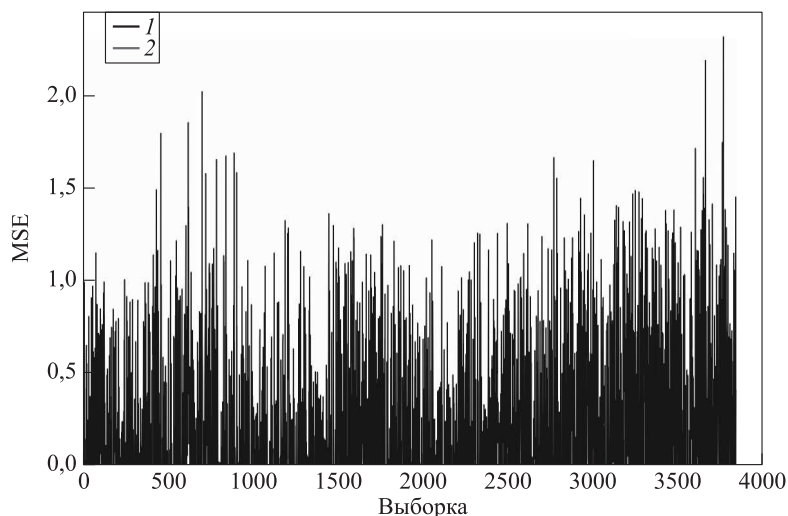


Рис. 2 Разница между величиной ошибки прогноза алгоритма, основанного на критерии Акаике (1) и на критерии стационарности (2)

Мосбиржи). На этом рисунке p_val — отбор на основе стационарности остатков, $\min mse\ train$ — на основе величины ошибки mse , $\min mse\ test$ — минимально возможная ошибка при лучшем подборе гиперпараметров для заданного размера тренировочной выборки. На некоторых участках графики p_val (1) и $\min mse\ train$ (2) пересекаются.

Каждый из графиков показывает, насколько минимальной может быть ошибка прогноза на тестовой выборке для конкретного временного ряда при фиксированной длине прогноза для разных раз-

меров обучающей выборки, т. е. перебираем различные комбинации гиперпараметров для разных размеров обучающей выборки и выбираем те, которые на тестовой выборке продемонстрировали наименьшую ошибку прогноза. Таким образом, задача — приблизиться к минимуму графика $\min mse\ train$.

Однако, в отличие от ARIMA, использование p -значения для деревьев не всегда позволяет улучшить результат. Использование такого алгоритма релевантно только в том случае, если прогноз дела-

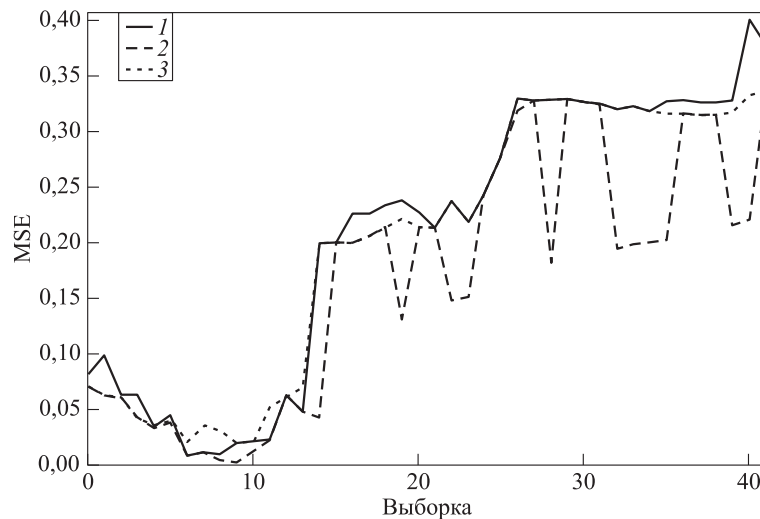


Рис. 3 Подбор размера обучающей выборки деревьев решений для одного из рядов: 1 — p-val; 2 — min mse train; 3 — min mse test

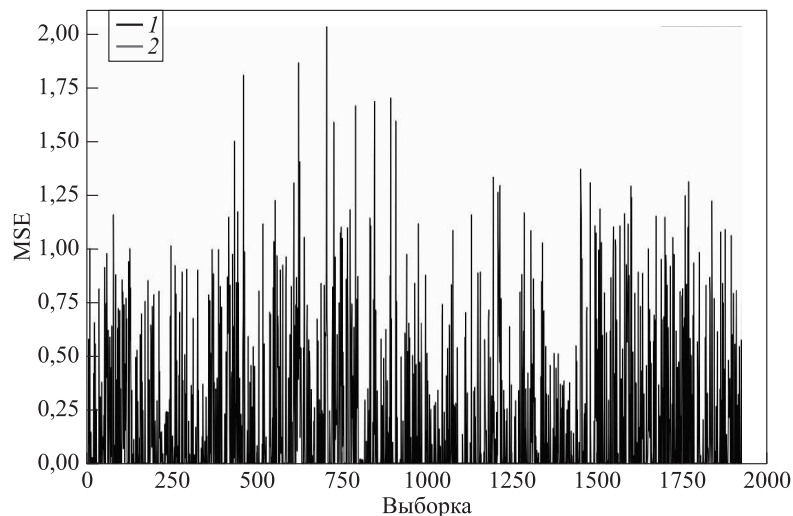


Рис. 4 Разница между величиной ошибки прогнозов алгоритмов, основанных на величине ошибки MSE (1) и на критерии стационарности (2)

ется на период от 8 до 12 недель. На рис. 4 представлены только результаты прогноза для 8 и 12 недель. Как и в случае с ARIMA, график позволяет говорить о том, что метод с учетом стационарности остатков как минимум не хуже (разность между величиной ошибки традиционного подхода и метода с учетом стационарности никогда не меньше нуля).

Основываясь на эмпирических результатах исследования, можно сделать вывод, что использование информации о стационарности остатков представляется релевантным для уменьшения ошибки прогноза.

Однако данный метод обладает рядом минусов. Во-первых, это высокая вычислительная слож-

ность, так как необходимо рассматривать множество различных комбинаций гиперпараметров. Во-вторых, для деревьев решений результат работы алгоритма нестабилен для разных размеров периода прогнозирования. В связи с этим следует довести метод до более компактного итеративного процесса, который бы обеспечивал статистически значимое улучшение прогноза моделей.

5 Заключение

Для выбора корректной настройки гиперпараметров моделей прогнозирования существует больш-

шее разнообразие подходов. В данной статье рассматривались наиболее популярные подходы к построению прогнозов нестационарных временных рядов с помощью ARIMA и деревьев решений. В качестве подхода к настройке гиперпараметров был выбран метод из [17] для ARIMA и алгоритм поиска по сетке для метода CART построения деревьев решений. В статье проверяется возможность использования р-значения тестов на стационарность в функции потерь для улучшения прогнозов данных алгоритмов.

Наибольшую эффективность тесты на стационарность для остатков модели продемонстрировали для модели ARIMA, для деревьев решений использование р-значения нерелевантно при слишком малом или слишком большом периоде прогнозирования.

Литература

1. *Khmelnitskaya A. B.* Social welfare functions for different subgroup utility scales // Constructing and applying objective functions / Eds. A. Tangian, J. Gruber. — Lecture notes in economics and mathematical systems ser. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. Vol. 510. P. 515–530. doi: 10.1007/978-3-642-56038-5.
2. *Engle R. F., Granger C. W. J.* Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing // *Econometrica*, 1987. Vol. 55. No. 2. P. 251–276. doi: 10.2307/1913236.
3. *Hatemi-J A.* Tests for cointegration with two unknown regime shifts with an application to financial market integration // *Empir. Econ.*, 2008. Vol. 35. P. 497–505. doi: 10.1007/s00181-007-0175-9.
4. *Ariyo A. A., Adewumi A. O., Ayo C. K.* Stock price prediction using the ARIMA model // 16th Conference (International) on Computer Modeling and Simulation Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2014. P. 106–112. doi: 10.1109/UKSim.2014.67.
5. *Li T., Zhong J., Huang Z.* Potential dependence of financial cycles between emerging and developed countries: Based on ARIMA-GARCH copula model // *Emerg. Mark. Financ. Tr.*, 2019. Vol. 56. No. 6. P. 1–14. doi: 10.1080/1540496X.2019.1611559.
6. *Gepp A., Kumar K., Bhattacharya S.* Business failure prediction using decision trees // *J. Forecasting*, 2010. Vol. 29. No. 6. P. 536–555. doi: 10.1002/for.1153.
7. *Aggarwal C. C.* Mining time series data // *Data mining*. — Springer, 2015. P. 457–491. doi: 10.1007/978-3-319-14142-8.
8. *Namini S. S., Tavakoli N., Namin A. S.* A comparison of ARIMA and LSTM in forecasting time series // 17th Conference (International) on Machine Learning and Applications Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2018. P. 536–555. doi: 10.1109/ICMLA.2018.00227.
9. *Temur A. S., Akgun M., Temur G.* Predicting housing sales in Turkey using ARIMA, LSTM and hybrid models // *J. Bus. Econ. Manag.*, 2019. Vol. 20. No. 5. P. 920–938. doi: 10.3846/jbem.2019.10190.
10. *Wang Z., Lou Y.* Hydrological time series forecast model based on wavelet de-noising and ARIMA-LSTM // 3rd Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conference Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2019. P. 1697–1701. doi: 10.1109/ITNEC.2019.8729441.
11. *Ye T.* Stock forecasting method based on wavelet analysis and ARIMA-SVR model // 3rd Conference (International) on Information Management Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2017. P. 102–106. doi: 10.1109/INFOMAN.2017.7950355.
12. *Singh S., Parmar K. S., Kumar J., Makkhan S. J. S.* Development of new hybrid model of discrete wavelet decomposition and autoregressive integrated moving average (ARIMA) models in application to one month forecast the casualties cases of COVID-19 // *Chaos Soliton. Fract.*, 2020. Vol. 135. Art. 109866. doi: 10.1016/j.chaos.2020.109866.
13. *Zhou F., Zhang Q., Sornette D., Jiang L.* Cascading logistic regression onto gradient boosted decision trees for forecasting and trading stock indices // *Appl. Soft Comput.*, 2019. Vol. 84. No. 2. Art. 105747. 13 p. doi: 10.1016/j.asoc.2019.105747.
14. *Ribeiro M. H. D. M., Coelho L.* Ensemble approach based on bagging, boosting and stacking for short-term prediction in agribusiness time series // *Appl. Soft Comput.*, 2020. Vol. 86. Art. 105837. 17 p. doi: 10.1016/j.asoc.2019.105837.
15. *Elder A.* The new trading for a living: Psychology, discipline, trading tools and systems, risk control, trade management. — Wiley Trading ser. — New York, NY, USA: John Wiley & Sons Ltd., 2014. 304 p.
16. *Tabachnick B. G., Fidell L. S.* Using multivariate statistics. — 6th ed. — London: Pearson Education, 2013. 983 p.
17. *Hyndman R., Khandakar Y.* Automatic time series forecasting: The forecast package for R // *J. Stat. Softw.*, 2008. Vol. 27. No. 3. P. 1–22. doi: 10.18637/jss.v027.i03.
18. *Pedregosa F., Varoquaux G., Gramfort A., et al.* Scikit-learn: Machine learning in Python // *J. Mach. Learn. Res.*, 2011. Vol. 12. P. 2825–2830.
19. *Singh S., Gupta P.* Comparative study Id3, Cart and C4.5 decision tree algorithm: A survey // *Int. J. Advanced Information Science Technology*, 2014. Vol. 3. No. 7. P. 47–52. doi: 10.15693/jjaist/2014.v3i7.
20. *Dickey D. A., Fuller W. A.* Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root // *J. Am. Stat. Assoc.*, 1979. Vol. 74. No. 366. P. 427–431. doi: 10.2307/2286348.
21. *Zivot E., Andrews D.* Further evidence on the great crash, the oil-price shock, and the unit-root hypothesis // *J. Bus. Econ. Stat.*, 2002. Vol. 10. No. 3. P. 251–270. doi: 10.2307/1391541.

22. Финам. Данные от 01.01.2005 до 20.11.2020. <https://www.finam.ru>.
23. Литвинова Я. С. Цена на нефть как ключевой фактор воздействия на российскую валюту // Проб-

лемы и перспективы экономики и управления: Мат-лы I Междунар. научн. конф. — СПб.: Реноме, 2012. С. 19–21. <https://moluch.ru/conf/econ/archive/15/2170>.

Поступила в редакцию 26.10.21

MODEL SETTING USING STATIONARITY CRITERIA FOR TIME SERIES FORECASTING

O. A. Kravtsova

M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

Abstract: The article discusses the possibility of using the information on the stationarity of residuals to improve the procedure of forecasting nonstationary time series. In the traditional approach, this procedure is used only to confirm or reject the hypothesis of nonstationarity of residuals. In this article, the stationarity test is used for fine-tuning of hyperparameters of the forecasting models. The technique is based on the Granger cointegration approach property to find a statistically significant relationship between time series. The author used the p-value of stationarity tests as a loss function. Economic and generated time series were used as data for verification. The experiments have shown that this approach is often more effective in comparison with the traditional methods of tuning models.

Keywords: time series; stationarity; decision trees; regression analysis

DOI: 10.14357/19922264220202

References

1. Khmel'nitskaya, A. B. 2002. Social welfare functions for different subgroup utility scales. *Constructing and applying objective functions*. Eds. A. Tangian, and J. Gruber. Lecture notes in economics and mathematical systems ser. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. 510:515–530. doi: 10.1007/978-3-642-56038-5.
2. Engle, R. F., and C. W. J. Granger. 1987. Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing. *Econometrica* 55(2):251–276. doi: 10.2307/1913236.
3. Hatemi-J, A. 2008. Tests for cointegration with two unknown regime shifts with an application to financial market integration. *Empir. Econ.* 35:497–505. doi: 10.1007/s00181-007-0175-9.
4. Ariyo, A. A., A. O. Adewumi, and C. K. Ayo. 2014. Stock price prediction using the ARIMA model. *16th Conference (International) on Computer Modeling and Simulation Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 106–112. doi: 10.1109/UKSim.2014.67.
5. Li, T., J. Zhong, and Z. Huang. 2019. Potential dependence of financial cycles between emerging and developed countries: Based on ARIMA-GARCH copula model. *Emerg. Mark. Financ. Tr.* 56(6):1–14. doi: 10.1080/1540496X.2019.1611559.
6. Gepp, A., K. Kumar, and S. Bhattacharya. 2010. Business failure prediction using decision trees. *J. Forecasting* 29(6):536–555. doi: 10.1002/for.1153.
7. Aggarwal, C. C. 2015. Mining time series data. *Data mining*. Springer. 457–491.
8. Namini, S. S., N. Tavakoli, and A. S. Namin. 2018. A comparison of ARIMA and LSTM in forecasting time series. *17th Conference (International) on Machine Learning and Applications Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 536–555. doi: 10.1109/ICMLA.2018.00227.
9. Temur, A. S., M. Akgun, and G. Temur. 2019. Predicting housing sales in Turkey using ARIMA, LSTM and hybrid models. *J. Bus. Econ. Manag.* 20(5):920–938. doi: 10.3846/jbem.2019.10190.
10. Wang, Z., and Y. Lou. 2019. Hydrological time series forecast model based on wavelet de-noising and ARIMA-LSTM. *3rd Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conference Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 1697–1701. doi: 10.1109/ITNEC.2019.8729441.
11. Ye, T. 2017. Stock forecasting method based on wavelet analysis and ARIMA-SVR model. *3rd Conference (International) on Information Management Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 102–106. doi: 10.1109/INFOMAN.2017.7950355.
12. Singh, S., K. S. Parmar, J. Kumar, and S. J. S. Makkhan. 2020. Development of new hybrid model of discrete wavelet decomposition and autoregressive integrated moving average (ARIMA) models in application to one month forecast the casualties cases of COVID-19. *Chaos Soliton. Fract.* 135(1):109866. doi: 10.1016/j.chaos.2020.109866. 8 p.
13. Zhou, F., Q. Zhang, D. Sornette, and L. Jiang. 2019. Cascading logistic regression onto gradient boosted decision trees for forecasting and trading stock indices.

- Appl. Soft Comput.* 84(2):105747. 13 p. doi: 10.1016/j.asoc.2019.105747.
14. Ribeiro, M. H. D. M., and L. Coelho. 2020. Ensemble approach based on bagging, boosting and stacking for short-term prediction in agribusiness time series. *Appl. Soft Comput.* 86:105837. 17 p. doi: 10.1016/j.asoc.2019.105837.
 15. Elder, A. 2014. *The new trading for a living: Psychology, discipline, trading tools and systems, risk control, trade management.* Wiley Trading ser. New York, NY: John Wiley & Sons Ltd. 304 p.
 16. Tabachnick, B. G., and L. S. Fidell. 2013. *Using multivariate statistics.* 6th ed. London: Pearson Education. 983 p.
 17. Hyndman, R., and Y. Khandakar. 2008. Automatic time series forecasting: The forecast package for R. *J. Stat. Softw.* 27(3):1–22. doi: 10.18637/jss.v027.i03.
 18. Pedregosa, F., G. Varoquaux, A. Gramfort, *et al.* 2011. Scikit-learn: Machine learning in Python. *Decision Trees. J. Mach. Learn. Res.* 12:2825–2830.
 19. Singh, S., and P. Gupta. 2014. Comparative study Id3, cart and C4.5 decision tree algorithm: A survey. *Int. J. Advanced Information Science Technology* 3(7):47–52. doi: 10.15693/ijaist/2014.v3i7.
 20. Dickey, D. A., and W. A. Fuller. 1979. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *J. Am. Stat. Assoc.* 74(366):427–431. doi: 10.2307/2286348.
 21. Zivot, E., and D. Andrews. 2002. Further evidence on the great crash, the oil-price shock, and the unit-root hypothesis. *J. Bus. Econ. Stat.* 10(3):251–270. doi: 10.2307/1391541.
 22. Finam. Dannye ot 01.01.2005 do 20.11.2020 [Data from 01.01.2005 to 20.11.2020]. Available at: <https://www.finam.ru/> (accessed April 6, 2022).
 23. Litvinova, Ya. S. 2012. Tsena na neft' kak klyuchevoy faktor vozdeystviya na rossiyskuyu valyutu [Oil price as a key factor affecting the Russian currency]. *Mat-ly I Mezhdunar. nauchn. konf. "Problemy i perspektivy ekonomiki i upravleniya"* [I Scientific Conference (International) "Problems and Prospects of Economics and Management" Proceedings]. St. Petersburg: Renome. 19–21. Available at: <https://moluch.ru/conf/econ/archive/15/2170> (accessed June 3, 2022).

Received October 26, 2021

Contributor

Kravtsova Olga A. (b. 1996) — PhD student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; phd3984@gse.cs.msu.ru

УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ ВЫХОДОМ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ ПО КВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ. СЛУЧАЙ ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ*

А. В. Босов¹

Аннотация: Решена задача оптимального управления линейным выходом стохастической дифференциальной системы формируемым аддитивным скачкообразно изменяющимся входным воздействием. Цель оптимизации задается квадратичным критерием специального вида, позволяющим формализовать задачи слежения за скачкообразно изменяющейся целью и стабилизации системы около направлений, определяемых входом. Задача решается в предположении наличия полной информации, т. е. известного состояния входной марковской цепи. Такая постановка дополняет ранее полученное решение задачи с неполной информацией, в которой имеет место разделение задач управления и оценивания, обеспечиваемого оптимальным в этом случае фильтром Вонэма. Поэтому полученный в статье результат, помимо того что имеет самостоятельное значение, дает еще и эталонное решение для анализа качества управления в условиях косвенных наблюдений. Решение рассматриваемой задачи, как и в постановке с неполной информацией, обеспечивается непосредственным применением метода динамического программирования. Уравнение Беллмана уточняется для заданной модели входа — используется мартигальное представление цепи и ограниченная единичными координатными векторами область значений. Проведен численный эксперимент, результаты которого иллюстрируют работоспособность полученных алгоритмов управления в обеих постановках: с полной информацией и косвенными наблюдениями.

Ключевые слова: марковский скачкообразный процесс; линейная стохастическая дифференциальная система; оптимальное управление; квадратичный критерий; динамическое программирование

DOI: 10.14357/19922264220203

1 Введение

В статье представлено решение задачи, постановка которой предложена в [1] формально даже в более сложном случае. В оптимизируемой системе определен вектор состояния, описываемый цепью Маркова, и выходной вектор, описываемый линейным дифференциальным уравнением Ито с винеровским процессом. Выход интерпретируется как косвенные наблюдения за состоянием марковской цепи, которая входит в наблюдения аддитивно. Решение задачи в [1] получено путем разделения задач управления и оценивания, а оптимальный для такой системы наблюдения фильтр Вонэма [2] тоже описывается обычным уравнением Ито. Из-за этого эквивалентная задача для состояния, заданного уравнением фильтрации, линейно преобразованных наблюдений и неизменившегося при этом квадратичного критерия решается классическими методами оптимального управления. Деталю этого решения и подробному исследованию задачи в случае наблюдаемого входа, описываемого традиционным диффузионным процессом, посвящена

работа [3], а важное дополнение для случая зависимых возмущений в уравнениях входа и выхода получено в [4].

Задача, точно такая же, как в [1], но в условиях полной информации, т. е. в предположении, что состояние входной цепи Маркова известно и отсутствует необходимость его оценивания по косвенным наблюдениям, ранее не рассматривалась. Ее решение — основная цель данной статьи. Интересно заметить: хотя и считается, что классическими методами оптимального управления [5, 6] хорошо решаются именно задачи с полной информацией, рассматриваемая модель привлекала ранее внимание только в постановке с ненаблюдаемым входом. Так, в [7, 8] рассматриваемая модель оптимизировалась по упрощенному критерию, в котором учитывались только слагаемые, штрафующие за величину управления, в [9] решение получено для классического квадратичного критерия и даже более общей модели входа. В связи с этими результатами [1] можно считать обобщением на случай квадратичного критерия специального вида, позволяющего решать задачи типа

* Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика» ФИЦ ИУ РАН, Москва).

¹ Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, ABosov@frcsc.ru

слежения за целью, в роли которой выступает ненаблюдаемый вход. Основу для решения в любой из перечисленных работ составляют уравнения оптимальной фильтрации на основе обновляющих процессов [10], фильтр Вонэма в случае цепи — частный случай. Отсутствие внимания к формально более простому случаю с полной информацией, возможно, объясняется интерпретацией входного процесса как сложного возмущения, с воздействием которого требуется бороться. Критерий более общего вида [1, 4] больше ориентирован на постановки с конструктивной интерпретацией входа как воздействия, на которое надо реагировать, изменять поведение выхода. Такой взгляд превращает возмущение в состояние, из-за этого становится целесообразным рассматривать задачу в случае полной информации. В данной статье возможность такого подхода иллюстрируется прикладным примером, приводятся результаты расчетов, подтверждающие применимость полученных алгоритмов управления и позволяющие сравнить их качество в постановках с полной и неполной информацией о состоянии.

2 Постановка задачи управления выходом наблюдаемой цепи

На каноническом вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{F}_t)$, $t \in [0, T]$, рассмотрим линейную дифференциальную стохастическую систему

$$dz_t = a_t y_t dt + b_t z_t dt + c_t u_t dt + \sigma_t dw_t, \quad z_0 = Z, \quad (1)$$

с управляемым выходом $z_t \in \mathbb{R}^{n_z}$, винеровским процессом $w_t \in \mathbb{R}^{n_w}$ и аддитивным входом y_t , представляющим собой марковскую цепь с множеством состояний $\{e_1, \dots, e_{n_y}\}$, сформированным из единичных координатных векторов в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{n_y} , известным начальным состоянием $y_0 = Y$ с распределением π_0 и матрицей интенсивностей переходов Λ_t . Остальные величины в уравнении (1): случайный вектор $Z \in \mathbb{R}^{n_z}$ — гауссовская случайная величина с известными моментами; w_t , y_t , Y и Z независимы в совокупности; заданные матричные функции $a_t \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$, $b_t \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$, $c_t \in \mathbb{R}^{n_z \times n_u}$ и $\sigma_t \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$ ограничены.

Вектор управлений $u_t \in \mathbb{R}^{n_u}$ выбирается из класса допустимых управлений — случайных процессов второго порядка, формируемых по закону управления с обратной связью [5], т.е. в виде $u_t = U_t(y_t, z_t)$. Качество закона управления $U_t = U_t(y, z)$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$, определяется функционалом вида

$$J(U_0^T) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T \|P_t y_t + Q_t z_t + R_t u_t\|_{S_t}^2 dt + \|P_T y_T + Q_T z_T\|_{S_T}^2 \right\}, \quad (2)$$

где $U_0^T = \{U_t(y, z), 0 \leq t \leq T\}$; $P_t \in \mathbb{R}^{n_J \times n_y}$, $Q_t \in \mathbb{R}^{n_J \times n_z}$, $R_t \in \mathbb{R}^{n_J \times n_u}$, $S_t \in \mathbb{R}^{n_J \times n_J}$, $S_t \geq 0$, $S_t = S_t'$, $0 \leq t \leq T$, — заданные ограниченные матричные функции; $\|x\|_S^2 = x' S x$ — весовая функция для симметричной неотрицательно определенной матрицы S , единичной матрице $S = \mathbf{1}$ соответствует евклидова норма $\|x\|_1^2 = |x|^2$, x' — транспонированная матрица x . Для существования решений выписанных далее уравнений предполагается, что все функции Λ_t , a_t , b_t , c_t , σ_t , P_t , Q_t , R_t и S_t кусочно-непрерывны. Кроме того, предполагаются выполненными условия невырожденности $R_t' S_t R_t > 0$ и $\sigma_t \sigma_t' > 0$.

Обозначим через u_t^* оптимальное управление, доставляющее минимум квадратичному функционалу $J(U_0^T)$:

$$(U^*)_0^T = \{U_t^*(y, z), 0 \leq t \leq T\} \in \arg \min J(U_0^T), \quad (3)$$

т.е. $u_t^* = U_t^*(y_t, z_t^*)$, где z_t^* — решение (1) при $u_t = u_t^*$ — является $\mathcal{F}_t^{y, z}$ -измеримым процессом, σ -алгебра $\mathcal{F}_t^{y, z}$ порождена наблюдаемыми величинами $\{y_\tau, z_\tau, 0 \leq \tau \leq t\}$, $\mathcal{F}_t^{y, z} \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$.

3 Основное утверждение

Вначале заметим, что в [1] получено решение для варианта рассматриваемой задачи в постановке с неполной информацией, т.е. в предположении, что целевой функционал (2) оптимизируется для управлений вида $u_t = U_t(z_t)$. Соответствующее оптимальное управление — $u_t^{**} = U_t^{**}(z_t^{**})$, где z_t^{**} — решение (1) при $u_t = u_t^{**}$ — является \mathcal{F}_t^z -измеримым процессом, σ -алгебра \mathcal{F}_t^z порождена наблюдаемыми величинами $\{z_\tau, 0 \leq \tau \leq t\}$, $\mathcal{F}_t^z \subseteq \mathcal{F}_t^{y, z} \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$. Это решение при выполнении перечисленных в постановке задачи условий существует и определяется следующими соотношениями:

$$u_t^{**} = -\frac{1}{2} (R_t' S_t R_t)^{-1} (c_t' (2\alpha_t z_t^{**} + \beta_t \hat{y}_t) + 2R_t' S_t (P_t \hat{y}_t + Q_t z_t^{**})),$$

где $\hat{y}_t = \mathbb{E}\{y_t | \mathcal{F}_t^z\}$ — оценка фильтра Вонэма

$$d\hat{y}_t = \Lambda_t' \hat{y}_t dt + (\text{diag}(\hat{y}_t) - \hat{y}_t \hat{y}_t') a_t' (\sigma_t \sigma_t')^{-1} (dz_t - a_t \hat{y}_t dt - b_t z_t dt - c_t u_t dt), \quad \hat{y}_0 = \mathbb{E}\{Y\}, \quad (4)$$

а функции α_t и β_t — решения уравнений

$$\frac{d\alpha_t}{dt} - (M_t^\alpha \alpha_t + \alpha_t' (M_t^\alpha)') + N_t^\alpha - \alpha_t' c_t (R_t' S_t R_t)^{-1} c_t' \alpha_t = 0, \quad \alpha_T = Q_T' S_T Q_T; \quad (5)$$

$$\frac{d\beta_t}{dt} + \beta_t \Lambda_t' + M_t^\beta - N_t^\beta \beta_t = 0, \quad \beta_T = 2Q_T' S_T P_T. \quad (6)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} M_t^\alpha &= Q_t' S_t R_t (R_t' S_t R_t)^{-1} c_t'; \\ N_t^\alpha &= Q_t' (S_t - S_t R_t (R_t' S_t R_t)^{-1} R_t' S_t) Q_t; \\ M_t^\beta &= 2 \left((a_t' - P_t' S_t R_t (R_t' S_t R_t)^{-1} c_t') \alpha_t + \right. \\ &\quad \left. + P_t' (S_t - S_t R_t (R_t' S_t R_t)^{-1} R_t' S_t) Q_t \right); \\ N_t^\beta &= Q_t' S_t R_t (R_t' S_t R_t)^{-1} c_t' + \alpha_t c_t (R_t' S_t R_t)^{-1} c_t'. \end{aligned}$$

Это решение получено путем разделения задач управления и фильтрации, в результате чего исходная постановка с ненаблюдаемым состоянием y_t и наблюдениями z_t заменяется на эквивалентную задачу с полной информацией для известного состояния \hat{y}_t и выхода z_t . При этом искомым закон управления $U_t^{**}(z)$ принимает вид $U_t^{**}(y, z)$, в котором переменная $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ соответствует состоянию \hat{y}_t , переменная $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ — как и было, выходу z_t и формально $y = y(z)$.

Теперь можно сформулировать основной результат для рассматриваемой постановки с полной информацией.

Теорема. *Оптимальное решение U_t^* задачи оптимизации (3) для целевого функционала $J(U_0^T)$, заданного в (2), определяется следующим соотношением:*

$$U_t^* = U_t^*(y, z) = -\frac{1}{2} (R_t' S_t R_t)^{-1} (c_t' (2\alpha_t z + \beta_t y) + 2R_t' S_t (P_t y + Q_t z)), \quad (7)$$

где функции α_t и β_t — решения (5) и (6).

Таким образом, решение задачи с полной информацией совпадает с решением задачи в случае косвенных наблюдений, представленном в разделенном виде: $U_t^*(y, z) = U_t^{**}(y, z)$, траектории оптимального управления $u_t^* = U_t^{**}(y_t, z_t^*)$, т.е. получаются подстановкой в $U_t^{**}(y, z)$ величин $y = y_t$, траектории u_t^{**} получаются так же, но подстановкой $y = \hat{y}_t$. Такое свойство решения в [9] названо сильным разделением.

Доказательство. Вывод (7) в целом обеспечивается выкладками, проделанными в [3] для решения аналогичной задачи для такого же целевого функционала $J(U_0^T)$, выхода z_t , заданного (1),

и входного воздействия y_t , описываемого диффузионным уравнением с винеровским процессом $V_t \in \mathbb{R}^{n_v}$, не зависящим от w_t , Y и Z :

$$dy_t = \Phi_t(y_t) dt + \Sigma_t(y_t) dV_t, \quad y_0 = Y. \quad (8)$$

В рассматриваемом случае, как и в [3], для решения применим метод динамического программирования. Для функции Беллмана

$$\begin{aligned} V_t &= V_t(y, z) = \\ &= \inf_{U_t^T} \mathbb{E} \left\{ \int_t^T \|P_s y_s + Q_s z_s + R_s u_s\|_{S_s}^2 ds + \right. \\ &\quad \left. + \|P_T y_T + Q_T z_T\|_{S_T}^2 \right\} \end{aligned}$$

воспользуемся уравнением в следующем виде (см. [5, гл. 6, § 2]):

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \min_u \left\{ \mathcal{A}_t^u \{V_t\} + \|P_t y + Q_t z + R_t u\|_{S_t}^2 \right\} = 0,$$

где оператор \mathcal{A}_t^u определяет дифференциал V_t (см. [5, гл. 5, § 5], а именно:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E} \{V_t | \mathcal{F}_t^{y,z}\} = \mathbb{E} \left\{ \frac{\partial V_t}{\partial t} + \mathcal{A}_t^u \{V_t\} | \mathcal{F}_t^{y,z} \right\}.$$

Выражение для \mathcal{A}_t^u , когда y_t задано уравнением (8), дает формула Ито для диффузионного процесса. В этом случае уравнение Беллмана принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\text{tr} \left\{ \Sigma_t' \frac{\partial^2 V_t}{\partial z^2} \Sigma_t \right\} + \text{tr} \left\{ \sigma_t' \frac{\partial^2 V_t}{\partial z^2} \sigma_t \right\} \right) + \\ + \min_u \left\{ \Phi_t' \frac{\partial V_t}{\partial y} + (a_t y + b_t z + c_t u)' \frac{\partial V_t}{\partial z} + \right. \\ \left. + \|P_t y + Q_t z + R_t u\|_{S_t}^2 \right\} = 0. \quad (9) \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае марковской цепи y_t вместо (8) воспользуемся мартингалным представлением [2]:

$$dy_t = \Lambda_t^y y_t dt + d\Lambda_t^y, \quad y_0 = Y, \quad (10)$$

где Λ_t^y — \mathcal{F}_t -согласованный мартингал с квадратичной характеристикой

$$\begin{aligned} \langle \Lambda^y, \Lambda^y \rangle_t &= \\ &= \int_0^t (\text{diag}(\Lambda_s' y_s) - \Lambda_s' \text{diag}(y_s) - \text{diag}(y_s) \Lambda_s) ds. \end{aligned}$$

Соответственно, выражение для A_t^u и скачкообразного y_t , заданного уравнением (10), дает формула Ито для семимартингалов [11] и уравнение Беллмана записывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\text{tr} \left\{ \frac{\partial^2 V_t}{\partial y^2} \langle \Lambda^y, \Lambda^y \rangle_t \right\} + \text{tr} \left\{ \sigma_t' \frac{\partial^2 V_t}{\partial z^2} \sigma_t \right\} \right) + \\ + \min_u \left\{ y' \Lambda_t \frac{\partial V_t}{\partial y} + (a_t y + b_t z + c_t u)' \frac{\partial V_t}{\partial z} + \right. \\ \left. + \|P_t y + Q_t z + R_t u\|_{S_t}^2 \right\} = 0. \quad (11) \end{aligned}$$

Решить (11), как и (9), позволяют предположения о специальной форме функции Беллмана. Во-первых, и (11), и (9) позволяют предположить квадратичный вид V_t по переменной z :

$$V_t = z' \alpha_t z + z' B_t(y) + \Gamma_t(y). \quad (12)$$

Следующее предположение сделаем для коэффициента $B_t(y)$. Для диффузионного процесса y_t , заданного уравнением (8), дополнительно предположим, что имеет место случай линейного сноса, т. е. $\Phi_t(y) = \varphi_t y$. Для скачкообразного процесса y_t , заданного уравнением (10), это условие вполне изначално, можно считать, что $\Phi_t(y) = \Lambda_t' y$. В этом частном случае (12) уточняется дополнительным предположением линейности $B_t(y) = \beta_t y$, т. е.

$$V_t = z' \alpha_t z + z' \beta_t y + \Gamma_t(y). \quad (13)$$

Окончательное предположение о виде V_t можно сделать только для скачкообразного процесса y_t , заданного уравнением (10), а именно: поскольку цепь y_t принимает значения единичных векторов $\{e_1, \dots, e_{n_y}\}$, то в функции Беллмана (13) можно задать линейным третий коэффициент, т. е. $\Gamma_t(y) = \gamma_t y + \delta_t$ и окончательно

$$V_t = z' \alpha_t z + z' \beta_t y + \gamma_t y + \delta_t. \quad (14)$$

Действительно, в общем виде V_t можно записать как $V_t(y, z) = (V_t(e_1, z), \dots, V_t(e_{n_y}, z))y$, что с учетом зависимости (13) от z как раз и дает (14).

Таким образом, уравнение Беллмана для рассматриваемой задачи принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \sigma_t' \frac{\partial^2 V_t}{\partial z^2} \sigma_t \right\} + \\ + \min_u \left\{ y' \Lambda_t \frac{\partial V_t}{\partial y} + (a_t y + b_t z + c_t u)' \frac{\partial V_t}{\partial z} + \right. \\ \left. + \|P_t y + Q_t z + R_t u\|_{S_t}^2 \right\} = 0 \quad (15) \end{aligned}$$

и решается с начальным условием

$$V_T = \|P_T y + Q_T z\|_{S_T}^2,$$

т. е. $\alpha_T = Q_T' S_T Q_T$, $\beta_T = 2Q_T' S_T P_T$, $\gamma_T y = y' P_T' S_T P_T y$ и $\delta_T = 0$.

Последний этап доказательства: подстановку в (15) решения в виде (14) — можно выполнить как непосредственно, так и сославшись на уже проделанные выкладки в [3]. Учитывая сходство уравнений (15) и (9) и сходство их решений (14) и (13), доказываемый результат, т. е. соотношение для оптимального управления (7) с параметрами (5) и (6), из решения (15) можно получить как частный случай. Это соображение завершает доказательство.

В дополнение к доказательству заметим, что общее решение из [3] помимо уравнений для коэффициентов α_t и β_t включает и уравнение для коэффициента $\Gamma_t(y)$ в (15). Соответственно, в рассматриваемом случае вместо $\Gamma_t(y)$ записываются уравнения для γ_t и δ_t :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \gamma_t}{\partial t} + y' \Lambda_t \Lambda_t' + M_t^\gamma y = 0, \quad \gamma_T y = y' P_T' S_T P_T y; \\ \frac{\partial \delta_t}{\partial t} + \text{tr} \{ \sigma_t' \alpha_t \sigma_t \} = 0, \quad \delta_T = 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} M_t^\gamma y = N_t^\gamma(y) = \\ = y' \beta_t' (a_t - c_t (R_t' S_t R_t)^{-1} R_t' S_t P_t) y + \\ + y' P_t' (S_t - S_t R_t (R_t' S_t R_t)^{-1} R_t' S_t) P_t y - \\ - \frac{1}{4} y' \beta_t' c_t (R_t' S_t R_t)^{-1} c_t' \beta_t y. \end{aligned}$$

Особого практического значения уравнения (16) не имеют, но позволяют еще раз прокомментировать использованное в доказательстве свойство линейности функции Беллмана. Это предположение означает, в частности, что в (16) должна иметь место линейность $N_t^\gamma(y)$, несмотря на наличие множителей $y'y$. Это условие обеспечивается представлением

$$M_t^\gamma y = (N_t^\gamma(e_1), \dots, N_t^\gamma(e_{n_y})) y.$$

Аналогично равенство $\gamma_T y = y' P_T' S_T P_T y$, записанное в виде

$$\gamma_T y = (e_1' P_T' S_T P_T e_1, \dots, e_{n_y}' P_T' S_T P_T e_{n_y}) y,$$

дает начальное условие для вычисления γ_t . Отметим, что такое свойство типично для задач, использующих модель марковской цепи с областью значений $\{e_1, \dots, e_{n_y}\}$.

4 Модельный пример

Представляемый численный пример использует модель простой механической системы, в качестве которой может выступать воздействующее устройство типа силового привода. Состояние такого устройства определяется его положением и скоростью. Значение скорости формируется силовым воздействием, аддитивно зависящим от текущего положения x_t , текущей скорости v_t , контролируемого управляющего воздействия u_t и неконтролируемого входа y_t . При отсутствии воздействия y_t физический смысл привода состоит в стабилизации положения и скорости около нуля. Включение в модель y_t предполагает изменение цели управления на стабилизацию положения около изменяющегося значения, формируемого воздействием y_t . Если бы y_t описывалось линейным дифференциальным уравнением с винеровским процессом, то такую задачу можно было бы формализовать классической линейно-квадратической постановкой, похожий по существу пример есть в [12]. В предлагаемой модели y_t — марковская цепь, и привод должен следовать за одним из состояний этой цепи. Данное описание реализует модель вида

$$\left. \begin{aligned} dx_t &= v_t dt, \quad t \in (0, T], \\ dv_t &= ax_t dt + bv_t dt + cy_t dt + hu_t dt + \sqrt{g} dw_t, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Здесь предполагается, что цепь y_t имеет три состояния $\{e_1, e_2, e_3\}$, постоянную матрицу интенсивностей

$$\Lambda_t = \Lambda = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

и начальное распределение $\pi_0 = (1, 0, 0)'$, т.е. $y_0 = Y = e_1$, а целевой функционал

$$J(U_0^T) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T (|Cy_t - x_t|^2 + R|u_t|^2) dt \right\}. \quad (18)$$

Начальные значения x_0 и v_0 — независимые гауссовские случайные величины с нулевым средним и дисперсиями σ_x^2 и σ_v^2 соответственно. Остальные параметры модели (17) — это числа a, b, h, g, R и T и строки $c = (c_1, c_2, c_3)$ и $C = (C_1, C_2, C_3)$. Полагая $C_i = -c_i/a$, получаем цель управления, состоящую в стабилизации положения x_t около величины C_i , если цепь y_t находится в состоянии e_i .

Будем рассматривать случай, когда система (17) устойчива, что обеспечивается условиями $b < 0$ и $b^2 + 4a < 0$. Для расчета выбран следующий набор значений параметров: $a = -1; b = -0,1; h = 10;$

$g = 1,0; R = 0,01; T = 20; \sigma_x^2 = 1; \sigma_v^2 = 1; c_1 = 1; c_2 = 4; c_3 = 8.$

Интегрирование системы (17) выполнено методом Эйлера с шагом 0,001, неявный метод Эйлера с таким же шагом использовался для приближенного интегрирования (5) и (6) при вычислении коэффициентов α_t и β_t . Формальное нарушение моделью (17) условия невырожденности $\sigma_t \sigma_t' > 0$ не мешает вычислить оценку фильтра Вонэма, поскольку для данной модели очевидно, что $\mathcal{F}_t^{x,v} = \mathcal{F}_t^v$, поэтому оценка

$$\hat{y}_t = \mathbb{E} \{y_t | \mathcal{F}_t^z\} = \mathbb{E} \{y_t | \mathcal{F}_t^v\}$$

вычисляется как решение уравнения (4) с использованием только наблюдения v_t также методом Эйлера с шагом 0,001.

Моделировался пучок из траекторий цепи y_t , управлений u_t^* и u_t^{**} и соответствующих траекторий системы x_t^*, x_t^{**} и v_t^*, v_t^{**} . Рассчитаны также траектории неуправляемой системы x_t^0 и v_t^0 , т.е. решения (17) для $u_t = u_t^0 = 0$. Для анализа качества управлений с учетом динамики вычислено значение целевого функционала

$$J(U_0^t) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^t (|Cy_s - x_s|^2 + R|u_s|^2) ds \right\},$$

т.е. функции $J((U^*)_0^t)$, $J((U^{**})_0^t)$ и $J((U^0)_0^t)$ для соответствующих управлений.

Результаты расчетов проиллюстрированы на рис. 1, где показан пример траекторий положений x_t^*, x_t^{**} и x_t^0 , формируемых управлениями u_t^*, u_t^{**} и u_t^0 , на рис. 2 и 3, где представлены соответствующие траектории скоростей и управлений, и на рис. 4 с графиками роста целевого функционала.

Результирующие значения целевого функционала (18): $J((U^*)_0^{20}) = 22,6; J((U^{**})_0^{20}) = 37,2; J((U^0)_0^{20}) = 409,5.$

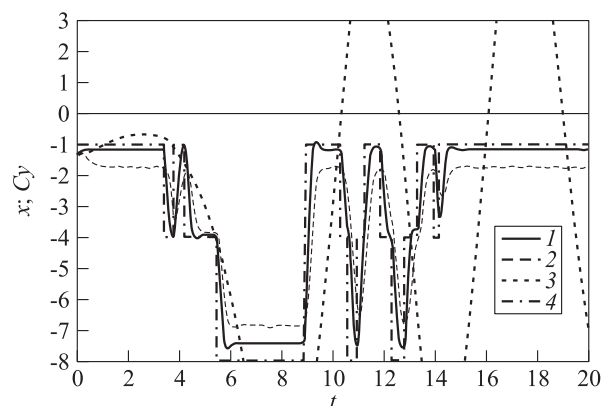


Рис. 1 Примеры траекторий положений: 1 — x_t^* ; 2 — x_t^{**} ; 3 — x_t^0 ; 4 — цель Cy_t

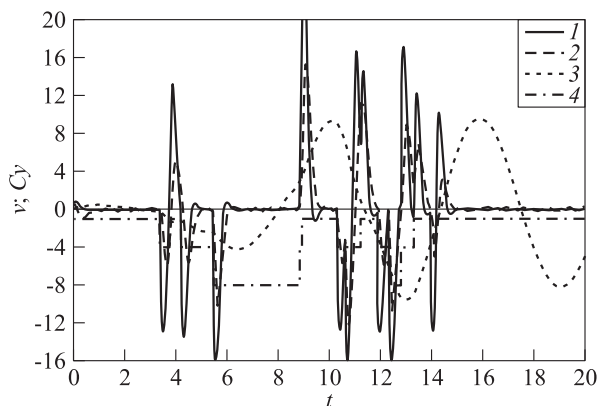


Рис. 2 Примеры траекторий скоростей: 1 — v_t^* ; 2 — v_t^{**} ; 3 — v_t^0 ; 4 — цель Cy_t

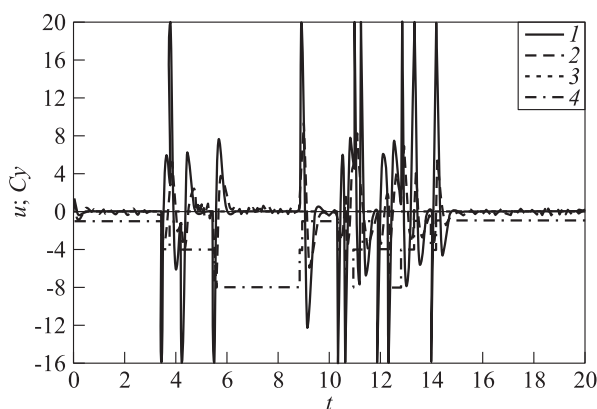


Рис. 3 Примеры траекторий управлений: 1 — u_t^* ; 2 — u_t^{**} ; 3 — u_t^0 ; 4 — цель Cy_t

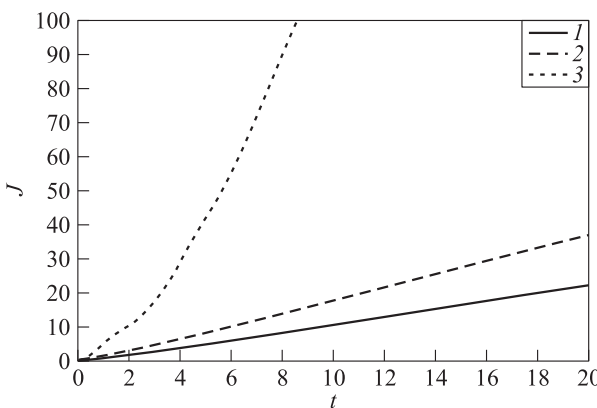


Рис. 4 Динамика целевой функции: 1 — $J((U^*)_0^t)$; 2 — $J((U^{**})_0^t)$; 3 — $J((U^0)_0^t)$

5 Заключение

Главный теоретический результат статьи — это полученное выражение (7) для оптимального

управления $U_t^*(y, z)$ в постановке с полной информацией. Совпадение решения с рассмотренным в [1] случаем с косвенными наблюдениями ожидалось, но требовало формального подтверждения. Практический результат — это выполненный расчет, т. е. реализация алгоритмов управления $U_t^*(y, z)$ и $U_t^{**}(z)$, подтвердившая их практическую применимость и эффективность на подходящем прикладном примере. При этом работа с примером имела одну известную трудность, связанную с фильтром Вонэма, численная реализация которого требует особого внимания в части устойчивости. В связи с решаемой задачей стабилизации привода предполагается исследовать этот вопрос дополнительно.

Литература

1. Босов А. В. Управление линейным выходом марковской цепи по квадратичному критерию // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 2. С. 3–11.
2. Elliott R. J., Aggoun L., Moore J. B. Hidden Markov models: Estimation and control. — New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1995. 382 p.
3. Босов А. В. Задача управления линейным выходом нелинейной неуправляемой стохастической дифференциальной системы по квадратичному критерию // Известия РАН. Теория и системы управления, 2021. № 5. С. 52–73.
4. Босов А. В. О некоторых частных случаях в задаче управления выходом стохастической дифференциальной системы по квадратичному критерию // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 1. С. 11–17.
5. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами / Пер. с англ. — М.: Мир, 1978. 316 с. (Fleming W. H., Rishel R. W. Deterministic and stochastic optimal control. — New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1975. 222 p.)
6. Bertsekas D. P. Dynamic programming and optimal control. — 4th ed. — Cambridge, MA, USA: Athena Scientific, 2017. Vol. I. 576 p.
7. Beneš V. Quadratic approximation by linear systems controlled from partial observations // Stochastic analysis / Eds. E. Mayer-Wolf, E. Merzbach, A. Shwartz. — Boston, MA, USA: Academic Press, 1991. P. 39–50.
8. Helmes K., Rishel R. The solution of a partially observed stochastic optimal control problem in terms of predicted miss // IEEE T. Automat. Contr., 1992. Vol. 37. No. 9. P. 1462–1464.
9. Rishel R. A strong separation principle for stochastic control systems driven by a hidden Markov model //

- SIAM J. Control Optim., 1994. Vol. 32. No. 4. P. 1008–1020.
10. Луицер П. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). — М.: Наука, 1974. 696 с.
11. Луицер П. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартигалов. — М.: Наука, 1986, 512 с.
12. Athans M., Falb P. L. Optimal control: An introduction to the theory and its applications. — New York, NY, USA: Dover Publications, 2007. 879 p.

Поступила в редакцию 09.12.21

LINEAR OUTPUT CONTROL OF MARKOV CHAIN BY SQUARE CRITERION. COMPLETE INFORMATION CASE

A. V. Bosov

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The problem of optimal control of the linear output of a stochastic differential system, formed by an additive jumping input, was solved. The goal of optimization is set by a quadratic criterion of a special type which allows one to formalize the tasks of tracking an abruptly changing target and stabilizing the system near the directions determined by the input. The problem is solved under the assumption that there is complete information, i. e., the known state of the input Markov chain. This statement complements the previously obtained solution of the problem with incomplete information, in which the control and estimation problems are separated, provided by the optimal in this case Wonham filter. The result obtained in the article, in addition to its independent significance, also provides a reference solution for analyzing the quality of control under conditions of indirect observations. The solution of the problem under consideration, as in the statement with incomplete information, is provided by the direct application of the dynamic programming method. The Bellman’s equation is refined for a given input model — a martingale representation of the chain and a range of values limited by unit coordinate vectors are used. A numerical experiment was carried out, the results of which illustrate the efficiency of the obtained control algorithms in both settings, with complete information and indirect observations.

Keywords: Markov jump process; linear stochastic differential system; optimal control; quadratic criterion; dynamic programming

DOI: 10.14357/19922264220203

Acknowledgments

The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (СКР “Informatics”) of FRC CSC RAS (Moscow).

References

1. Bosov, A. V. 2021. Upravlenie lineynym vykhodom markovskoy tsepi po kvadratichnomu kriteriyu [Linear output control of Markov chains by the quadratic criterion]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(2):3–11.
2. Elliott, R. J., L. Aggoun, and J. B. Moore. 1995. *Hidden Markov models: Estimation and control*. New York, NY: Springer-Verlag. 382 p.
3. Bosov, A. V. 2021. The problem of controlling the linear output of a nonlinear uncontrollable stochastic differential system by the square criterion. *J. Comput. Sys. Sc. Int.* 60(5):719–739.
4. Bosov, A. V. 2021. O nekotorykh chastnykh sluchayakh v zadache upravleniya vykhodom stokhasticheskoy differentsial’noy sistemy po kvadratichnomu kriteriyu [On some special cases in the problem of stochastic differential system output control by the quadratic criterion]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(1):11–17.
5. Fleming, W. H., and R. W. Rishel. 1975. *Deterministic and stochastic optimal control*. New York, NY: Springer-Verlag. 222 p.
6. Bertsekas, D. P. 2017. *Dynamic programming and optimal control*. Cambridge, MA: Athena Scientific. Vol. 1. 576 p.
7. Beneš, V. 1991. Quadratic approximation by linear systems controlled from partial observations. *Stochastic analysis*. Eds. E. Mayer-Wolf, E. Merzbach, and A. Shwartz. 39–50.
8. Helmes, K., and R. Rishel. 1992. The solution of a partially observed stochastic optimal control problem in terms of predicted miss. *IEEE T. Automat. Contr.* 37(9):1462–1464.

9. Rishel, R. 1994. A strong separation principle for stochastic control systems driven by a hidden Markov model. *SIAM J. Control Optim.* 32(4):1008–1020.
10. Liptser, R. S., and A. N. Shiryaev. 2001. *Statistics of random processes II. Applications*. Berlin: Springer-Verlag. 402 p.
11. Liptser, R., and A. Shiryaev. 1989. *Theory of martingales*. Dordrecht: Springer. 792 p.
12. Athans, M., and P. L. Falb. 2007. *Optimal control: An introduction to the theory and its applications*. New York, NY: Dover Publications. 879 p.

Received December 9, 2021

Contributor

Bosov Alexey V. (b. 1969) — Doctor of Science in technology, principal scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; AVBosov@ipiran.ru

О МОНОТОННОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ

Я. А. Сатин¹, А. Л. Крюкова², В. С. Ошушкова³, А. И. Зейфман⁴

Аннотация: Вводится отношение частичного порядка для марковских цепей, исследуются условия монотонности для некоторых классов марковских процессов с непрерывным временем. Сформулированы соответствующие теоремы о монотонности, позволяющие сравнивать между собой две (неоднородные, вообще говоря) марковские цепи с одинаковыми начальными условиями и разными матрицами интенсивностей. Рассмотрены классы процессов, для которых заведомо выполнены условия, гарантирующие монотонность. Известный интерес с точки зрения приложений представляют марковские цепи с интервальными интенсивностями. Полученные в работе условия монотонности дают возможность некоторым образом продвинуться в изучении неоднородных марковских цепей с интервальными интенсивностями, а именно: в настоящей работе рассмотрена в качестве примера система обслуживания $M_t/M_t/S/S$ с интервальными коэффициентами. Полученные результаты подтверждены вычислительным экспериментом и проиллюстрированы соответствующими графиками основных вероятностных характеристик системы.

Ключевые слова: монотонность марковских процессов; нестационарная система массового обслуживания; марковские цепи с интервальными интенсивностями; предельные характеристики

DOI: 10.14357/19922264220204

1 Введение

Основное внимание в настоящей статье уделяется исследованию условий монотонности для некоторых классов марковских процессов с непрерывным временем. Имеется ряд работ, так или иначе связанных со сравнением и монотонностью марковских цепей (см., например, [1–3]). Как правило, отношение порядка при этом задается так же, как в [2], это определение и используется далее.

Итак, пусть $\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots)^T$ — вектор распределения вероятностей в момент времени t , если $p_i(t) \geq 0$ и $\sum p_i(t) = 1$. Зададим на множестве таких векторов отношение частичного порядка следующим образом: $\mathbf{p}^1(t) \succ \mathbf{p}^2(t)$, если и только если для каждого $i = 1, 2, \dots$ выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{j \geq i} p_j^1(t) \geq \sum_{j \geq i} p_j^2(t).$$

Пусть теперь $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — марковские цепи. Тогда будем говорить, что $X_1(t) \succ X_2(t)$, если для каждого $t \geq 0$ сохраняется соответствующее неравенство между векторами распределения вероятностей $\mathbf{p}^1(t) \succ \mathbf{p}^2(t)$ при одних и тех же начальных векторах вероятностей состояний.

В следующем разделе проводится сравнение двух марковских цепей в смысле их монотонности, затем рассмотрены классы процессов, для которых выполнены вышеупомянутые условия. Известный интерес с точки зрения приложений приобретают марковские цепи с интервальными интенсивностями (см., например, [4, 5]), так что далее рассмотрена в качестве примера система обслуживания $M_t/M_t/S/S$ с интервальными коэффициентами.

2 Монотонность

Пусть $X(t)$ и $X^*(t)$ — вообще говоря, неоднородные марковские цепи с непрерывным временем, с матрицами интенсивностей $Q(t)$ и $Q^*(t)$ соответственно. Обозначим через $A(t) = Q^T(t)$ и $A^*(t) = (Q^*)^T(t)$ транспонированные матрицы интенсивностей для этих цепей. Для описания рассматриваемых марковских цепей будем использовать прямые системы Колмогорова

$$\frac{dp}{dt} = A(t)p(t); \quad (1)$$

$$\frac{dp^*}{dt} = A^*(t)p^*(t), \quad (2)$$

¹Вологодский государственный университет, yacovi@mail.ru

²Вологодский государственный университет, kryukovaforstudents@gmail.com

³ООО Инновейтив пилл, oshushonok@yandex.ru

⁴Вологодский государственный университет; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук; Вологодский научный центр Российской академии наук; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, a_zeifman@mail.ru

предполагая выполненными стандартные условия на интенсивности как функции от времени (т.е. локальная интегрируемость на $[0, \infty)$ всех $a_{ij}(t)$ и ограниченность почти при всех $t \geq 0$ соответствующих операторных функций из l_1 в себя (см., например, [6])).

Потребуем дополнительно, чтобы основные матрицы этих систем были связаны между собой равенством

$$A^*(t) = A(t) + C(t)$$

и нулевой столбец матрицы $C(t)$ состоял только из нулей. Заметим также, что, как и в матрицах $A(t)$ и $A^*(t)$, в матрице $C(t)$ суммы элементов по столбцам равны нулю.

Выполним теперь следующее преобразование обеих систем, состоящее в исключении нулевого состояния. Для этого положим

$$p_0(t) = 1 - \sum_{i \geq 1} p_i(t).$$

Тогда системы (1) и (2) примут вид:

$$\frac{dz}{dt} = B(t)z(t) + f(t); \tag{3}$$

$$\frac{dz^*}{dt} = B^*(t)z^*(t) + f^*(t), \tag{4}$$

где вектор $f(t)$ и вектор $f^*(t)$ состоят из элементов нулевых столбцов матриц $A(t)$ и $A^*(t)$ соответственно, а значит, совпадают.

Теперь нетрудно видеть, что матрица $C^*(t)$ получается исключением из матрицы $C(t)$ нулевой строки и нулевого столбца:

$$B^*(t) = B(t) + C^*(t),$$

и равенство (4) можно записать в виде

$$\frac{dz^*}{dt} = B(t)z^*(t) + C^*(t)z^*(t) + f^*(t). \tag{5}$$

Рассматривая разность (5) и (3), получим следующее равенство:

$$\frac{d(z^*(t) - z(t))}{dt} = B(t)(z^*(t) - z(t)) + C^*(t)z^*(t). \tag{6}$$

Пусть положительные числа d_1, d_2, d_3, \dots являются элементами соответствующих строк верхней треугольной матрицы вида

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & \dots \\ 0 & d_2 & d_2 & \dots \\ 0 & 0 & d_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Соответственно, обратная матрица представляется таким образом:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & -\frac{1}{d_2} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{d_2} & -\frac{1}{d_3} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{d_3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь произведение DBD^{-1}

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} b_{i1} & \frac{d_1}{d_2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_{i2} - \sum_{i=1}^{\infty} b_{i1} \right) \\ \frac{d_2}{d_1} \sum_{i=2}^{\infty} b_{i1} & \sum_{i=2}^{\infty} b_{i2} - \sum_{i=2}^{\infty} b_{i1} \\ \frac{d_3}{d_1} \sum_{i=3}^{\infty} b_{i1} & \frac{d_3}{d_2} \left(\sum_{i=3}^{\infty} b_{i2} - \sum_{i=3}^{\infty} b_{i1} \right) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{d_1}{d_3} \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_{i3} - \sum_{i=1}^{\infty} b_{i2} \right) & \dots \\ \frac{d_2}{d_3} \left(\sum_{i=2}^{\infty} b_{i3} - \sum_{i=2}^{\infty} b_{i2} \right) & \dots \\ \sum_{i=3}^{\infty} b_{i3} - \sum_{i=3}^{\infty} b_{i2} & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

и потребуем, чтобы полученная матрица была существенно неотрицательной.

Умножим равенство (6) на матрицу D слева:

$$\frac{dD(z^*(t) - z(t))}{dt} = DB(z^*(t) - z(t)) + DC^*z^*(t),$$

преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \frac{dD(z^*(t) - z(t))}{dt} &= \\ &= DBD^{-1}D(z^*(t) - z(t)) + DC^*z^*(t). \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} D(z^*(t) - z(t)) &= U(t, 0)D(z^*(0) - z(0)) + \\ &+ \int_0^t U(t, s)DC^*(s)z^*(s) ds. \end{aligned}$$

Заметим, что $U(t, s) \geq 0$ при всех $t > s > 0$ в силу существенной неотрицательности матрицы DBD^{-1} .

Если для матриц $A(t)$ и $A^*(t)$ выполнены условия:

- для всех i имеет место равенство $a_{i0}(t) = a_{i0}^*(t)$;
- при $i > j$ ($j \neq 0$) выполняется неравенство $a_{ij}^*(t) > a_{ij}(t)$;
- при $i < j$, напротив, $a_{ij}^*(t) < a_{ij}(t)$,

то получаем $DC^*(s) \geq 0$, а значит, $Dz^*(t) \geq Dz(t)$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — марковские цепи и при каждом $t \geq 0$ выполнены условия: при $i > j$ ($j \neq 0$) $a_{ij}^*(t) > a_{ij}(t)$, при $i < j$ $a_{ij}^*(t) < a_{ij}(t)$ и, кроме того, $a_{i0}(t) = a_{i0}^*(t)$ при всех i (т. е. одинаковы интенсивности выходы из нулевого состояния). Тогда $X_2(t) \succ X_1(t)$.

Аналогично получается

Теорема 2. Пусть $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — марковские цепи, для интенсивностей которых при всех $t \geq 0$ справедливы неравенства: при $i > j$ $a_{ij}^*(t) < a_{ij}(t)$, а при $i < j$ $a_{ij}^*(t) > a_{ij}(t)$ и, кроме того, $a_{i0}(t) = a_{i0}^*(t)$ для всех i . Тогда $X_1(t) \succ X_2(t)$.

Отметим еще, что из неравенства $X_2(t) \succ X_1(t)$ вытекает аналогичное неравенство для математических ожиданий соответствующих цепей при одинаковых начальных распределениях вероятностей состояний.

3 Классы монотонных марковских цепей

Перечислим некоторые классы марковских цепей, для которых выполнены доказанные выше теоремы 1 и 2.

I. Неоднородный процесс рождения и гибели. В этом случае $a_{ij}(t) = 0$ для любого $t \geq 0$, если $|i - j| > 1$. Здесь $a_{i,i+1}(t) = \mu_{i+1}(t)$ и $a_{i+1,i}(t) = \lambda_i(t)$ — интенсивности рождения и гибели соответственно.

1. Если размерность $S = \infty$, т. е. матрица интенсивностей имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \mu_1 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_0 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \mu_2 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_1 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \mu_3 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_2 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

то имеем

$$C^*(t) = \begin{pmatrix} (\lambda_1 + \mu_1) - (\lambda_1^* + \mu_1^*) & & & & \\ \lambda_1^* - \lambda_1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ \mu_2^* - \mu_2 & 0 & \dots & & \\ (\lambda_2 + \mu_2) - (\lambda_2^* + \mu_2^*) & \mu_3^* - \mu_3 & \dots & & \\ \lambda_2^* - \lambda_2 & (\lambda_3 + \mu_3) - (\lambda_3^* + \mu_3^*) & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \end{pmatrix}$$

и

$$DC^*(t) = \begin{pmatrix} d_1(\mu_1 - \mu_1^*) & 0 & 0 & \dots \\ d_2(\lambda_1^* - \lambda_1) & d_2(\mu_2 - \mu_2^*) & 0 & \dots \\ 0 & d_3(\lambda_2^* - \lambda_2) & d_3(\mu_3 - \mu_3^*) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

т. е. получаем, что знак $DC^*(s)$ определяется именно описанными отношениями между интенсивностями матриц $A(t)$ и $A^*(t)$. Тем самым иллюстрируется выполнение теорем 1 и 2.

2. В случае конечного пространства ($S < \infty$) матрица интенсивностей имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \mu_1 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_0 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \mu_2 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_1 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \mu_3 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_2 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \mu_S & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -\mu_S & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

а для DC^* получаем выражение

$$\begin{pmatrix} d_1(\mu_1 - \mu_1^*) & 0 & 0 & \dots \\ d_2(\lambda_1^* - \lambda_1) & d_2(\mu_2 - \mu_2^*) & 0 & \dots \\ 0 & d_3(\lambda_2^* - \lambda_2) & d_3(\mu_3 - \mu_3^*) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & d_S(\mu_S - \mu_S^*) & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

II. Неоднородные цепи, в которых интенсивность «рождения» группы из k элементов не зависит от размера популяции в этот момент. При этом $a_{ij}(t) = 0$ для любого $t \geq 0$, если $i < j - 1$, и $a_{i+k,i}(t) = a_k(t)$ для $k \geq 1$ — интенсивность рождения группы из k элементов, а $a_{i,i+1}(t) = \mu_{i+1}(t)$ — интенсивность гибели одного элемента при условии, что их в популяции $i + 1$; кроме того, пусть для каждого i выполнено неравенство $a_i \geq a_{i+1}$.

3. Если размерность $S = \infty$, то

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{00}(t) & \mu_1(t) & 0 & 0 & \dots \\ a_1(t) & a_{11}(t) & \mu_2(t) & 0 & \dots \\ a_2(t) & a_1(t) & a_{22}(t) & \mu_3(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

В этом случае произведение DC^* можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} d_1(\mu_1 - \mu_1^*) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & d_2(\mu_2 - \mu_2^*) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & d_3(\mu_3 - \mu_3^*) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

или, что то же самое, через диагональные элементы:

$$\begin{pmatrix} d_1(a_{11}^* - a_{11}) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & d_2(a_{22}^* - a_{22}) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & d_3(a_{33}^* - a_{33}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

4. В случае конечного пространства ($S < \infty$)

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{00}(t) & \mu_1(t) & 0 & 0 & \dots \\ a_1(t) & a_{11}(t) & \mu_2(t) & 0 & \dots \\ a_2(t) & a_1(t) & a_{22}(t) & \mu_3(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{S-1}(t) & a_{S-2}(t) & a_{S-3}(t) & a_{S-4}(t) & \dots \\ a_S(t) & a_{S-1}(t) & a_{S-2}(t) & a_{S-3}(t) & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & a_{S-1,S-1}(t) & \mu_{S-1}(t) & \dots & \dots \\ \dots & a_1(t) & a_{SS}(t) & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

В этом случае произведение DC^* можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} d_1(\mu_1 - \mu_1^*) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & d_2(\mu_2 - \mu_2^*) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & d_3(\mu_3 - \mu_3^*) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & d_{S-1}(\mu_{S-1} - \mu_{S-1}^*) & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

III. Неоднородные цепи, в которых интенсивность гибели группы из k элементов не зависит от размера популяции в этот момент. При этом $a_{ij}(t) = 0$ для любого $t \geq 0$, если $i > j + 1$, и $a_{i,i+k}(t) = b_k(t)$ для $k \geq 1$ — интенсивность гибели группы из k элементов, а $a_{i+1,i}(t) = \lambda_i(t)$ — интенсивность рождения одного элемента при условии, что их в популяции $i + 1$; кроме того, пусть для каждого i выполнено неравенство $b_i \geq b_{i+1}$.

5. Если размерность $S = \infty$, то

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{00}(t) & b_1(t) & b_2(t) & b_3(t) & \dots \\ \lambda_1(t) & a_{11}(t) & b_1(t) & b_2(t) & \dots \\ 0 & \lambda_2(t) & a_{22}(t) & b_1(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Выполнив необходимые преобразования, получаем произведение DC^* :

$$\begin{pmatrix} d_1(b_1 - b_1^*) & d_1(b_2 - b_2^*) \\ d_2(\lambda_2^* - \lambda_2) & d_2((b_1 - b_1^*) + (b_2 - b_2^*)) \\ 0 & d_3(\lambda_3^* - \lambda_3) \\ \vdots & \vdots \\ d_1(b_3 - b_3^*) & \dots \\ d_2((b_2 - b_2^*) + (b_3 - b_3^*)) & \dots \\ d_3\left(\sum_{i=1}^3 b_i - \sum_{i=1}^3 b_i^*\right) & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

6. В случае конечного пространства ($S < \infty$)

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{00}(t) & b_1(t) & b_2(t) & b_3(t) & \dots & b_{S-1}(t) & b_S(t) \\ \lambda_1(t) & a_{11}(t) & b_1(t) & b_2(t) & \dots & b_{S-2}(t) & b_{S-1}(t) \\ 0 & \lambda_2(t) & a_{22}(t) & b_1(t) & \dots & b_{S-3}(t) & b_{S-2}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{S-1,S-1}(t) & b_1(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{S-1}(t) & a_{SS}(t) \end{pmatrix}.$$

Выполнив необходимые преобразования, получаем произведение DC^* :

$$\begin{pmatrix} d_1(b_1 - b_1^*) & d_1(b_2 - b_2^*) \\ d_2(\lambda_2^* - \lambda_2) & d_2((b_1 - b_1^*) + (b_2 - b_2^*)) \\ 0 & d_3(\lambda_3^* - \lambda_3) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ d_1(b_3 - b_3^*) & \dots & d_1(b_S - b_S^*) \\ d_2((b_2 - b_2^*) + (b_3 - b_3^*)) & \dots & d_2 \sum_{i=S-1}^S (b_i - b_i^*) \\ d_3 \sum_{i=1}^3 (b_i - b_i^*) & \dots & d_3 \sum_{i=S-2}^S (b_i - b_i^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_S \sum_{i=1}^S (b_i - b_i^*) \end{pmatrix}.$$

IV. Неоднородные цепи, в которых интенсивность переходов не зависит от размера популяции в этот момент, т.е. интенсивность рождения группы из k частиц $a_{i+k,i}(t) = a_k(t)$, а интенсивность гибели группы из k элементов $a_{i,i+k}(t) = b_k(t)$ для $k \geq 1$; кроме того, пусть для каждого i выполнены неравенства $a_i \geq a_{i+1}$ и $b_i \geq b_{i+1}$.

7. Если размерность $S = \infty$, то

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{00}(t) & b_1(t) & b_2(t) & b_3(t) & \dots \\ a_1(t) & a_{11}(t) & b_1(t) & b_2(t) & \dots \\ a_2(t) & a_1(t) & a_{22}(t) & b_1(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Матрица DC^* имеет вид:

$$\begin{pmatrix} d_1(a_{11}^* - a_{11}) & d_1(b_2 - b_2^*) & d_1(b_3 - b_3^*) & \dots \\ 0 & d_2(a_{22}^* - a_{22}) & d_2(b_2 - b_2^*) & \dots \\ 0 & 0 & d_3(a_{33}^* - a_{33}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Можно переписать эту матрицу следующим образом:

$$\begin{pmatrix} d_1(b_1 - b_1^*) & d_1(b_2 - b_2^*) & d_1(b_3 - b_3^*) & \dots \\ 0 & d_2 \sum_{i=1}^2 (b_i - b_i^*) & d_2(b_2 - b_2^*) & \dots \\ 0 & 0 & d_3 \sum_{i=1}^3 (b_i - b_i^*) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

8. В случае конечного пространства ($S < \infty$) матрица $A(t)$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{00}(t) & b_1(t) & b_2(t) & b_3(t) & \dots \\ a_1(t) & a_{11}(t) & b_1(t) & b_2(t) & \dots \\ a_2(t) & a_1(t) & a_{22}(t) & b_1(t) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{S-1}(t) & a_{S-2}(t) & a_{S-3}(t) & a_{S-4}(t) & \dots \\ a_S(t) & a_{S-1}(t) & a_{S-2}(t) & a_{S-3}(t) & \dots \\ \dots & b_{S-1}(t) & b_S(t) & & \\ \dots & b_{S-2}(t) & b_{S-1}(t) & & \\ \dots & b_{S-3}(t) & b_{S-2}(t) & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \dots & a_{S-1,S-1}(t) & b_1(t) & & \\ \dots & a_1(t) & a_{SS}(t) & & \end{pmatrix}.$$

Матрица DC^* имеет вид:

$$\begin{pmatrix} d_1(a_{11}^* - a_{11}) & d_1(b_2 - b_2^*) & d_1(b_3 - b_3^*) & \dots \\ 0 & d_2(a_{22}^* - a_{22}) & d_2(b_2 - b_2^*) & \dots \\ 0 & 0 & d_3(a_{33}^* - a_{33}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & d_1(b_S - b_S^*) & & \\ \dots & d_2(b_{S-1} - b_{S-1}^*) & & \\ \dots & d_3(b_{S-2} - b_{S-2}^*) & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \dots & d_S(a_{SS}^* - a_{SS}) & & \end{pmatrix}.$$

Как и в предыдущем случае, можем переписать последнюю матрицу:

$$\begin{pmatrix} d_1(b_1 - b_1^*) & d_1 \cdot (b_2 - b_2^*) & d_1(b_3 - b_3^*) & \dots \\ 0 & d_2 \sum_{i=1}^2 (b_i - b_i^*) & d_2(b_2 - b_2^*) & \dots \\ 0 & 0 & d_3 \sum_{i=1}^3 (b_i - b_i^*) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & d_1(b_S - b_S^*) & & \\ \dots & d_2(b_{S-1} - b_{S-1}^*) & & \\ \dots & d_3(b_{S-2} - b_{S-2}^*) & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \dots & d_S \sum_{i=1}^S (b_i - b_i^*) & & \end{pmatrix}.$$

Подробное описание классов I–IV и преобразований их матриц можно найти в [6].

4 Марковские цепи с интервальными интенсивностями

Полученные ранее результаты можно применить к исследованию как скорости сходимости, так и среднего числа требований в нестационарных марковских системах обслуживания.

В качестве примера такого исследования рассмотрим марковскую цепь $X(t)$, описывающую число требований в системе обслуживания $M_t/M_t/S/S$ (см., например, [7]). Это процесс рождения и гибели с конечным числом состояний и транспонированной матрицей интенсивностей вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\lambda(t) & \mu(t) & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \lambda(t) & -(\lambda(t) + \mu(t)) & 2\mu(t) & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda(t) & -(\lambda(t) + 2\mu(t)) & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \lambda(t) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 3\mu(t) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & -(\lambda(t) + 3\mu(t)) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \vdots & \dots & S\mu(t) & \dots & \dots \\ & \vdots & \dots & \lambda(t) - S\mu(t) & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Допустим, что интенсивность поступления запросов $\lambda(t)$ остается неизменной, а интенсивность обработки запросов $\mu(t)$ варьируется в интервале $[\underline{\mu}(t); \overline{\mu}(t)]$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Пусть рассматриваются два марковских процесса: $\{X_1(t), t \geq 0\}$ с интенсивностями $\lambda(t)$ и $\underline{\mu}(t)$ и $\{X_2(t), t \geq 0\}$ с интенсивностями $\lambda(t)$ и $\overline{\mu}(t)$. Тогда $X_1(t) \succ X_2(t)$. При этом в случае одинаковых начальных условий для среднего числа требований в системе справедливо неравенство $E(X_1(t)) \geq E(X_2(t))$.

Отметим, что если пространство состояний марковской цепи конечно, то можно оставлять неизменным не «нулевой», а последний столбец $A(t)$, т. е. фиксировать можно не интенсивность поступления требований, а интенсивность обслуживания. Если теперь $\mu(t)$ остается неизменной, а интенсивность поступления требований варьируется в интервале $[\underline{\lambda}(t); \overline{\lambda}(t)]$, то имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Пусть рассматриваются два марковских процесса: $\{X_1(t), t \geq 0\}$ с интенсивностями $\overline{\lambda}(t)$

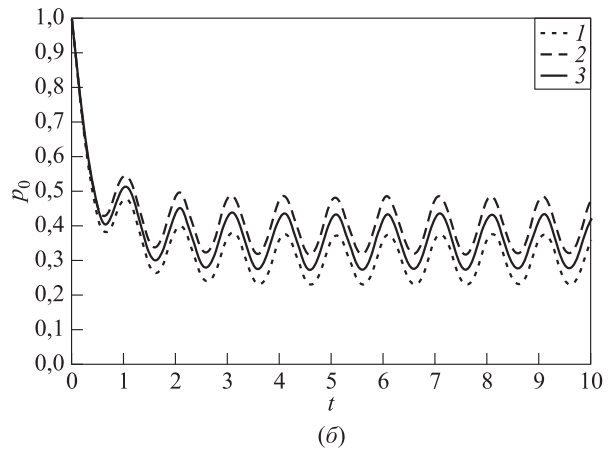
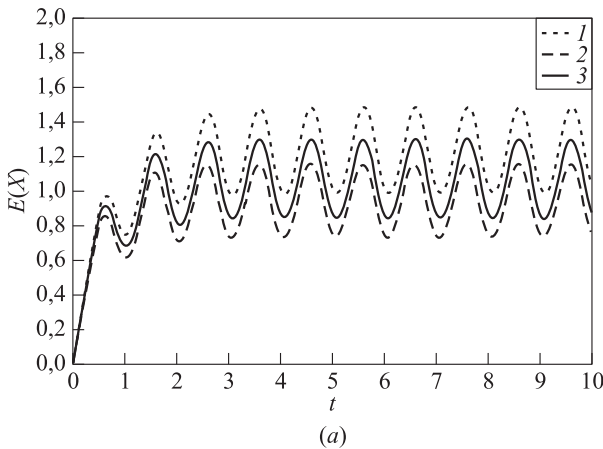


Рис. 1 Среднее число требований (а) и вероятность отсутствия требований (б) в системе обслуживания при $X(0) = 0$: 1 — $(\lambda, \overline{\mu})$; 2 — $(\lambda, \underline{\mu})$; 3 — (λ, μ)

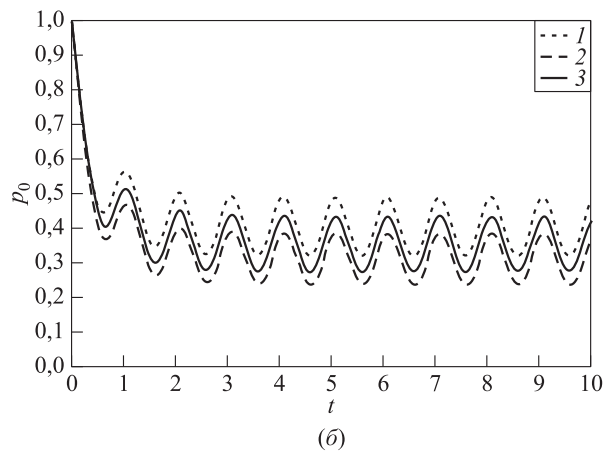
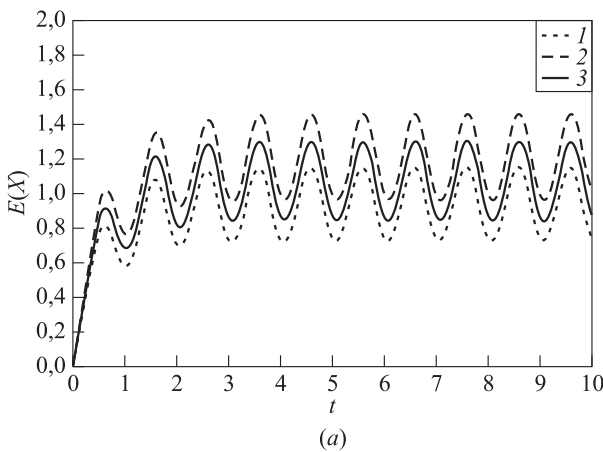


Рис. 2 Среднее число требований (а) и вероятность отсутствия требований (б) в системе обслуживания при $X(0) = 0$: 1 — $(\overline{\lambda}, \mu)$; 2 — $(\underline{\lambda}, \mu)$; 3 — (λ, μ)

$u \mu(t)$ и $\{X_2(t), t \geq 0\}$ с интенсивностями $\underline{\lambda}(t)$ и $\mu(t)$. Тогда $X_1(t) \succ X_2(t)$.

Рассмотрим теперь конкретные модели $M_t/M_t/S/S$. Положим $S = 100$.

На рис. 1 показаны среднее число требований в системе и вероятность пустой очереди в ситуации, когда $\lambda(t) = 1,5 + \sin(2\pi t)$, $\mu(t) = 1,5 + \cos(2\pi t)$. Соответственно, выбираем $\underline{\mu}(t) = 1,3 + \cos(2\pi t)$ и $\overline{\mu}(t) = 1,7 + \cos(2\pi t)$.

На рис. 2 показаны среднее число требований в системе и вероятность пустой очереди в ситуации, когда $\lambda(t) = 1,5 + \sin(2\pi t)$, $\mu(t) = 1,5 + \cos(2\pi t)$. Соответственно, выбираем $\underline{\lambda}(t) = 1,3 + \cos(2\pi t)$, $\overline{\lambda}(t) = 1,7 + \cos(2\pi t)$.

Литература

1. Keilson J., Kester A. Monotone matrices and monotone Markov processes // *Stoch. Proc. Appl.*, 1977. Vol. 5. Iss. 3. P. 231–241. doi: 10.1016/0304-4149(77)90033-3.
2. Van Doorn E. A. Preliminaries // *Stochastic monotonicity and queueing applications of birth-death processes*. — Lecture notes in statistics ser. — New York, NY, USA: Springer, 1981. Vol. 4. P. 1–10. doi: 10.1007/978-1-4612-5883-4_1.
3. Gaudio J., Amin S., Jaillet P. Exponential convergence rates for stochastically ordered Markov processes under perturbation // *Syst. Control Lett.*, 2019. Vol. 133. Art. 104515. 7 p. doi: 10.1016/j.sysconle.2019.104515.
4. Chitraganti S., Aberkane S., Aubrun C. Mean square stability of non-homogeneous Markov jump linear systems using interval analysis // *European Control Conference Proceedings*. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2013. P. 3724–3729. doi: 10.23919/ECC.2013.6669298.
5. Xie F., Wu B., Hu Y., et al. A generalized Markov chain model based on generalized interval probability // *Sci. China Technol. Sc.*, 2013. Vol. 56. P. 2132–2136. doi: 10.23919/ECC.2013.6669298.
6. Zeifman A., Satin Ya., Kryukova A., Razumchik R., Kiseleva K., Shilova G. On the three methods for bounding the rate of convergence for some continuous-time Markov chains // *Int. J. Appl. Math. Comp.*, 2020. Vol. 30. Iss. 2. P. 251–266. doi: 10.34768/amcs-2020-0020.
7. Van Doorn E. A., Zeifman A. I. On the speed of convergence to stationarity of the Erlang loss system // *Queueing Syst.*, 2009. Vol. 63. Iss. 1. P. 241–252. doi: 10.1007/s11134-009-9134-9.

Поступила в редакцию 30.03.22

ON MONOTONICITY OF SOME CLASSES OF MARKOV CHAINS

Y. A. Satin¹, A. L. Kryukova¹, V. S. Oshushkova², and A. I. Zeifman^{1,3,4,5}

¹Department of Applied Mathematics, Vologda State University, 15 Lenin Str., Vologda 160000, Russian Federation

²Innovative People Ltd., 26–28 Leninskaya Sloboda Str., Moscow 115280, Russian Federation

³Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44–2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation

⁴Vologda Research Center of the Russian Academy of Sciences, 56A Gorky Str., Vologda 160014, Russian Federation

⁵Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

Abstract: The authors define a relation of partial order for Markov chains and study conditions of monotonicity for some classes of continuous-time Markov processes. The corresponding theorems of monotonicity are formulated. The authors describe in detail the classes of processes which satisfy conditions of monotonicity. There are a lot of applications of Markov chains with interval intensities that is why the authors consider it. The monotonicity conditions obtained in this paper make it possible to advance in some way in the study of Markov processes with interval intensities. Namely, in the present paper, the authors consider as an example a queueing system $M_t/M_t/S/S$ with interval coefficients. The results obtained are confirmed by a computational experiment and illustrated by the corresponding graphs of the limiting characteristics.

Keywords: monotonicity of Markov processes; nonstationary queueing system; Markov chains with interval intensities; limit characteristics

DOI: 10.14357/19922264220204

References

1. Keilson, J., and A. Kester. 1977. Monotone matrices and monotone Markov processes. *Stoch. Proc. Appl.* 5(3):231–241. doi: 10.1016/0304-4149(77)90033-3.
2. Van Doorn, E. A. 1981. Preliminaries. *Stochastic monotonicity and queueing applications of birth-death processes*. New York, NY: Springer. 1–10. doi: 10.1007/978-1-4612-5883-4_1.
3. Gaudio, J., S. Amin, and P. Jaillet. 2019. Exponential convergence rates for stochastically ordered Markov processes under perturbation. *Syst. Control Lett.* 133:104515. 7 p. doi: 10.1016/j.sysconle.2019.104515.

4. Chitraganti, S., S. Aberkane, and C. Aubrun. 2013. Mean square stability of non-homogeneous Markov jump linear systems using interval analysis. *European Control Conference Proceedings*. 3724–3729. doi: 10.23919/ECC.2013.6669298.
5. Xie, F., B. Wu, Y. Hu, *et al.* 2013. A generalized Markov chain model based on generalized interval probability. *Sci. China Technol. Sc.* 56:2132–2136. doi: 10.1007/s11431-013-5285-3.
6. Zeifman, A., Ya. Satin, A. Kryukova, R. Razumchik, K. Kiseleva, and G. Shilova. 2020. On the three methods for bounding the rate of convergence for some continuous-time Markov chains. *Int. J. Appl. Math. Comp. Sci.* 30(2):251–266. doi: 10.34768/amcs-2020-0020.
7. Van Doorn, E. A., and A. I. Zeifman. 2009. On the speed of convergence to stationarity of the Erlang loss system. *Queueing Syst.* 63(1):241–252. doi: 10.1007/s11134-009-9134-9.

Received March 30, 2022

Contributors

Satin Yacov A. (b. 1978) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Applied Mathematics, Vologda State University, 15 Lenin Str., Vologda 160000, Russian Federation; yacovi@mail.ru

Kryukova Anastasia L. (b. 1980) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Applied Mathematics, Vologda State University, 15 Lenin Str., Vologda 160000, Russian Federation; kryukovaforstudents@gmail.com

Oshushkova Viktorya S. (b. 1996) — programmer, Innovative People Ltd., 26-28 Leninskaya Sloboda Str., Moscow 115280, Russian Federation; oshushonok@yandex.ru

Zeifman Alexander I. (b. 1954) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, head of department, Vologda State University, 15 Lenin Str., Vologda 160000, Russian Federation; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; principal scientist, Vologda Research Center of the Russian Academy of Sciences, 56A Gorky Str., Vologda 160014, Russian Federation; leading scientist, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation a_zeifman@mail.ru

О ПРИМЕНЕНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПОДХОДА К АНАЛИЗУ ПЛОХО ФОРМАЛИЗУЕМЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АЛГОРИТМОВ ВИРТУАЛЬНОГО СКРИНИНГА КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОРГАНИЧЕСКИХ МОЛЕКУЛ II: СОПОСТАВЛЕНИЕ ФОРМАЛИЗМА С КОНСТРУКТАМИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ АПРОБАЦИЯ ПРЕДЛОЖЕННЫХ АЛГОРИТМОВ*

И. Ю. Торшин¹

Аннотация: Показаны соответствия между описаниями молекул в рамках теории хемографов, внутренними координатами молекул и ψ -функциями. Полученные результаты сопоставимы: (1) с решениями одноэлектронного уравнения Шредингера (УШ) на фрагментах молекул с учетом перекрытия фрагментов; (2) с аддитивными схемами расчета электронной плотности в теории функционала электронной плотности; (3) с учетом интегралов перекрытия в теории молекулярных орбиталей (МО). Апробация алгоритмов на выборке из 134 тыс. органических молекул показала ранговые корреляции порядка 0,75 (95%, достоверный интервал 0,67–0,85) между результатами расчетов по предлагаемым алгоритмам и значениями исследованных квантово-механических (КМ) показателей молекул. Скорость вычислений по предлагаемым алгоритмам на несколько порядков превышает скорость КМ вычислений, что важно для проведения скринингов молекул.

Ключевые слова: алгебраический подход; хемоинформатика; размеченные графы; комбинаторный анализ разрешимости

DOI: 10.14357/19922264220205

1 Введение

В первой части статьи [1] было показано, что при определении алфавита меток Y для произвольного хемографа $X \in \mathbf{X}$ может быть вычислено множество $\tilde{Y}(X) \subset \tilde{Y}$ всех χ -цепей в X , включающее все множества \tilde{Y}^m χ -цепей длины m и множество $\hat{Y}(X) \subset \hat{Y}$ всех χ -узлов X . На основании множеств $\tilde{Y}(X)$ и $\hat{Y}(X)$ строятся соответствующие χ -инварианты и их кортежи посредством *оператора вхождения множества подграфов* $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\} \subset \Gamma$ в хемограф:

$$\hat{\beta}[X]\pi = (|\pi \cap \Pi(X)| > 0).$$

Обозначая через

$$\hat{\beta}\pi = \{\hat{\beta}\pi_1, \hat{\beta}\pi_2, \dots, \hat{\beta}\pi_n\}$$

результат последовательного применения $\hat{\beta}$ к π , а через $\hat{i}[i]\pi(X)$ — i -й элемент кортеж-инварианта $\hat{i}\pi$, получаем условие *хемометрического анализа*:

$$\arg \min_{\{\omega_k\}} \sum_{m=1}^{|\mathbf{X}|} \left| S \left(\sum_{k=1}^n \omega_k s \left(\hat{i}[k]\hat{\beta}[X_m]\pi \right) \right) - T_m \right|, \quad (1)$$

где T_m — значения прогнозируемой величины для молекул, соответствующих хемографам в обучающей выборке \mathbf{X} ; $S, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ — «сглаживающие» функции. При $S \equiv 1$ и $s \equiv 1$ условие (1) соответствует определению взвешенной метрики Хэмминга

$$\rho_q(X_1, X_2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \omega_k \hat{i}[k]\hat{\beta}[X_1]\pi \otimes \hat{i}[k]\hat{\beta}[X_2]\pi. \quad (2)$$

В выражениях (1) и (2) настраиваемыми параметрами являются веса ω_k , а множество подграфов π и функции S и s в (1) задаются исследователем. Множество π определяется на основании *операторов построения прообраза* χ -цепи α , $\hat{\mu}_c^{-1}\alpha$, и *построения прообраза* χ -узла κ , $\hat{\mu}_\kappa^{-1}\kappa$, так что для $\alpha \subset \tilde{Y}$ определено $\hat{\mu}_c^{-1}\alpha = \{\hat{\mu}_c^{-1}\alpha, \alpha \in \alpha\}$, а для $\kappa \subset \hat{Y}$ — $\hat{\mu}_\kappa^{-1}\kappa = \{\hat{\mu}_\kappa^{-1}\kappa, \kappa \in \kappa\}$. Тогда π опреде-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 19-07-00356, 18-07-00944 и 20-07-00537).

¹ Федеральний исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, tiy135@yahoo.com

ляется как $\hat{\mu}_c^1 \alpha, \hat{\mu}_\kappa^1 \kappa, \hat{\mu}_c^1 \alpha \cup \hat{\mu}_\kappa^1 \kappa$ с использованием множеств χ -цепей фиксированной длины $m(\tilde{Y}^m)$ и т. д.

Далее рассмотрены соответствия между результатами применения топологического анализа к хемографам и некоторыми математическими конструктами квантовой механики.

2 Основные постулаты квантовой механики

Аксиоматику, лежащую в основе математических конструкций КМ, удобно представлять в виде четырех постулатов [2], анализ которых позволяет рассмотреть соответствия между квантовой механикой и предлагаемым формализмом.

Постулат 1. Состояние квантовой системы из N микрочастиц (электронов и ядер) полностью определяется волновой функцией от радиус-векторов частиц и времени (пси-функцией $\psi(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^{3N+1} \rightarrow \mathbb{R}$), $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N}$ — вектор координат в конфигурационном пространстве, t — время. Квадрат ψ -функции отражает плотность вероятности состояния, заданного координатами частиц. В стационарном состоянии ψ -функция определяется как $\psi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Постулат 2. Наблюдаемая физическая величина A представима в виде линейного оператора \hat{A} , так что среднее значение A вычисляется как

$$\bar{A} = \int_{\mathbb{R}^{3N}} \psi^* \hat{A} \psi d\mathbf{x},$$

где ψ^* комплексно сопряжена ψ .

Постулат 3. Изменение волновой функции во времени определяется УШ. Временная форма УШ для гамильтонана \hat{H} записывается как

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \hat{H} = \hat{T} + V.$$

Здесь $\hat{T} = \sum \hat{T}_i$ — терм кинетической энергии, где

$$\hat{T}_i = \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_i, \quad \Delta_i = \frac{\partial}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial y_i^2} + \frac{\partial}{\partial z_i^2}$$

(m_i — масса i -й частицы); $V(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^{3N+1} \rightarrow \mathbb{R}$ — терм потенциальной энергии, где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N}$ — конкатенация векторов координат ядер $\mathbf{R} = (\vec{\mathbf{R}}_\alpha)$ и электронов $\mathbf{r} = (\vec{\mathbf{r}}_i)$, $\vec{\mathbf{r}}_i = (x_i, y_i, z_i)$.

Постулат 4. Электроны квантовой системы неразличимы.

В гамильтоновых системах выполнено условие сохранения энергии, так что $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$

и $\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x})\chi(t)$, что соответствует стационарной форме УШ:

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = E\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}),$$

где E — полная энергия системы. После введения так называемого адиабатического приближения (Борна—Оппенгеймера: кинетическая энергия ядер пренебрежимо мала), гамильтониан УШ записывается как «электронный гамильтониан»:

$$\hat{H}_e = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_i(\mathbf{r}) + V_{ee}(\mathbf{r}) + V_{en}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) + V_{nn}(\mathbf{R}), \quad (3)$$

где i -суммирование проводится по электронам (m_e); $V_{ee}(\mathbf{r}) = (1/2) \sum_i \sum_{j \neq i} 1/d_{ij}$, $d_{ij} = \|\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_j\|$ — терм внутренней энергии межэлектронного взаимодействия; $V_{en} = -\sum_{i,\alpha} Z_\alpha / \mathbf{R}_{\alpha i}$, $\mathbf{R}_{\alpha i} = \|\vec{\mathbf{R}}_\alpha - \vec{\mathbf{r}}_i\|$ — терм электронно-ядерного, а $V_{nn} = \sum_{\alpha,\beta} Z_\alpha Z_\beta / \mathbf{R}_{\alpha\beta}$, $\mathbf{R}_{\alpha\beta} = \|\vec{\mathbf{R}}_\alpha - \vec{\mathbf{R}}_\beta\|$ — терм межъядерного взаимодействия (i, j -суммирование проводится по электронам, а α, β -суммирование — по ядрам). Вычисление КМ-показателей молекул, рассматриваемых в настоящей статье, основано на решениях уравнения (3).

После нумерации частиц в молекулярной системе $C = (\mathbf{r}_j) \subset \mathbb{R}^3$, $j = 1, \dots, N$, оператор $\hat{P} : 2^{\mathbb{R}^3} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$ определяется как конкатенация $\hat{P}C = (\vec{\mathbf{r}}_1, \dots, \vec{\mathbf{r}}_j, \dots, \vec{\mathbf{r}}_N)$, так что $\psi(\hat{P}C)$ зависит от декартовых координат. По построению, для \hat{P} всегда имеется обратный оператор \hat{P}^{-1} , $C \equiv \hat{P}^{-1}\hat{P}C$. Декартовы координаты $C = (\mathbf{r}_j)$ позволяют найти внутренние координаты $\mathbf{M}(C) = (d_{ij}(C))$ посредством такого $\hat{E} : 2^{\mathbb{R}^3} \rightarrow \mathbb{R}^{C_N^2}$, $\mathbf{M}(C) = \hat{E}C$, что $d_{ij} = \|\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_j\|$. Существует \hat{E}^{-1} , так что $\mathbf{M}(C)$ позволяет найти C с точностью до аффинного преобразования. Матрица инцидентности хемографа есть факторизация $\mathbf{M}(C)$ на основании правил теории химической связи [2, 3].

3 Интерпретация с точки зрения теории химической связи

Совокупность χ -инвариантов, в которые вовлечена данная вершина χ -графа, соответствующая одному из атомов молекулы, описывает некоторый локальный контекст данного атома в молекуле. В теории химической связи (композит классических и КМ-представлений) геометрия локального окружения атома описывается на основании гибридных состояний атомов, которые могут быть

использованы для порождения алфавита Y и словарей \tilde{Y} и \hat{Y} [3]. Присутствие в (1) весов ω_k соответствует суммированию свойства молекулы (k -я переменная) по χ -фрагментам (каждый из которых характеризуется определенным вкладом в это свойство), так что (1) подразумевает две гипотезы: (1) аддитивность и (2) фиксированность.

Определение 1. Гипотеза аддитивности: свойство всей молекулы представимо как сумма вкладов χ -инвариантов, каждый из которых соответствует определенному χ -фрагменту молекулы.

Определение 2. Гипотеза фиксированности вклада: каждый χ -инвариант вносит одинаковый вклад в исследуемое свойство во все молекулы, содержащие соответствующие χ -фрагменты.

4 Интерпретация в терминах одноэлектронной модели

Адиабатическое приближение (3) подразумевает, что терм $V_{nn}(\mathbf{R})$ фиксирован для заданной конфигурации ядер \mathbf{R} , так что \mathbf{R} отражает параметры стационарного УШ. Одноэлектронное приближение упрощает (3) за счет пересмотра V_{ee} , которое аппроксимируется одноэлектронными операторами. В рамках одноэлектронного (Хартри–Фока) приближения $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ ищется в виде

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \prod_i \psi_1(\vec{r}_i, \mathbf{R}),$$

где каждая из $\psi_1(\vec{r}_i, \mathbf{R})$ — решение задачи движения одного электрона в поле всех ядер, так называемого одноэлектронного УШ:

$$\left. \begin{aligned} \hat{h}_i \psi_{1,k}(\vec{r}_i, \mathbf{R}) &= e_{ik} \psi_{1,k}(\vec{r}_i, \mathbf{R}); \\ \hat{h}_i &= -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_i - \sum_{\alpha} \frac{Z_{\alpha}}{R_{\alpha i}} + V_i(i); \\ \hat{H}_e &= \sum_i \hat{h}_i, \quad E_k = \sum_i e_{ik}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $V_i(i) = (1/2) \sum_{i \neq j} 1/d_{ij}$ — терм потенциальной энергии, а $\psi_{1,k}$ ортонормированы [2]. В соответствии с постулатом 4 $\psi_{1,k}$ представляются в виде определителя, составленного из одноэлектронных линейно независимых функций.

Таким образом, в одноэлектронном приближении энергия системы представляется как сумма собственных значений фокианов \hat{h}_i . Хотя в \hat{h}_i входят координаты всех ядер \mathbf{R} , с увеличением размера молекулы на движение электрона будут влиять только ближайшие ядра, что делает адекватным представление молекулы в виде набора локальных

структурных фрагментов. Последнее соответствует суммированию свойств молекулы по χ -фрагментам в задаче (1), т. е. χ -фрагментам в базе $\mathbf{U}(\mathbf{X})$ сопоставлен определенный набор одноэлектронных волновых функций $\psi_{1,k}$, что отвечает гипотезе аддитивности. Выражение (1) усиливает ограничения на $\psi_{1,k}$: принимается, что любая $\psi_{1,k}$ одинакова в контексте структуры различных молекул.

5 Интерпретация в теории молекулярных орбиталей

В теории МО рассматриваются только орбитали валентных электронов молекулы. Молекулярные орбитали представляются линейными комбинациями (ЛК) атомных орбиталей (АО), что соответствует аппроксимации решения (4) водородоподобными ψ -функциями при больших (ангстремы) и малых (доли ангстрема) расстояниях [2]. Пусть произвольная МО Ψ представима как ЛК $\Psi = \sum_i c_i \psi_i$. Подставляя эту ЛК в выражение в постулате 2 и вводя условие нормировки Ψ для попарно неортогональных ψ_i , получаем

$$\bar{A} = \frac{\sum_i \sum_j c_i c_j A_{ij}}{\sum_i \sum_j c_i c_j S_{ij}},$$

где $A_{ij} = \int_{R^{3N}} \psi_i \hat{A} \psi_j d\mathbf{x}$ и $S_{ij} = \int_{R^{3N}} \psi_i \psi_j d\mathbf{x}$ — так называемые интегралы перекрытия, характеризующие межэлектронные взаимодействия ψ_i . Если каждая из функций ψ_i в ЛК представляет ту или иную АО i -го атома молекулы, то матрица инцидентности ($m_{ij}(X)$) может рассматриваться как факторизация (S_{ij}), где большим S_{ij} соответствуют большие веса ребер m_{ij} .

Пусть имеется достаточно большое множество хемографов \mathbf{X} . Рассмотрим два фрагмента одной молекулы из \mathbf{X} , каждый из которых соответствует определенному χ -инварианту. Например, пусть $\alpha, \beta \in \tilde{Y}$, так что определены $\hat{\mu}_c^{-1} \alpha$ и $\hat{\mu}_c^{-1} \beta$ (случай с χ -узлами рассматривается аналогично). Определим три подмножества \mathbf{X} :

$$\begin{aligned} AB &= \{X \in \mathbf{X} | \hat{\mu}_c^{-1} \alpha \in X, \hat{\mu}_c^{-1} \beta \in X\}; \\ A &= \{X \in \mathbf{X} | \hat{\mu}_c^{-1} \alpha \in X\} \setminus AB; \\ B &= \{X \in \mathbf{X} | \hat{\mu}_c^{-1} \beta \in X\} \setminus AB. \end{aligned}$$

Для определенности пусть $|\hat{\mu}_c^{-1} \alpha| = 1$ и $|\hat{\mu}_c^{-1} \beta| = 1$ (случай с $|\hat{\mu}_c^{-1} \alpha| > 1$ и $|\hat{\mu}_c^{-1} \beta| > 1$ принципиально не отличаются).

В соответствии с определением 2 будем считать, что все χ -фрагменты $\hat{\mu}_c^{-1} \alpha$ описываются одной и той же ψ -функцией ψ_A , а все χ -фрагменты

$\hat{\mu}_c^{-1}\beta - \psi_B$. Взаимодействие между ψ_A и ψ_B зависит от расстояния d_{AB} между ними в каждой молекуле из AB : чем дальше расположены χ -фрагменты, тем меньше S_{AB} и тем более адекватно описание ψ_{AB} как ЛК ψ_A и ψ_B . Технически d_{AB} между χ -фрагментами в составе одной молекулы может оцениваться различными способами (среднее/минимальное расстояние между атомами, длина кратчайшего пути и т. д.). С точки зрения теории МО подтверждением физического смысла гипотезы аддитивности является следующая теорема.

Теорема 1 (об аддитивной коррекции взаимодействий). Пусть оценка взаимодействия между χ -фрагментами в произвольном хемографе монотонно убывает при увеличении расстояния между χ -фрагментами и не зависит ни от типов χ -фрагментов, ни от расположения χ -фрагментов в контексте хемографа, ни от выбранного способа измерения расстояния между фрагментами. Тогда вклады любых двух χ -фрагментов можно считать независимыми, а поправку на взаимодействие между парой χ -фрагментов учитывать как вклад третьего χ -фрагмента, образующего с парой χ -фрагментов связный подграф.

Доказательство. Вне зависимости от процедуры порождения χ -фрагментов и способа измерения расстояния между χ -фрагментами, если для двух фрагментов молекулы не имеется третьего фрагмента, соединяющего их, то вклады обоих χ -фрагментов в общее свойство молекулы можно считать независимыми и перекрыванием таких удаленных орбиталей можно пренебречь ($S_{AB} = 0$). Пусть два χ -фрагмента $\hat{\mu}_c^{-1}\alpha$ и $\hat{\mu}_c^{-1}\beta$, $|\hat{\mu}_c^{-1}\alpha| = 1$ и $|\hat{\mu}_c^{-1}\beta| = 1$, вносят вклады ω_α и ω_β в свойство произвольной молекулы, а $\omega_{\alpha\beta}$ — поправка на взаимодействие $\hat{\mu}_c^{-1}\alpha$ и $\hat{\mu}_c^{-1}\beta$ (случаю $|\hat{\mu}_c^{-1}\alpha| > 1$ соответствует $\omega_\alpha|\hat{\mu}_c^{-1}\alpha|$).

Пусть поправка на взаимодействие α и β — монотонно убывающая f^- , $\omega_{\alpha\beta} = f^-(d_{\alpha\beta})$, так что вклад α и β равен $\omega_\alpha + \omega_\beta + f^-(d_{\alpha\beta})$. Для m χ -фрагментов хемографа X вычислим расстояния $\{d_{ij}\}$ от i -го χ -фрагмента μ_i до всех остальных χ -фрагментов μ_j , $i \neq j$, так что для фрагментов с одинаковыми распределениями $\{d_{ij}\}$ суммарная поправка равна $s_i = \sum_{j \neq i} f^-(d_{ij})$.

Распределения расстояний $\{d_{ij}\}$ зависят от центральности расположения фрагмента. Центром графа будем считать i -е вершины с минимальными значениями «центральности» $c_i = \sum_{j=1, m} d_{ij}$. Для фрагментов с одинаковой центральностью c_i поправки s_i равны. Для двух фрагментов с разной центральностью пусть i_1 — более периферийный, а i_2 — более центральный, так что $c_{i_1} \geq c_{i_2}$ и $s_{i_1} \leq s_{i_2}$. Если имеется третий фрагмент i_3 из $\Pi(X)$, соединяющий χ -фрагменты μ_{i_1} и μ_{i_2} , то $c_{i_1} \geq c_{i_3} \geq c_{i_2}$ и $s_{i_1} \leq s_{i_3} \leq s_{i_2}$, так что вклад всех

трех фрагментов равен $\omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \omega_{i_3} + f^-(d_{i_1 i_2}) + f^-(d_{i_1 i_3}) + f^-(d_{i_2 i_3})$. Однако по условию теоремы взаимодействие между χ -фрагментами не зависит от расположения χ -фрагментов в контексте хемографа, поэтому $s_{i_1} = s_{i_3} = s_{i_2} = s$. Тогда сумма поправок $\omega_{i_1 i_2}$ по всем парам χ -фрагментов μ_{i_1} и μ_{i_2} равна $\sum_{i=1, m} s_i$, т. е. является произведением числа χ -фрагментов хемографа m на константу s . Соответственно, вклад ω_{i_3} третьего фрагмента μ_{i_3} можно рассматривать как поправку на взаимодействие между двумя фрагментами μ_{i_1} и μ_{i_2} . Теорема доказана.

Следствие 1. Условию теоремы соответствуют наборы χ -фрагментов, полученные полным перебором χ -подграфов (χ -цепей или χ -узлов).

Следствие 2. Вычисление свойства всей молекулы осуществимо суммированием по χ -фрагментам.

Следствие 3. При учете взаимодействий χ -фрагментов по условию теоремы в вычисляемое свойство молекулы входит терм ms , равный произведению числа χ -фрагментов хемографа m на константу s .

Следствие 4. При выполнении условия теоремы свойство W молекулы X рассчитывается по аддитивной схеме

$$W = \sum_{i=1}^m \omega_i + ms,$$

т. е. суммированием по m χ -фрагментам, $\mu_i \in \Pi(X)$. Из этого следует, что соответствующие ψ -функции ψ_i взаимно ортогональны (т. е. интегралы их перекрывания равны нулю).

Теорема 1 показывает, что при определенных условиях, накладываемых на процедуры построения множеств хемоинвариантов $\tilde{Y}(X)$ и $\hat{Y}(X)$, даже простейшая аддитивная схема расчета свойств молекулы, соответствующая постановке задачи хемореактивного анализа в простейшей форме (1), позволяет учитывать взаимодействия между χ -фрагментами, т. е. интегралы перекрывания S_{AB} . Более того, добавление в множества $\tilde{Y}(X)/\hat{Y}(X)$ χ -инвариантов, соответствующих «третьим» χ -фрагментам (т. е. тем, что образуют связный подграф для произвольной пары χ -фрагментов), позволяет предполагать ортогональность ψ -функций, соответствующих χ -инвариантам в таких $\tilde{Y}(X)/\hat{Y}(X)$ (следствие 4).

Экспериментальная верификация всего комплекса гипотез в условии теоремы 1 заключается: (1) в оценке корреляции между значениями КМ параметров молекул и результатами расчетов по предлагаемой в следствии 4 аддитивной схеме; (2) в оценке расстояний между соответствующими χ -фрагментами в множестве AB на основе эмпирической функции распределения (э. ф. р.) расстоя-

яний $\{d_{AB}\}$ между χ -фрагментами $\hat{\mu}_c^{-1}\alpha$ и $\hat{\mu}_c^{-1}\beta$ с последующим анализом ρ -спектров и других свойств возникающих при этом ρ_L -конфигураций [1].

В целом, с точки зрения теории МО подразумевается делокализация электронов вокруг χ -фрагментов, соответствующих χ -цепям/ χ -узлам. Обобществление электрона в случае χ -узла вполне представимо, так как последний представляет ближайшее ковалентное окружение произвольного атома.

6 Интерпретация с точки зрения теории функционала электронной плотности

Центральная идея теории функционала электронной плотности (density functional theory, DFT) заключается в переформулировке постулатов 1–4 в формах, включающих электронную плотность системы

$$\rho(\vec{r}) = N \int_{\mathbb{R}^{3N}} |\Psi(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

Последняя имеет четкий физический смысл и может быть экспериментально оценена. Вводится такое преобразование F , что

$$\Psi(\mathbf{x}) = F(\rho(\vec{r})); \quad \bar{A} = \langle F(\rho(\vec{r})) | \hat{A} | F(\rho(\vec{r})) \rangle,$$

а полная энергия системы в приближении Борна–Оппенгеймера равна

$$E(\rho(\vec{r})) = F_{\text{HK}}(\rho(\vec{r})) + V_{\text{en}}(F(\rho(\vec{r}))); \\ F_{\text{HK}}(\rho(\vec{r})) = \hat{T}F(\rho(\vec{r})) + V_{\text{ee}}(F(\rho(\vec{r}))).$$

Процедуры вычисления $\rho(\vec{r})$ естественным образом допускают аддитивные модели. Соответственно, представление молекулы как набора χ -фрагментов — это способ аддитивного, пофрагментного описания карты электронной плотности молекулы.

7 О применении алгоритмов для скрининга молекул

Очевидно, что точность вычислений по аддитивной схеме (1), вследствие весьма сильных предположений об аддитивности и постоянстве вклада χ -инвариантов (определения 1 и 2), вряд ли когда-нибудь приблизится к результатам, получаемым в рамках разработанных ранее вычислитель-

ных схем КМ. Тем не менее ряд особенностей корреляционного облака точек

$$O(\mathbf{X}) = \{(W_m(X), T_m(X)), \\ X \in \mathbf{X}, m = 1, \dots, |\mathbf{X}|\},$$

где $W_m(X)$ вычисляется для всех $X \in \mathbf{X}$ (например, в соответствии с решением задачи (1) или с использованием более сложных схем алгебраического подхода), позволяет оценить практическую применимость получаемых результатов.

Во-первых, кросс-валидационные оценки коэффициента корреляции и других функционалов оценки адекватности моделей на $O(\mathbf{X})$ (стандартное отклонение, коэффициент детерминации, комбинаторные и прочие функционалы робастного линейного сглаживания, различные статистические функционалы и др.) позволяют разносторонне оценить качество оценочных расчетов величин T посредством модели W . Во-вторых, может быть оценена релевантность характеристик облака точек $O(\mathbf{X})$ для решения соответствующих задач классификации и высокопроизводительного скрининга молекул *in silico*.

Следующая теорема может быть полезна для планирования вычислительных экспериментов и анализа полученных данных.

Теорема 2 (о скрининге). *Точность классификации хемографов из \mathbf{X} по интересующим процентилям значений пропорциональна степени покрытия корреляционного облака точек $O(\mathbf{X}) = \{(W_m, T_m)\}$ ячейками главной диагонали координатной сетки, образованной соответствующими процентилями значений T и W .*

Доказательство проводится посредством рассмотрения в решетке $L(T(\mathbf{X}))$ цепей $A(\mathbf{X})$ и $A'(\mathbf{X})$, соответствующих величине T и модели W . Рассматриваются э. ф. р. $\text{cdf}(A(\mathbf{X}))$ и $\text{cdf}(A'(\mathbf{X}))$, взаимно однозначное соответствие между процентилями $\Pi(p, \text{cdf}(A(\mathbf{X})))$ и $\Pi(p, \text{cdf}(A'(\mathbf{X})))$, так что на основе $O(\mathbf{X})$ вычисляются проценты ошибок классификации 1-го и 2-го типа.

Следствие 1. Величина коэффициента корреляции $r(O(\mathbf{X}))$ — непрямая характеристика аккуратности классификации по процентилям значений.

Следствие 2. Разность коэффициентов корреляции на обучении и контроле косвенно характеризует переобученность алгоритма классификации.

8 Результаты экспериментальной апробации

Тестирование моделей порождения информативных числовых признаков хемографов, основан-

Результаты кросс-валидационного тестирования разработанных скрининговых алгоритмов для 15 КМ показателей молекул; $r(c)$ — среднее значение рангового коэффициента корреляции на контроле, $SD(c)$ — стандартное отклонение в прогнозировании ранга КМ-показателя на контроле

Константа	КМ-показатель	Единицы	r	$r(c)$	$SD(c)$
A	Вращательная константа A	ГГц	0,77	0,73	0,18
B	Вращательная константа B	ГГц	0,74	0,73	0,19
C	Вращательная константа C	ГГц	0,72	0,71	0,20
M	Дипольный момент	Дебай	0,72	0,72	0,20
α	Изотропная поляризуемость	Бор ³	0,69	0,67	0,21
НОМО	Энергия высшей занятой МО	Хартри	0,82	0,79	0,17
LUMO	Энергия низшей вакантной МО	Хартри	0,85	0,83	0,15
Gap	Зазор LUMO-НОМО	Хартри	0,86	0,83	0,15
r_2	Электронный пространственный экстенд	Бор ²	0,67	0,67	0,21
ZPVE	Вибрационная E нулевого уровня	Хартри	0,85	0,85	0,15
U_0	Внутренняя энергия (0 К)	Хартри	0,69	0,67	0,21
U	Внутренняя энергия (298,15 К)	Хартри	0,69	0,67	0,21
H	Энтальпия (298,15 К)	Хартри	0,69	0,67	0,21
G	Свободная энергия (298,15 К)	Хартри	0,69	0,67	0,21
C_v	Теплоемкость (298,15 К)	кал/(М·К)	0,75	0,75	0,19

ных на решении задач типа (1) и соответствующих алгоритмов прогнозирования числовых переменных [4], было проведено на выборке из 134 000 стабильных органических молекул с максимум девятью тяжелыми атомами С, О, N и F (далее — 134К) [5]. Исходные описания хемографов в 134К представлены в виде матриц $M(X)$, отражающих кратности химических связей. Было использовано множество меток Y , включающее элементы декартова произведения химического типа элемента на заряд и допустимые гибридизационные состояния атомов [6]. Над Y строились инварианты из семейств $\hat{\nu}_c[\mathbf{X}](\hat{\mu}_c^{-1}\hat{Y}^n)$ ($n = 1, \dots, 7$), $\hat{\nu}_k[\mathbf{X}](\hat{\mu}_k^{-1}\hat{Y}(k))$ ($k = 3, \dots, 7$) и $\hat{\nu}_k[\mathbf{X}](\hat{\mu}_c^{-1}\hat{Y}^n \cup \hat{\mu}_k^{-1}\hat{Y}(k))$. Результаты тестирования регулярности по Журавлеву [6] позволили найти оптимальные значения k и n ($k = 4$; $n = 5$). Как и в работе [4], прогнозирование числовых величин проводилось алгоритмически с *линейным распознающим оператором* на основании кортеж-инварианта $\hat{\nu}_e = \hat{\nu}_c[\mathbf{X}](\hat{\mu}_c^{-1}\hat{Y}^5 \cup \hat{\mu}_k^{-1}\hat{Y}(4))$ и корректором из 6 операций, настраиваемыми мульти-стартовой стохастической оптимизацией.

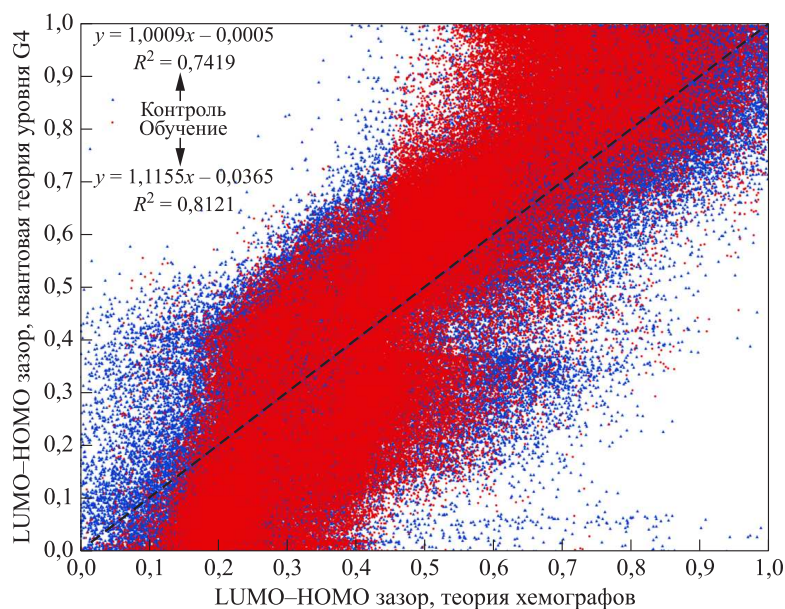
Результаты серии кросс-валидационных экспериментов (10 разбиений 134К в соотношении «случай–контроль» 6 : 1) показали наилучшие результаты: (1) при учете эффектов атомов водорода; (2) при использовании линейного решающего правила и единичных «сглаживающих» функций $S, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$; (3) при использовании коррекции на число χ -фрагментов хемографа (см. теорему 1). Результаты вычислительных экспериментов суммированы в таблице.

Несмотря на отличия в аккуратности скрининговых оценок различных КМ-свойств молекул

(см. таблицу), алгоритмы для вычисления всех 15 свойств показали приемлемую обобщающую способность. Последняя может быть косвенно охарактеризована, например, различиями между значениями коэффициентов корреляции r и $r(c)$, полученных соответственно на обучении и контроле (теорема 2), которые составили в среднем всего 0,016 (95%, достоверный интервал 0,003–0,041). Одним из лучших скрининговых алгоритмов, разработанных в рамках топологической теории хемографов, оказался алгоритм вычислений ширины щели LUMO-НОМО (Lowest Unoccupied and Highest Occupied Molecular Orbitals): $r = 0,86$ на обучении и $r(c) = 0,83$ на контроле при стандартном отклонении 0,14–0,17 (см. рисунок). Несмотря на заметную «размытость» корреляционного облака $O(\mathbf{X})$ на рисунке, при скрининге молекул по LUMO-НОМО квартиль наибольших значений позволяет выделить 77% соединений с наибольшими значениями данного свойства молекул (теорема 2).

При экспертном анализе ошибок прогнозирования было установлено, что разделение всей выборки 134К на две подгруппы молекул: полициклические, ароматические и алифатические соединения ($n = 26\,765$) и все остальные — с отдельным обучением на каждой из подгрупп позволило улучшить кросс-валидационную корреляцию для зазора LUMO-НОМО от $r(c) = 0,83$ до 0,88 при снижении стандартного отклонения от 0,17 до 0,11.

Анализ весов ω_i и значений $\varphi_i(i\chi, i, \text{Pr})$ (см. теорему 2 в [1]) χ -инвариантов позволяет выявить хемоинварианты, которые вносят наибольшие абсолютные вклады. Например, в увеличение щели LUMO-НОМО наибольший вклад вносили хемо-



Пример ранговой корреляции для ширины щели LUMO-HOMO

инварианты, содержащие *атомы углерода с выраженным стерическим напряжением, алифатические цепи*, а в сужение — π -системы, что полностью соответствует основам теории химической связи.

При условии проведения предварительной подготовки (конвертирование матрицы инцидентности каждого хемографа X в множество хеминвариантов $\hat{\beta}[X](\hat{\mu}_c^{-1}\hat{Y}^5(X) \cup \hat{\mu}_\kappa^{-1}\hat{Y}(4, X)) \subset \iota_e$, настройка вектора параметров $\theta(\text{Pr})$) скорость вычислений алгоритма $\hat{A}(\theta(\text{Pr}))$ становится на несколько порядков выше, чем высокоточные КМ-расчеты. Таким образом, разработанные алгоритмы приемлемы для проведения виртуальных скринингов КМ-свойств молекул.

9 Заключение

Предлагаемые процедуры скринингового моделирования КМ-свойств молекул находятся в русле, важном для решения задач теоретической и практической химии. В теоретической химии крайне важна разработка моделей, приемлемых для всех классов соединений и позволяющих устанавливать полуколичественные взаимосвязи между электронно-пространственным строением молекул и их свойствами. Такие модели должны обеспечивать выделение структурных признаков, определяющих свойства молекул, возможные реакции молекул, прогнозировать эффекты модификации структуры молекулы. Необходимость таких моделей очевидна хотя бы потому, что число возможных органических молекул измеряется сотнями милли-

ардов и получить данные точных количественных КМ-расчетов для каждой из таких молекул не представляется возможным.

Предлагаемые в настоящей работе «топологические» модели отличает хорошая физико-химическая интерпретируемость (в том числе в терминах квантовой теории) и высокая скорость вычислений. Эти особенности разработанных моделей обеспечивают возможность их применения для решения широкого круга задач, таких как оценка КМ-свойств метаболитов и олигопептидов, поиск/дизайн молекул с заданными наборами КМ-свойств в рамках решения задач материаловедения, дизайн новых лекарств, репозиционирование уже известных лекарств и др.

Литература

1. Торшин И. Ю. О применении топологического подхода к анализу плохо формализуемых задач для построения алгоритмов виртуального скрининга квантово-механических свойств органических молекул I: Основы проблемно ориентированной теории // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 1. С. 39–45.
2. Степанов Н. Ф. Квантовая механика и квантовая химия. — М.: Мир, 2001. 519 с.
3. Torshin I. Yu., Rudakov K. V. On the application of the combinatorial theory of solvability to the analysis of chemographs. Part 1: Fundamentals of modern chemical bonding theory and the concept of the chemograph // Pattern Recognition Image Analysis, 2014. Vol. 24. No. 1. P. 11–23.

4. Torshin I. Y., Rudakov K. V. On the procedures of generation of numerical features over partitions of sets of objects in the problem of predicting numerical target variables // Pattern Recognition Image Analysis, 2019. Vol. 29. No. 4. P. 654–667. doi: 10.1134/S1054661819040175.
5. Ramakrishnan R., Dral P., Rupp M. Quantum chemistry structures and properties of 134 kilo molecules // Scientific Data, 2014. Vol. 1. No. 1. Art. 140022. 7 p. doi: 10.1038/sdata.2014.22.
6. Torshin I. Yu., Rudakov K. V. On the application of the combinatorial theory of solvability to the analysis of chemographs. Part 2. Local completeness of invariants of chemographs in view of the combinatorial theory of solvability // Pattern Recognition Image Analysis, 2014. Vol. 24. No. 2. P. 196–208.

Поступила в редакцию 05.04.21

ON THE APPLICATION OF A TOPOLOGICAL APPROACH TO ANALYSIS OF POORLY FORMALIZED PROBLEMS FOR CONSTRUCTING ALGORITHMS FOR VIRTUAL SCREENING OF QUANTUM-MECHANICAL PROPERTIES OF ORGANIC MOLECULES II: COMPARISON OF FORMALISM WITH CONSTRUCTIONS OF QUANTUM MECHANICS AND EXPERIMENTAL APPROBATION OF THE PROPOSED ALGORITHMS

I. Yu. Torshin

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: Correspondences between descriptions of molecules in the framework of the theory of chemographs, internal coordinates of molecules, and ψ -functions are shown. The results obtained are comparable: (i) with the solutions of the one-electron Schrödinger equation on fragments of molecules with allowance for the overlap of fragments; (ii) with additive schemes for calculating electron density in the electron density functional theory; and (iii) with allowance for overlap integrals in the theory of molecular orbitals. Approbation of the algorithms on a sample of 134 thousand organic molecules showed rank correlations of the order of 0.75 (95%, reliable interval 0.67–0.85) between the results of calculations using the proposed algorithms and the values of the investigated quantum mechanical properties of molecules. The calculation speed of the proposed algorithms is several orders of magnitude higher than the speed of quantum mechanical calculations which is important for screening the molecules.

Keywords: algebraic approach; chemoinformatics; labeled graphs; combinatorial solvability analysis

DOI: 10.14357/19922264220205

Acknowledgments

This work was supported in part by RFBR grants 19-07-00356, 18-07-00944, and 20-07-00537.

References

1. Torshin, I. Yu. 2022. O primeneni topologicheskogo podkhoda k analizu plokho formalizuemyykh zadach dlya postroeniya algoritmov virtual'nogo skrininga kvantovomekhanicheskikh svoystv organicheskikh molekul I: Osnovy problemno orientirovannoy teorii [On the application of a topological approach to analysis of poorly formalized problems for constructing algorithms for virtual screening of quantum-mechanical properties of organic molecules I: The basics of the problem-oriented theory]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform Appl.* 15(1):39–45.
2. Stepanov, N. F. 2001. *Kvantovaya mekhanika i kvantovaya khimiya* [Quantum mechanics and quantum chemistry]. Moscow: Mir. 519 p.

3. Torshin, I. Yu., and K. V. Rudakov. 2014. On the application of the combinatorial theory of solvability to the analysis of chemographs. Part 1: Fundamentals of modern chemical bonding theory and the concept of the chemograph. *Pattern Recognition Image Analysis* 24(1):11–23.
4. Torshin, I. Yu., and K. V. Rudakov. 2019. On the procedures of generation of numerical features over partitions of sets of objects in the problem of predicting numerical target variables. *Pattern Recognition Image Analysis* 29(4):654–667. doi: 10.1134/S1054661819040175.
5. Ramakrishnan, R., P. Dral, and M. Rupp. 2014. Quantum chemistry structures and properties of 134 kilo molecules. *Scientific Data* 1(1):140022. 7 p. doi: 10.1038/sdata.2014.22.
6. Torshin, I. Yu., and K. V. Rudakov. 2014. On the application of the combinatorial theory of solvability to the analysis of chemographs. Part 2: Local completeness of invariants of chemographs in view of the combinatorial theory of solvability. *Pattern Recognition Image Analysis* 24(2):196–208.

Received April 5, 2021

Contributor

Torshin Ivan Y. (b. 1972) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, Candidate of Science (PhD) in chemistry, senior scientist, A.A. Dorodnicyn Computing Center, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 40 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; tij135@yahoo.com

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ FDR-МЕТОДА МНОЖЕСТВЕННОЙ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ ПРИ ОБРАЩЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

С. И. Палионная¹. О. В. Шестаков²

Аннотация: Одной из актуальных задач при работе с большими массивами данных является задача их экономного представления, для решения которой необходимо выявить значимые признаки и удалить шумовые. Такие задачи встречаются в самых различных областях, таких как генетика, биология, астрономия, компьютерная графика, обработка аудио- и видеоданных и т. д. В современных исследованиях в этой области описаны различные методы фильтрации, основанные на разреженном представлении получаемых экспериментальных данных. Для построения статистических оценок на основе наблюдаемых данных широко используется процедура множественной проверки гипотез о значимости наблюдений. В данной работе рассмотрен FDR (False Discovery Rate) метод, основанный на контроле ожидаемой доли ложных отклонений нулевой гипотезы, и алгоритм Бенжамини–Хочберга для множественной проверки гипотез. Зачастую информация, доступная для наблюдения, представляет собой некоторое преобразование интересующих исследователя данных. При этом дополнительно возникает задача обращения этого преобразования. В работе рассмотрен случай, когда исходный вектор данных подвергается действию линейного однородного преобразователя. Такие ситуации типичны, например, в астрофизических и томографических приложениях.

Ключевые слова: вейвлеты; пороговая обработка; множественная проверка гипотез; однородный линейный оператор; несмещенная оценка риска

DOI: 10.14357/19922264220206

1 Введение

Рассмотрим постановку задачи множественной проверки гипотез. Пусть имеются n различных выборок, каждой из которых соответствует своя нулевая гипотеза $\{H_{0i}, i = 1, \dots, n\}$ и альтернатива $\{H_{1i}, i = 1, \dots, n\}$. Гипотезы проверяются статистиками T_i с заданными нулевыми распределениями. После вычисления достигаемых уровней значимости $\{p_i, i = 1, \dots, n\}$ принимается решение об отвержении нулевой гипотезы $\{H_{0i}\}$ для каждого i . Обозначим через M_0 множество индексов верных нулевых гипотез, а через R — множество индексов отвергаемых гипотез. Тогда $V = |M_0 \cap R|$ — число ошибок первого рода. Задача заключается в минимизации числа ошибок первого рода за счет изменения параметра R .

Существует множество статистических процедур, предлагающих различные способы решения задачи множественной проверки гипотез. Одной из

первых предложенных мер, обобщающих ошибку первого рода, была групповая вероятность ошибки первого рода FWER (Family-Wise Error Rate) [1]. Эта величина определяется как вероятность совершения хотя бы одной ошибки первого рода. Однако при большом числе проверяемых гипотез контроль такого строгого условия приводит к значительному увеличению числа ошибок второго рода. Поэтому в ситуациях, когда число проверяемых гипотез очень велико, предпочтительнее допустить некоторое количество ошибок первого рода с целью увеличения статистической мощности.

С этой целью рассмотрим меру FDR. Эта мера была предложена в работе [2] и предполагает контроль ожидаемой доли ложных отклонений

$$\text{FDR} = \mathbb{E} \left(\frac{V}{\max(R, 1)} \right).$$

Для контроля FDR чаще всего используется алгоритм множественной проверки гипотез Бенжа-

*Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, sofiko-10@yandex.ru

²Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, oshestakov@cs.msu.ru

мини–Хочберга [2], который при условии независимости статистик, проверяющих гипотезы, позволяет ограничить сверху значение FDR параметром α , т. е.

$$\mathbb{E} \left(\frac{V}{\max(R, 1)} \right) \leq \alpha.$$

в этой процедуре уровни значимости меняются линейно и определяются следующим образом:

$$\alpha_i = \frac{\alpha i}{n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для применения метода Бенжамини–Хочберга строится вариационный ряд из достигаемых уровней значимости:

$$p_{(1)} \leq p_{(2)} \leq \dots \leq p_{(n)}.$$

Отвергаются все гипотезы H_{0_1}, \dots, H_{0_k} , где $k \in [1, n]$ — максимальный индекс, такой что для него выполнено условие

$$p_{(i)} \leq \alpha_i.$$

2 Дискретное вейвлет-разложение

Рассмотрим задачу оценивания математического ожидания гауссова вектора

$$X_i = (Kf)_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где f — функция исходных данных; ε_i — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 ; K — линейное однородное преобразование с показателем β , т. е. для любого $a > 0$

$$K[f(ax)] = a^{-\beta}(Kf)[ax].$$

Заметим, что из однородности линейного преобразования K с показателем β вытекает однородность преобразования K^{-1} с показателем $-\beta$.

Пусть исходная функция f и ее линейное преобразование Kf заданы в точках i/N , где $N = 2^J$ и $i = 1, \dots, N$. Рассмотрим дискретное вейвлет-разложение преобразованной функции Kf . При практическом применении метода вейвлет-разложения аппроксимация исходной функции Kf записывается в виде суммы из сдвигов и растяжений некоторой вейвлет-функции ψ :

$$Kf = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^j-1} \langle Kf, \psi_{j,l} \rangle \psi_{j,l},$$

где $\psi_{j,l}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - l)$. Функция ψ должна удовлетворять определенным требованиям [3]. Не уточняя их в данной работе, будем полагать, что она обладает всеми необходимыми свойствами.

Обозначим $\beta_{j,l} = \|K^{-1}\psi_{j,l}\|$. Тогда

$$\begin{aligned} \beta_{j,l} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(K^{-1}[2^{j/2}\psi(2^j x - l)] \right)^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= 2^{j/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} 2^{\beta j} \left(K^{-1}\psi[2^j x - l] \right)^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= 2^{(1/2+\beta)j} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(K^{-1}\psi[2^j x - l] \right)^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= 2^{\beta j} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(K^{-1}\psi[y] \right)^2 dy \right)^{1/2} = 2^{\beta j} \beta_{0,0}. \end{aligned}$$

Аппроксимация исходной функции f представима в виде [4]:

$$F = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{l=0}^{2^j-1} 2^{\beta j} \beta_{0,0} \langle Kf, \psi_{j,l} \rangle u_{j,l}, \quad (1)$$

где $u_{j,l} = K^{-1}\psi_{j,l}/\beta_{j,l}$.

Дискретное вейвлет-преобразование представляет собой умножение вектора значений функции на ортогональную матрицу, порождаемую вейвлет-функцией ψ . Обозначим через $\mu_{j,l}$ соответствующие коэффициенты, полученные после дискретного вейвлет-преобразования. Коэффициенты $\mu_{j,l}$ образуют вектор μ . Для каждого уровня $j \in [0, J-1]$ рассмотрим упорядоченные по абсолютной величине значения $\mu_{j,(k)}$, $k = 1, \dots, 2^j$:

$$|\mu_{j,(1)}| \geq \dots \geq |\mu_{j,(2^j)}|.$$

Обозначим $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{J-1})$. Далее будем рассматривать векторы μ , которые принадлежат классу L_p для $0 < p < 2$:

$$L_p(\eta) = \left\{ |\mu_{j,(k)}| \leq \eta_j \cdot 2^{j/p} k^{-1/p} \text{ для всех } k = 1, \dots, 2^j, j = 0, \dots, J-1 \right\}.$$

Заметим, что класс L_p достаточно широк и включает в себя, например, классы непрерывных по Липшицу функций, определенных на конечном отрезке, причем параметр регулярности по Липшицу не зависит от η . Такие функции были рассмотрены, в частности, в работе [5]. Также класс L_p включает в себя некоторые классы Бесова [6].

3 Среднеквадратичный риск

Процедура множественной проверки гипотез, описанная выше, сводится к методам пороговой обработки. Такой подход был использован, в частности, в статье [7].

В случае жесткой пороговой обработки компонента вектора обнуляется, если ее абсолютное значение не превосходит заданного порога T_j , т. е.

$$\rho_H(X_{j,k}^W, T_j) = \begin{cases} X_{j,k}^W & \text{при } |X_{j,k}^W| > T_j; \\ 0 & \text{при } |X_{j,k}^W| \leq T_j \end{cases}$$

для каждого $j \in [0, J - 1]$, где $X_{j,k}^W$ — зашумленные вейвлет-коэффициенты из разложения (1).

Эта процедура эквивалентна проверке гипотез о равенстве нулю математического ожидания каждой компоненты вектора данных. В случае использования FDR-метода пороговое значение T_j выбирается следующим образом: по исходной выборке строится вариационный ряд убывающих по абсолютному значению величин $|X|_j^{(1)} \geq |X|_j^{(2)} \geq \dots \geq |X|_j^{(2^j)}$ и $|X|_j^{(k)}$ сравнивается с квантилями Гауссова распределения $t_k = \sigma z(\alpha/2 \cdot k/2^j)$. Пусть k_F — наибольший индекс k для которого $|X|_j^{(k)} \geq t_k$, тогда выбирается порог $T_j^F = t_{k_F}$.

Наряду с жесткой пороговой обработкой широко используется метод мягкой пороговой обработки, при котором оценки компонент вектора вычисляются по правилу:

$$\rho_S(X_{j,k}^W, T_j) = \begin{cases} X_{j,k}^W - T_j & \text{при } X_{j,k}^W > T_j; \\ X_{j,k}^W + T_j & \text{при } X_{j,k}^W < -T_j; \\ 0 & \text{при } |X_{j,k}^W| \leq T_j. \end{cases}$$

В этом случае получаемая функция ρ_S оказывается непрерывной.

Среднеквадратичная погрешность (риск) рассмотренных процедур в случае дискретного вейвлет-разложения определяется следующим образом:

$$R(\mathbf{T}) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=1}^{2^j} \beta_{j,k}^2 \mathbb{E} (\rho(X_{j,k}^W, T_j) - \mu_{j,k})^2, \quad (2)$$

где $\mathbf{T} = (T_0, T_1, \dots, T_{J-1})$; ρ — функция используемой пороговой обработки.

Методы выбора порогового значения, как правило, ориентированы на минимизацию риска. Значение порога, при котором риск достигает минимума, обозначим $\mathbf{T}^{\min} = (T_0^{\min}, T_1^{\min}, \dots, T_{J-1}^{\min})$:

$$\mathbf{T}^{\min} : R(\mathbf{T}^{\min}) = \min_{\mathbf{T}} R(\mathbf{T}).$$

В выражении $R(\mathbf{T})$ присутствуют неизвестные величины $\mu_{j,k}$, и вычислить значения $R(\mathbf{T})$ и \mathbf{T}^{\min} на практике нельзя. Однако можно построить оценку риска, которая вычисляется на основе только наблюдаемых данных. Эта оценка определяется выражением [3]:

$$\hat{R}(\mathbf{T}) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=1}^{2^j} 2^{2\beta_j} \beta_{0,0} F [X_{j,k}^W, T_j],$$

где

$$F [X_{j,k}^W, T_j] = \begin{cases} \left((X_{j,k}^W)^2 - \sigma^2 \right) \cdot \mathbf{1} \left(|X_{j,k}^W| \leq T_j \right) + \\ + \sigma^2 \cdot \mathbf{1} \left(|X_{j,k}^W| > T_j \right) & \text{в случае жесткой} \\ & \text{пороговой обработки;} \\ \left((X_{j,k}^W)^2 - \sigma^2 \right) \cdot \mathbf{1} \left(|X_{j,k}^W| \leq T_j \right) + \\ + (\sigma^2 + T_j^2) \cdot \mathbf{1} \left(|X_{j,k}^W| > T_j \right) & \text{в случае мягкой} \\ & \text{пороговой обработки.} \end{cases}$$

При применении методов пороговой обработки для решения обратных статистических задач зачастую используют универсальный порог

$$\mathbf{T}^U : T_j^U = \sigma \sqrt{2 \log 2^j}.$$

Популярность этого порога обусловлена тем, что он в определенном смысле близок к максимальному и его можно использовать при самых слабых ограничениях на векторы наблюдений [8]. Кроме того, исследования в работах [9–11] показывают, что можно не рассматривать $T_j > T_j^U$. В связи с этим всюду далее будем считать, что $T_j \leq T_j^U$, $j = 0, \dots, J - 1$.

4 Основные результаты

В данном разделе будут доказаны некоторые асимптотические свойства оценки (2), аналогичные результатам работ [5, 12].

Для удобства дальнейшего изложения введем ряд обозначений:

$$\gamma_j = \frac{1}{\log \log (2^j)}; \quad \tau_j = \sigma (2 \log \eta_j^{-p})^{1/2};$$

$$\kappa_j = \frac{2^j \eta_j^p \tau_j^{-p}}{1 - \alpha_j - \gamma_j} \text{ для } L_p(\eta_j). \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть $\mu \in L_p(\eta)$, $\eta_j \in [2^{-j} (\log 2^j)^5, 2^{-j \cdot \gamma}]$, $1/2 < \gamma < 1$. Пусть \mathbf{T}^F —

вектор FDR-порогов с управляющими параметрами $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{J-1})$ и $\alpha_j \rightarrow 0$, $\alpha_j \kappa_j \gamma_j^2 / \log 2^j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, где κ_j и γ_j определены в (3). Тогда

$$\frac{\hat{R}(\mathbf{T}^F) - R(\mathbf{T}^{\min})}{\sigma^2 \sqrt{2^{J+4\beta J} \beta_{0,0}^4}} \Rightarrow N(0, 1).$$

Доказательство. Докажем теорему для метода мягкой пороговой обработки. В случае жесткой пороговой обработки доказательство аналогично. Обозначим

$$W(\mathbf{T}) = \hat{R}(\mathbf{T}) - \hat{R}(\mathbf{T}^{\min}) = \sum_{j=0}^{J-1} 2^{2\beta j} \beta_{0,0} U_j(T_j),$$

где

$$U_j(T_j) = \sum_{k=1}^{2^j} (F[X_{j,k}^W, T_j] - F[X_{j,k}^W, T_j^{\min}]),$$

и запишем

$$\begin{aligned} \hat{R}(\mathbf{T}^F) - R(\mathbf{T}^{\min}) + \hat{R}(\mathbf{T}^{\min}) - \hat{R}(\mathbf{T}^{\min}) &= \\ &= \hat{R}(\mathbf{T}^{\min}) - R(\mathbf{T}^{\min}) + W(\mathbf{T}^F). \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\frac{\hat{R}(\mathbf{T}^{\min}) - R(\mathbf{T}^{\min})}{\sigma^2 \sqrt{2^{J+4\beta J} \beta_{0,0}^4}} \Rightarrow N(0, 1). \quad (4)$$

При мягкой пороговой обработке $\hat{R}(\mathbf{T}^{\min})$ является несмещенной оценкой $R(\mathbf{T}^{\min})$, а при жесткой пороговой обработке и выполнении условий теоремы смещение стремится к нулю при делении на $\sqrt{2^{J+4\beta J}}$ [3]. Для дисперсии числителя имеем [13]:

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\left(\mathbb{D} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=1}^{2^j} 2^{2\beta j} \beta_{0,0} (F[X_{j,k}^W, T_j^{\min}] - \right. \right. \\ \left. \left. - \mathbb{E}F[X_{j,k}^W, T_j^{\min}]) \right) / \left(\mathbb{D} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=1}^{2^j} 2^{2\beta j} \beta_{0,0} (X_{j,k}^W)^2 \right) \right) = \\ = 1. \quad (5) \end{aligned}$$

Кроме того, поскольку $X_{j,k}^W$ независимы, $\mathbb{D}(X_{j,k}^W)^2 = 2\sigma^4 + 4\sigma^2 \mu_{j,k}^2$, и в силу определения класса $L_p(\eta)$ получаем:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{D} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=1}^{2^j} 2^{2\beta j} \beta_{0,0} (X_{j,k}^W)^2}{\sigma^4 (2^{J+4\beta J} \beta_{0,0}^4)} = 1. \quad (6)$$

Наконец, выполнено условие Линдберга: для любого $\varepsilon > 0$ при $J \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_j^2} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=1}^{2^j} \mathbb{E} \left[(2^{2\beta j} \beta_{0,0} F[X_{j,k}^W, T_j^{\min}] - \right. \\ \left. - \mathbb{E}F[X_{j,k}^W, T_j^{\min}])^2 \cdot \mathbf{1} (2^{2\beta j} \beta_{0,0} |F[X_{j,k}^W, T_j^{\min}] - \right. \\ \left. - \mathbb{E}F[X_{j,k}^W, T_j^{\min}]| > \varepsilon V_j) \right] \rightarrow 0, \quad (7) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} V_j^2 = \mathbb{D} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=1}^{2^j} 2^{2\beta j} \beta_{0,0} (F[X_{j,k}^W, T_j^{\min}] - \\ - \mathbb{E}F[X_{j,k}^W, T_j^{\min}]), \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned} |F[X_{j,k}^W, T_j^{\min}] - \mathbb{E}F[X_{j,k}^W, T_j^{\min}]| \leq \\ \leq 2 \left((T_j^U)^2 + \sigma^2 \right), \quad (8) \end{aligned}$$

и в силу (5), (6) и (8) начиная с некоторого j все индикаторы в (7) обращаются в нуль. Таким образом, справедливо (4).

Осталось показать, что

$$\frac{W(\mathbf{T}^F)}{\sqrt{2^{J+4\beta J} \beta_{0,0}^4}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0. \quad (9)$$

Разобьем $W(\mathbf{T}^F)$ на две компоненты:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{T}^F) &= \sum_{j=0}^{J-1} 2^{2\beta j} \beta_{0,0} U_j(T_j^F) = \\ &= \sum_{j=0}^{Jt} 2^{2\beta j} \beta_{0,0} U_j(T_j^F) + \sum_{j=Jt}^{J-1} 2^{2\beta j} \beta_{0,0} U_j(T_j^F) \quad (10) \end{aligned}$$

для некоторого $t \in (0, 1/2)$.

Рассмотрим вторую сумму от Jt до $J-1$ (для сокращения записи будем считать, что Jt — целое число). Для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\frac{\left| \sum_{j=Jt}^{J-1} 2^{2\beta j} \beta_{0,0} U_j(T_j^F) \right|}{\sqrt{2^{J+4\beta J} \beta_{0,0}^4}} > \varepsilon \right) \leq \\ \leq \sum_{j=Jt}^{J-1} \mathbb{P} \left(\frac{|2^{2\beta j} \beta_{0,0} U_j(T_j^F)|}{\sqrt{2^{J+4\beta J} \beta_{0,0}^4}} > \frac{\varepsilon}{J} \right) \leq \\ \leq \sum_{j=Jt}^{J-1} \left(\mathbb{P}(T_j^F \leq \tau_j) + \right. \\ \left. + \mathbb{P} \left(\frac{2^{2\beta j} \beta_{0,0} \sup_{T_j \in [\tau_j, T_j^U]} |U_j(T_j)|}{\sqrt{2^{J+4\beta J} \beta_{0,0}^4}} > \frac{\varepsilon}{J} \right) \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{j=Jt}^{J-1} \left(\mathbb{P} (T_j^F \leq \tau_j) + \mathbb{P} \left(\left(2^{2\beta j} \beta_{0,0} \left(\sup_{T_j \in [\tau_j, T_j^U]} |U_j(T_j) - \mathbb{E}U_j(T_j)| + \sup_{T_j \in [\tau_j, T_j^U]} |\mathbb{E}U_j(T_j)| \right) \right) / \sqrt{2^{J+4\beta J} \beta_{0,0}^4} > \frac{\varepsilon}{J} \right) \right). \quad (11)$$

Пусть $U_j(T_j) = S'_j(T_j) + S''_j(T_j)$, $T_j \in [\tau_j, T_j^U]$, где $S''_j(T_j)$ состоит из слагаемых, для которых $|\mu_{j,(k)}| \leq C/\tau_j$, а $S'_j(T_j)$ содержит все остальные.

По определению класса $L_p(\eta_j)$ число слагаемых в $S'_j(T_j)$ не превосходит

$$C \cdot 2^j T_j^p \eta_j^p = \left\{ T_j^p \sim (\log 2^j)^{p/2} \right\} = C \cdot 2^j (\log 2^j)^{p/2} \eta_j^p \equiv m_j.$$

Так как каждое слагаемое из $S'_j(T_j)$ не превосходит по модулю $2 \left((T_j^U)^2 + \sigma^2 \right)$,

$$|S'_j(T_j)| \leq C \cdot 2^j (\log 2^j)^{1+p/2} \eta_j^p.$$

Следовательно,

$$\frac{2^{2\beta j} \beta_{0,0} \sup_{T_j \in [\tau_j, T_j^U]} |S'_j(T_j) - \mathbb{E}S'_j(T_j)|}{\sqrt{2^{J+4\beta J} \beta_{0,0}^4}} \leq \frac{C \eta_j^p \cdot 2^{j(2\beta+1)} (\log 2^j)^{1+p/2}}{\sqrt{2^{J+4\beta J} \beta_{0,0}^4}} \leq \frac{C \cdot 2^{j(2\beta-\gamma+1)} (\log 2^j)^{1+p/2}}{\sqrt{2^{J+4\beta J} \beta_{0,0}^4}}. \quad (12)$$

Далее, в силу определения T_j^{\min} ,

$$|\mathbb{E}S''_j(T_j)| \leq C |S'_j(T_j)|.$$

Таким образом,

$$\sup_{T \in [\tau_j, T_j^U]} |\mathbb{E}U_j(T)| \leq C \cdot 2^j (\log 2^j)^{1+p/2} \eta_j^p$$

и

$$\frac{2^{2\beta j} \beta_{0,0} \sup_{T_j \in [\tau_j, T_j^U]} |\mathbb{E}U_j(T_j)|}{\sqrt{2^{J+4\beta J} \beta_{0,0}^4}} \leq \frac{C \eta_j^p \cdot 2^{j(2\beta+1)} (\log 2^j)^{1+p/2}}{\sqrt{2^{J+4\beta J} \beta_{0,0}^4}} \leq \frac{C \cdot 2^{j(2\beta-\gamma+1)} (\log 2^j)^{1+p/2}}{\sqrt{2^{J+4\beta J} \beta_{0,0}^4}}. \quad (13)$$

При $\gamma > 1/2$ полученные выражения (12) и (13) начиная с некоторого J меньше, чем ε/J , при всех $j \in [Jt, J-1]$.

Рассмотрим теперь сумму $S''_j(T)$. При больших значениях 2^j число слагаемых в этой сумме равно $2^j - m_j \approx 2^j$. Для удобства будем считать, что $S''_j(T)$ содержит слагаемые с номерами от $m_j + 1$ до 2^j . Повторяя рассуждения из [8, 14, 15], можно показать, что $T_j^{\min} \geq \tau_j - \alpha_j$, где $|\alpha_j| \leq C(\log \log 2^j) / \sqrt{\log 2^j}$, причем без ущерба для доказательства можно опустить α_j и считать, что $T_j^{\min} \geq \tau_j$. Разобьем отрезок $[\tau_j, T_j^U]$ на одинаковые части: $T_j^l = \tau_j + l\delta_{2^j} \in [\tau_j, T_j^U]$, $l = 1, \dots, 2^j - 1$, $\delta_{2^j} = (T_j^U - \tau_j) / 2^j$. Обозначим

$$Z''_j(T) = S''_j(T) - \mathbb{E}S''_j(T);$$

$$N''_j(T, T') = \sum_{i=m_j+1}^{2^j} \mathbf{1}(T < |X_{j,k}^W| \leq T').$$

Тогда

$$A_j = \left\{ \frac{2^{2\beta j} \sup_{T \in [\tau_j, T_j^U]} |S''_j(T) - \mathbb{E}S''_j(T)|}{2^{J(2\beta+1/2)}} \geq 5 \frac{\varepsilon}{J} \right\} \subset D_j \cup E_j,$$

где

$$D_j = \left\{ \sup_l |Z''_j(T_j^l)| > 2^{2\beta(J-j)+J/2} \frac{\varepsilon}{J} \right\},$$

$$E_j = \left\{ \sup_l \sup_{T \in [T_j^l, T_j^l + \delta_{2^j}]} |Z''_j(T) - Z''_j(T_j^l)| \geq 4 \cdot 2^{2\beta(J-j)+J/2} \frac{\varepsilon}{J} \right\}.$$

Обозначим $q_j = 2^{2\beta(J-j)+J/2}$. Учитывая определение класса $L_p(\eta)$ и вид τ_j , можно показать, что дисперсии слагаемых в $S''_j(T)$ (а значит, и $Z''_j(T)$) не превосходят $C \left(\log(2^j / (\log 2^j)^5) \right)^{3/2} \cdot 2^{-j\gamma}$. Применяя неравенство Бернштейна [16] для D_j , получим

$$\mathbb{P}(D_j) \leq \sum_l \mathbb{P} \left(|Z''_j(T_j^l)| > \frac{q_j \varepsilon}{J} \right) \leq 2^{j+1} \times \exp \left\{ -J^{-2} C \varepsilon^2 q_j^2 / \left(2^{1+j(1-\gamma)} \left(\log \left(\frac{2^j}{(\log 2^j)^5} \right) \right)^{3/2} + 2^{1+j/2} \left((T_j^U)^2 + \sigma^2 \right) \right) \right\}.$$

Далее, повторяя рассуждения из [12], получаем:

$$E_j \subset \left\{ \sup_l |N_j''(T_j^l, T_j^l + \delta_{2j}) - \mathbb{E}N_j''(T_j^l, T_j^l + \delta_{2j})| \geq \frac{q_j \varepsilon}{J\sigma^2} - \frac{2^j T_j^U \delta_{2j}}{\sigma^2} - \frac{2^j C \delta_{2j}}{\sigma^2} \right\} = E'_j.$$

Дисперсия слагаемых в $N_j''(T_j^l, T_j^l + \delta_{2j})$ ограничена величиной $C (\log(2^j / (\log 2^j)^5))^{1/2} \cdot 2^{-j\gamma}$. Снова применяя неравенство Бернштейна, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E'_l) &= \\ &= \mathbb{P} \left(|N_j''(T_j^l, T_j^l + \delta_{2j}) - \mathbb{E}N_j''(T_j^l, T_j^l + \delta_{2j})| \geq \right. \\ &\quad \left. \geq \frac{q_j \varepsilon}{J\sigma^2} - \frac{2^j T_j^U \delta_{2j}}{\sigma^2} - \frac{2^j C \delta_{2j}}{\sigma^2} \right) \leq \\ &\leq 2 \exp \left\{ - \frac{J^{-2} C \varepsilon^2 q_j^2}{2^{1+j(1-\gamma)} (\log(2^j / (\log 2^j)^5))^{1/2} + 2^{1+j/2}} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E'_l) &\leq \sum_l \mathbb{P}(E'_l) \leq 2^{j+1} \times \\ &\times \exp \left\{ - \frac{J^{-2} C \varepsilon^2 q_j^2}{2^{1+j(1-\gamma)} (\log(2^j / (\log 2^j)^5))^{1/2} + 2^{1+j/2}} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=Jt}^{J-1} \mathbb{P} \left(\sup_{T \in [\tau_j, T_j^U]} \frac{2^{2\beta j} |S_j''(T) - \mathbb{E}S_j''(T)|}{2^{J(2\beta+1/2)}} > \frac{\varepsilon}{J} \right) \rightarrow 0$$

при $J \rightarrow \infty$.

Для первого слагаемого из (10) в силу (8) имеем

$$\left| \sum_{j=0}^{Jt} 2^{2\beta j} \beta_{0,0} U_j(T_j^F) \right| \leq C \cdot 2^{(2\beta+1)tJ} \log 2^J.$$

Следовательно, при $J \rightarrow \infty$

$$\frac{\left| \sum_{j=0}^{Jt} 2^{2\beta j} \beta_{0,0} U_j(T_j^F) \right|}{\sqrt{2^{J+4\beta J} \beta_{0,0}^4}} \rightarrow 0 \text{ п. в.} \quad (14)$$

Для оценки $\mathbb{P}(T_j^F < \tau_j)$ воспользуемся результатом, полученным в [7]. Имеем

$$\sum_{j=Jt}^{J-1} \sup_{L_p(\eta)} \mathbb{P}(T_j^F < \tau_j) \leq \sum_{j=Jt}^{J-1} 2^{j+1} \exp \{ -c \alpha_j \kappa_j \gamma_j^2 \}.$$

Объединяя полученные выше оценки, для выражения (11) будем иметь:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=Jt}^{J-1} \left(\mathbb{P}(T_j^F \leq \tau_j) + \right. \\ &+ \mathbb{P} \left(2^{2\beta j} \beta_{0,0} \left(\sup_{T_j \in [\tau_j, T_j^U]} |U_j(T_j) - \mathbb{E}U_j(T_j)| + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sup_{T_j \in [\tau_j, T_j^U]} |\mathbb{E}U_j(T_j)| \right) / \sqrt{2^{J+4\beta J} \beta_{0,0}^4} > \frac{\varepsilon}{J} \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=Jt}^{J-1} \left(2^{j+1} \exp \{ -c \alpha_j \kappa_j \gamma_j^2 \} + 2^{j+1} \times \right. \\ &\times \exp \left\{ -J^{-2} C \varepsilon^2 q_j^2 / \left(2^{1+j(1-\gamma)} \left(\log \frac{2^j}{(\log 2^j)^5} \right)^{1/2} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. 2^{1+j/2} \right) \right\} + 2^{j+1} \exp \left\{ -J^{-2} C \varepsilon^2 q_j^2 / \left(2^{1+j(1-\gamma)} \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \left(\log \frac{2^j}{(\log 2^j)^5} \right)^{3/2} + 2^{1+j/2} \left((T_j^U)^2 + \sigma^2 \right) \right) \right\} \right). \end{aligned}$$

Когда $J \rightarrow \infty$, при выполнении условий теоремы полученное выражение стремится к нулю, и, учитывая (14), получаем, что справедливо (9).

Объединяя, получаем утверждение теоремы.

Оценка риска (2) также является сильно состоятельной.

Теорема 2. Пусть $\mu \in L_p(\eta)$, $\eta_j \in [2^{-j} (\log 2^j)^5, 2^{-j\gamma}]$, $1/2 < \gamma < 1$. Пусть \mathbf{T}^F — вектор FDR-порогов с управляющими параметрами $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{J-1})$ и $\alpha_j \rightarrow 0$, $\alpha_j \kappa_j \gamma_j^2 / \log 2^j \rightarrow \infty$ при $J \rightarrow \infty$, где κ_j и γ_j определены в (3). Тогда при $J \rightarrow \infty$

$$\frac{\hat{R}(\mathbf{T}^F) - R(\mathbf{T}^{\min})}{2^{\lambda J}} \rightarrow 0 \text{ п. в.}$$

при любом $\lambda > 1/2 + 2\beta$.

Теорема 2 доказывается аналогично соответствующему утверждению из работы [17].

Литература

1. Storey J. A direct approach to false discovery rates // J. Roy. Stat. Soc. B, 2002. Vol. 64. No. 3. P. 479–498.
2. Benjamini Y., Hochberg Y. Controlling the false discovery rate: A practical and powerful approach to multiple testing // J. Roy. Stat. Soc. B, 1995. Vol. 57. P. 289–300.
3. Mallat S. A wavelet tour of signal processing. — New York, NY, USA: Academic Press, 1999. 857 p.

4. Abramovich F., Silverman B. W. Wavelet decomposition approaches to statistical inverse problems // *Biometrika*, 1998. Vol. 85. No. 1. P. 115–129.
5. Кудрявцев А. А., Шестаков О. В. Асимптотика оценки риска при вейвлет-вейвлет разложении наблюдаемого сигнала // *Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт*, 2011. № 2. С. 54–57.
6. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1996. 480 с.
7. Abramovich F., Benjamini Y., Donoho D., Johnstone I. M. Adapting to unknown sparsity by controlling the false discovery rate // *Ann. Stat.*, 2006. Vol. 34. P. 584–653.
8. Jansen M. Noise reduction by wavelet thresholding. — Lecture notes in statistics ser. — New York, NY: Springer Verlag, 2001. Vol. 161. 217 p.
9. Donoho D., Johnstone I. M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage // *J. Am. Stat. Assoc.*, 1995. Vol. 90. P. 1200–1224.
10. Marron J. S., Adak S., Johnstone I. M., Neumann M. H., Patil P. Exact risk analysis of wavelet regression // *J. Comput. Graph. Stat.*, 1998. Vol. 7. P. 278–309.
11. Johnstone I. M. Wavelet shrinkage for correlated data and inverse problems adaptivity results // *Stat. Sinica*, 1999. Vol. 9. P. 51–83.
12. Palionnaya S. I., Shestakov O. V. Asymptotic properties of MSE estimate for the false discovery rate controlling procedures in multiple hypothesis testing // *Mathematics*, 2020. Vol. 8. No. 11. Art. 1913. 11 p.
13. Маркин А. В. Предельное распределение оценки риска при пороговой обработке вейвлет-коэффициентов // *Информатика и её применения*, 2009. Т. 3. Вып. 4. С. 57–63.
14. Кудрявцев А. А., Шестаков О. В. Асимптотическое поведение порога, минимизирующего усредненную вероятность ошибки вычисления вейвлет-коэффициентов // *Докл. Акад. наук*, 2016. Т. 468. № 5. С. 487–491.
15. Кудрявцев А. А., Шестаков О. В. Асимптотически оптимальная пороговая обработка вейвлет-коэффициентов в моделях с негауссовым распределением шума // *Докл. Акад. наук*, 2016. Т. 471. № 1. С. 11–15.
16. Bennett G. Probability inequalities for the sum of independent random variables // *J. Am. Stat. Assoc.*, 1962. Vol. 57. P. 33–45.
17. Палионная С. И. Сильная состоятельность оценки риска при множественной проверке гипотез с FDR-порогом // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15: Вычисл. матем. и киберн.*, 2020. № 4. С. 34–39.

Поступила в редакцию 14.02.22

THE USE OF THE FDR METHOD OF MULTIPLE HYPOTHESIS TESTING WHEN INVERTING LINEAR HOMOGENEOUS OPERATORS

S. I. Palionnaya^{1,2} and O. V. Shestakov^{1,2,3}

¹Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

²Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

³Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: One of the important tasks when processing large data arrays is their economical representation. To solve this task, it is necessary to identify significant features and remove noise. Such problems are found in a wide variety of fields such as genetics, biology, astronomy, computer graphics, audio and video data processing, etc. Modern research in this area describes various filtering methods based on a sparse representation of the obtained experimental data. To construct statistical estimates based on the observed data, the procedure of multiple testing of hypotheses about the significance of observations is widely used. The present authors consider the FDR (false discovery rate) method based on the control of the expected proportion of false rejections of the null hypothesis and the Benjamin–Hochberg algorithm for multiple hypothesis testing. Often, the information available for observation is some kind of transformation of the data of interest. This additionally raises the problem of inverting this transformation. The present authors consider the case when the original data vector is subjected to some linear homogeneous transformation. Such situations are typical, for example, in astrophysical and tomographic applications.

Keywords: wavelets; thresholding; multiple hypothesis testing; linear homogeneous operator; unbiased risk estimate

DOI: 10.14357/19922264220206

Acknowledgments

The paper was published with the financial support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as a part of the Program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement No. 075-15-2019-1621.

References

1. Storey, J. 2002. A direct approach to false discovery rates. *J. Roy. Stat. Soc. B* 64(3):479–498.
2. Benjamini, Y., and Y. Hochberg. 1995. Controlling the false discovery rate: A practical and powerful approach to multiple testing. *J. Roy. Stat. Soc. B* 57:289–300.
3. Mallat, S. 1999. *A wavelet tour of signal processing*. New York, NY: Academic Press. 857 p.
4. Abramovich, F., and B. W. Silverman. 1998. Wavelet decomposition approaches to statistical inverse problems. *Biometrika* 85(1):115–129.
5. Kudryavtsev, A. A., and O. V. Shestakov. 2011. Asimptotika otsenki riska pri veyglet-veyvlet razlozhenii nablyudemogo signala [The average risk assessment of the wavelet decomposition of the signal]. *T-Comm — Telekommunikatsii i transport* [T-Comm — Telecommunications and Transport] 2:54–57.
6. Besov, O. V., V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skiy. 1996. *Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vložheniya* [Integral representations of functions and embedding theorems]. Moscow: Nauka. 480 p.
7. Abramovich, F., Y. Benjamini, D. Donoho, and I. M. Johnstone. 2006. Adapting to unknown sparsity by controlling the false discovery rate. *Ann. Stat.* 34:584–653.
8. Jansen, M. 2001. *Noise reduction by wavelet thresholding*. Lecture notes in statistics ser. New York, NY: Springer Verlag. Vol. 161. 217 p.
9. Donoho, D., and I. M. Johnstone. 1995. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *J. Am. Stat. Assoc.* 90:1200–1224.
10. Marron, J. S., S. Adak, I. M. Johnstone, M. H. Neumann, and P. Patil. 1998. Exact risk analysis of wavelet regression. *J. Comput. Graph. Stat.* 7:278–309.
11. Johnstone, I. M. 1999. Wavelet shrinkage for correlated data and inverse problems: Adaptivity results. *Stat. Sinica* 9(1):51–83.
12. Palionnaya, S. I., and O. V. Shestakov. 2020. Asymptotic properties of MSE estimate for the false discovery rate controlling procedures in multiple hypothesis testing. *Mathematics* 8(11):1913. 11 p.
13. Markin, A. V. 2009. Predel'noe raspredelenie otsenki riska pri porogovoy obrabotke veyvlet-koeffitsientov [Limit distribution of risk estimate of wavelet coefficient thresholding]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 3(4):57–63.
14. Kudryavtsev, A. A., and O. V. Shestakov. 2016. Asymptotic behavior of the threshold minimizing the average probability of error in calculation of wavelet coefficients. *Dokl. Math.* 93(3):295–299.
15. Kudryavtsev, A. A., and O. V. Shestakov. 2016. Asymptotically optimal wavelet thresholding in the models with non-Gaussian noise distributions. *Dokl. Math.* 94(3):615–619.
16. Bennett, G. 1962. Probability inequalities for the sum of independent random variables. *J. Am. Stat. Assoc.* 57:33–45.
17. Palionnaya, S. I. 2020. Strong consistency of the risk estimator in multiple hypothesis testing with the FDR threshold. *Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.* 44(4):190–195.

Received February 14, 2022

Contributors

Palionnaya Sofia I. (b. 1995) — PhD student, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; junior scientist, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; sofiko-10@yandex.ru

Shestakov Oleg V. (b. 1976) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; leading scientist, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; oshestakov@cs.msu.su

ПРИНЦИПЫ ОПИСАНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛОГИКО-СЕМАНТИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ И ИХ ИЕРАРХИИ*

А. А. Дурново¹, О. Ю. Инькова², Н. А. Попкова³

Аннотация: Рассматриваются возможности аннотирования в корпусах с дискурсивной разметкой. Показано, что корпуса, созданные на основе теории риторической структуры (TRC), содержат только аннотации отношений связности текста, или риторических отношений (РО). Корпус Пенсильванского университета PDTB аннотирует, напротив, показатели отношений, как и Надкорпусная база данных коннекторов (НБДК). Показано, что корпус RST Signaling Corpus (RST-SC), также созданный на основе TRC, хотя и аннотирует показатели РО, но не может совместить разметку РО и их показателей в форме единой аннотации. Эту задачу решают корпус GUM и Надкорпусная база данных иерархии (НБДИ) логико-семантических отношений (ЛСО). Последняя имеет ряд преимуществ: возможность поиска, получения статистики, а также формирования двуязычных аннотаций. Это позволяет выявить как универсальные явления в дискурсивной организации текста, так и явления, специфичные для того или иного исследуемого языка.

Ключевые слова: надкорпусная база данных; аннотирование корпусов текстов; дискурсивные отношения; коннектор

DOI: 10.14357/19922264220207

1 Введение

Языковые единицы, сигнализирующие, что между высказываниями, составляющими текст, есть некоторое дискурсивное отношение, играют важную роль в обеспечении связности текста при решении широкого спектра задач компьютерной лингвистики. Круг этих единиц широк: он включает коннекторы (например, сочинительные и подчинительные союзы *а, хотя, потому что*), а также целый ряд других языковых единиц и явлений (лексические средства, синтаксические конструкции, временные формы глаголов и т. д.), которые сигнализируют о наличии дискурсивных отношений между фрагментами текста (подробнее см. [1]). Так, в примере (1) отношение цели выражено инфинитивной конструкцией [2, с. 7]:

(1) [*To encourage more competition among exporting countries,*] [*the U. S. is proposing that export subsidies, including tax incentives for exporters, be phased out in five years.*]

Такие показатели, или сигналы, дискурсивных отношений помогают пишущему выразить эти отношения, а читающему — их распознать, тем самым облегчая интерпретацию текста, а также его

компьютерную обработку, например при решении задач машинного перевода.

В существующих до недавнего времени корпусах с дискурсивной разметкой, как правило, аннотировались либо сами показатели (см., например, Пенсильванский дискурсивно аннотированный корпус — PDTB [3]), либо, напротив, дискурсивные отношения, связывающие высказывания (корпуса, основанные на TRC [4–6]). Цель данного исследования — сравнить на концептуальном уровне два новых ресурса, позволяющих совмещать оба вида разметки: корпус GUM, в основе аннотирования которого лежит TRC, и НБДИ ЛСО, разработанную в ИПИ РАН. Начнем с краткого обзора существующих решений, затем опишем принципы аннотирования в НБДИ ЛСО и сравним ее возможности с возможностями, предоставляемыми корпусом GUM.

2 Корпуса, основанные на теории риторической структуры

Наиболее распространенной теорией, лежащей в основе анализа и аннотирования текстов, явля-

* Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва) в рамках швейцарско-российского проекта «Методология аннотирования в надкорпусной базе данных коннекторов» по гранту Швейцарского государственного секретариата по образованию, исследованиям и инновациям.

¹ Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, duralex49@mail.ru

² Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук; Женевский университет, olyaainkova@yandex.ru

³ Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, natasha_popkova@mail.ru

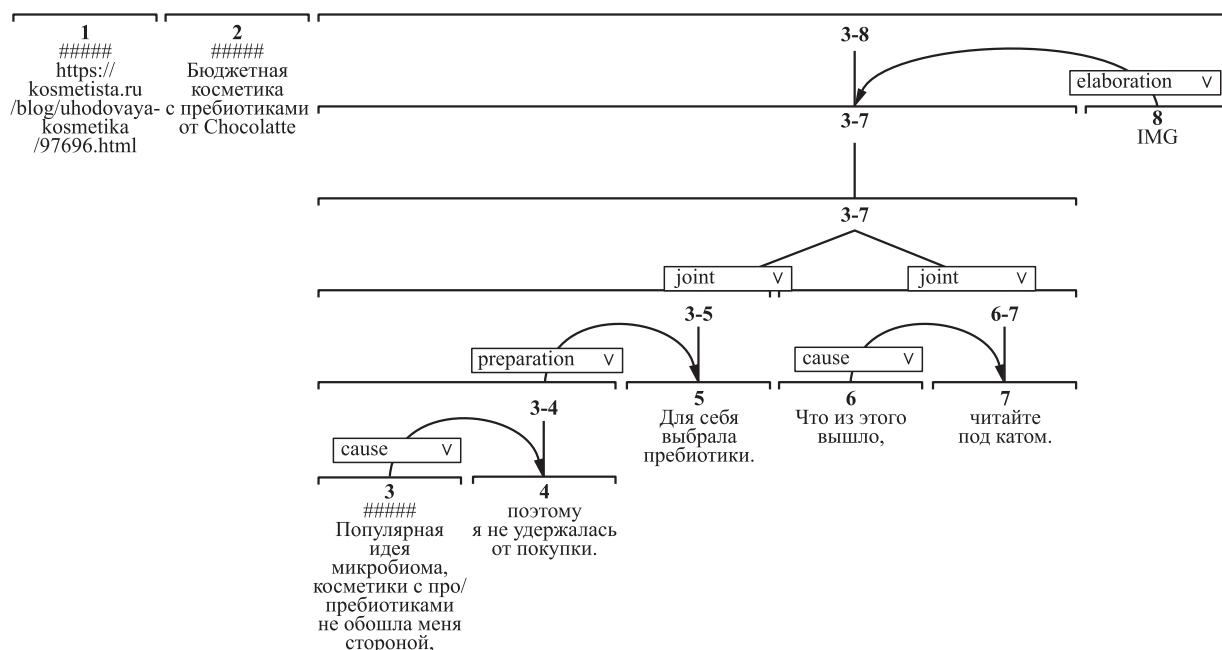


Рис. 1 Фрагмент графа из Ru-RSTreebank [4]. Номера соответствуют ЭДЕ, горизонтальные линии — ЭДЕ, вертикальная черта — группировки ЭДЕ, а также отношения между ними, указывающие либо на отношение равноправия (наклонная черта), либо зависимости (направленная дуга от зависимой ЭДЕ, сателлита, к главной, ядру)

ется ТРС [7]. Созданные на ее основе корпуса не располагали до последнего времени программным обеспечением, позволяющим размечать одновременно «риторические» (в данной терминологии) отношения, или отношения связности текста, и их показатели. Это обусловлено прежде всего тем, что, согласно ТРС, текст с дискурсивной точки зрения представляет собой иерархическую древовидную структуру (граф) элементарных дискурсивных единиц (ЭДЕ), которыми являются клаузы, и аннотации должны учитывать сложность этих древовидных структур.

В идеале единый граф должен охватывать текст в целом, но на практике это возможно лишь для небольших по объему текстов, в большинстве случаев новостных газетных статей или блогов. Наиболее распространенный материал для английского языка — выборка статей из *The Wall Street Journal*, использующийся, как будет показано ниже, в различных аннотированных корпусах. Графы для текстов большей величины строятся в пределах абзацев, что может даже специально оговариваться в инструкциях по аннотированию, например в [8].

На рис. 1 приведен фрагмент графа из русского корпуса Ru-RSTreebank, созданного на основе ТРС

и который отражает наиболее широкое представление о РО и их показателях.

Первое, что следует отметить, — это отсутствие между ЭДЕ 1, 2 и 3 какого-либо РО, несмотря на постулат ТРС о том, что все ЭДЕ обязательно должны быть связаны между собой некоторым РО [7, с. 248]. Заметим, что и следующие блоки ЭДЕ (9–15, 16–25, 26–37, ...) а также заключительная ЭДЕ 94¹ находятся на одном иерархическом уровне и не связаны друг с другом никаким РО. Это подтверждает обоснованность утверждения ТРС, что любой текст представляет собой единое дерево «риторической» зависимости.

Выделяются в самостоятельную ЭДЕ фотографии (ЭДЕ 8 IMG на рис. 1), которые, по мнению разработчиков Ru-RSTreebank, всегда связаны с предыдущим текстом отношением Elaboration (детализация²), наименее четко определенным РО в ТРС [10].

Граф отражает иерархические РО между блоками ЭДЕ 3–5 и 6–7. Эти блоки связаны между собой РО Joint (конъюнкция). Каждый из них содержит ЭДЕ, связанные причинными РО (Cause на рис. 1), расположенными соответственно уровнем ниже. Однако отношения, связывающие ЭДЕ 6 и 7, вряд ли могут считаться риторическими, так как

¹ В силу большого объема графа для всего текста нет возможности привести его полностью. Он доступен по адресу <https://rstreebank.ru/text/blogs.1>.

² Русские соответствия английских названий РО приводятся по [9, с. 438–440].

связывают сказуемое и синтаксически зависимое от него прямое дополнение. Иначе говоря, речь идет не о семантической, а о чисто синтаксической зависимости.

3 Корпуса, аннотирующие показатели дискурсивных отношений: PDTB и НБДК

Корпус PDTB был создан для разметки именно показателей отношений [11, 12], понимаемых, однако, уже, чем в TRC: это только отношения, потенциально выражаемые коннекторами или схожими с ними по функциям языковыми единицами, так называемыми альтернативными лексикализациями дискурсивных отношений (Alternative Lexicalization, [13]), которые грамматики соответствующих языков не относят к числу сочинительных или подчинительных союзов и их аналогов; ср., например *after then* в примере (2) [14, с. 22]:

(2) And she further stunned her listeners by revealing her secret garden design method: Commissioning a friend to spend «five or six thousand dollars. . . on books that I ultimately cut up». AltLex [*After that*], the layout had been easy.

Понимание дискурсивного отношения в PDTB близко к тому, что принято называть ЛСО [10, 15]. Для разметки ЛСО, которые могут как иметь эксплицитный показатель, так и не иметь его (так называемые имплицитные ЛСО), используются тексты уже упоминавшегося *The Wall Street Journal* общим объемом чуть больше 1 млн словоупотреблений. Аннотация не имеет форму графа и не обязательно должна охватывать весь текст. В ресурсе PDTB границы фрагментов текста, непосредственно связанные коннектором, выделяются желтым (первый фрагмент) и синим (второй, т.е. вводимый коннектором) цветом, а коннектор — красным. Фрагменты текста, не задействованные в уста-

новлении ЛСО, выделяются розовым (относятся к первому фрагменту) и фиолетовым (относятся ко второму). На рис. 2 им соответствуют различные оттенки серого.

На верхнем уровне иерархии (см. рис. 2, б) находится ЛСО причины, выражаемое *with*. Первый фрагмент текста включает в себя ЛСО (одновременности), оформляемое *once* (см. рис. 2, а). В графе оно будет находиться уровнем ниже. Каждое из ЛСО визуализируется отдельно. При разметке имплицитных ЛСО используется операция подстановки коннектора, который уместен по смыслу (рис. 3). В окне, показывающем ЛСО (см. рис. 3, б) в аннотируемом тексте, имплицитные ЛСО конъюнкции предлагается эксплицитовать при помощи *in addition*.

Как и в PDTB, разметка текста в НБДК, разработанной в ИПИ РАН, исходит из показателя ЛСО, а разметка всего текста не обязательна. Это особенно важно, поскольку НБДК использует тексты, преимущественно художественные, из параллельных французского и итальянского подкорпусов Национального корпуса русского языка (НКРЯ) [17], которые имеют большие размеры. В отличие от PDTB, аннотация в НБДК является двуязычной, т.е. аннотируется фрагмент текста оригинала и его перевод. Аннотация не фиксирует границ связываемых коннектором фрагментов текста и непосредственно не отражает иерархию ЛСО. Ей соответствуют в аннотации признаки <SubCNT> (встроенный коннектор) и <SuperCNT> (встраивающий) коннектор¹.

Аннотация сформирована для коннектора *то есть* (табл. 1), для которого проставлены (2-я колонка) обе метки. По отношению к коннектору *если* он является встроенным (<SubCNT>), так как находится в первом из связанных им фрагментах текста. Но во фрагменте текста, вводимом *то есть*, находится коннектор *или*, по отношению к которому он является встраивающим (<SuperCNT>). В графе на верхнем уровне будет находиться *если*, уровнем

The asbestos fiber, crocidolite, is unusually resilient **once** it enters the lungs, with even brief exposures to it causing symptoms that show up decades later, **researchers said**.

(а)

The asbestos fiber, crocidolite, is unusually resilient **once** it enters the lungs, **with** even brief exposures to it causing symptoms that show up decades later, **researchers said**.

(б)

Рис. 2 Пример аннотации с несколькими ЛСО из PDTB [16]

Among 33 men who worked closely with the substance, 28 have died -- more than three times the expected number. **Four of the five surviving workers have asbestos-related diseases, including three with recently diagnosed cancer.**

(а)

gold: EntRel | Arg1(1315..1492) | Arg2(1494..1585)
 gold: Implicit | in addition | Expansion.Conjunction | Arg1(1589..1698) | Arg2(1700..1813)
 gold: Implicit | and | Expansion.Conjunction | Arg1(1589..1813) | Arg2(1815..1922)

(б)

Рис. 3 Пример аннотации с имплицитными ЛСО [16]

¹Подробнее об архитектуре НБДК, ее функциональных возможностях и используемых в ней метках см. [18, 19].

Таблица 1 Аннотация из НБДК для коннектора *то есть*

Контекст коннектора в оригинале	Коннектор в оригинале и его признаки	Контекст коннектора в переводе	Коннектор в переводе и его признаки
Если он хотел жить по-своему, то есть лежать молча, дремать <i>или</i> ходить по комнате, Алексеева как будто не было тут	то есть <переформулирование> <без предикации> <начальная> <p CNT q> <CNT> <SubCNT> <SuperCNT>	S'il voulait continuer de vivre à sa manière, c'est-à-dire rester couché en silence, <i>somnoler</i> <i>ou</i> marcher de long en large dans la chambre, c'était comme si Alexéev n'était pas là	c'est-à-dire <переформулирование> <без предикации> <начальная> <p CNT q> <CNT> <SuperCNT> <SubCNT>

ниже — *то есть*, а на еще более низком уровне — *или*.

4 Корпуса, совмещающие разметку дискурсивных отношений и их показателей: RST-SC, GUM и НБДИ ЛСО

Изначально, как было показано, корпуса, созданные на основе TPC, не предусматривали аннотирование показателей РО. Эту задачу решает корпус RST-SC. В качестве исходного материала берутся существующие в корпусе RST Discourse Treebank (RST-DT) графы, к которым добавляются аннотации для показателей, благодаря которым каждое РО может быть идентифицировано. В число показателей помимо коннекторов включаются показатели разнообразной природы: лексические, морфологические (временные формы), семантические (синонимия, антонимия и др.), синтаксические (различные виды придаточных и др.), графические (знаки препинания и др.) и т. д. [20].

Аннотации связаны не непосредственно с фрагментом текста, а с отношением, прикрепленным к узлу дерева. Для одного и того же РО возможно аннотирование нескольких показателей, соответствующих разным словам, а некоторые сигналы не соответствуют словам в тексте (например, разбиение на абзацы, знаки пунктуации и др.). Так, в «John is tall. Mary is short» РО контраста выражено двумя видами показателей: лексическими (антонимичными прилагательными *tall* и *short*) и синтаксическим (синтаксический параллелизм фрагментов текста) [20, с. 153–154].

Результат аннотирования показателей РО представлен в виде таблицы (которая может занимать

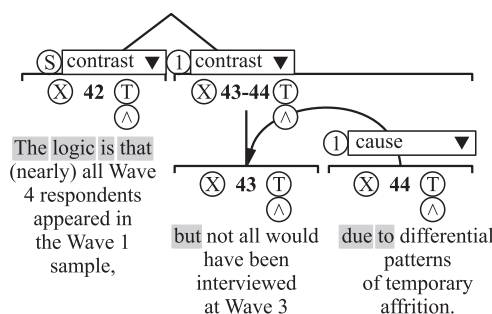


Рис. 4 Аннотация РО и их показателей в rstWeb [22, с. 57]

несколько страниц), отражающей наличие одного или нескольких показателей, принадлежность показателя к классу (лексический, морфологический и т. д.), сам показатель и его функцию в обеспечении связности текста.

Основной вклад другого ресурса rstWeb [21] заключается в предоставлении нового типа аннотации в рамках RST. Несмотря на то что новый инструмент аннотирования разработан на основе существующего интерфейса RST, он устраняет существенный пробел в аннотировании, который не смог устранить RST-SC: он позволяет связать разметку РО и их показателей в едином формате аннотации (рис. 4).

В отличие от аннотации на рис. 1, где размечены только РО, в аннотации на рис. 4 размечаются и показатели (выделены серым на рис. 4, желтым — в ресурсе). Для этого используется кнопка S, расположенная рядом с РО и позволяющая выбрать соответствующий показатель из списка¹. Аннотации доступны в находящемся в свободном доступе корпусе GUM, созданном в Джорджтаунском университете (Вашингтон) [23].

Надкорпусная база данных иерархии ЛСО была создана в Институте проблем информатики РАН для решения двух задач аннотирования, которые

¹Кнопка «X» служит для очистки родительского узла, «T» — для добавления фрагмента текста, «^» — для создания РО. Риторические отношения редактируются при помощи операции drag-and-drop.

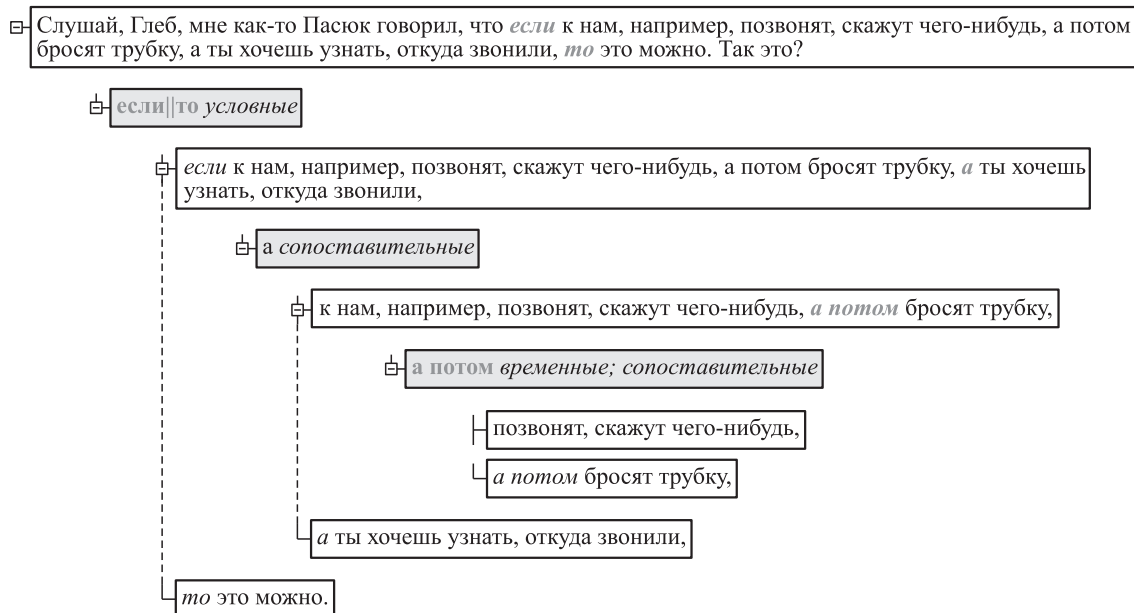


Рис. 5 Аннотация из НБДИ ЛСО

Таблица 2 Возможности GUM и НБДИ ЛСО

База данных	Аннотирование			Число языков	Поиск	Хранение информации	Статистика
	Отношения	Показатели	Видоизменение исходного текста				
Корпус GUM	Весь спектр отношений связности (РО)	Весь спектр языковых и неязыковых единиц	Нет	Один	Нет	Хранение аннотаций и истории ее состояния (изменения, удаление, восстановление) на сервере, доступном зарегистрированным пользователям, а также возможность установки программного обеспечения на персональный компьютер	Нет
НБДИ ЛСО	ЛСО, потенциально выражаемые коннекторами	Коннекторы	Видоизменять аннотируемые контексты (в частности, создавать контексты с пропущенными фрагментами), а также работать с пустыми контекстами (содержащими только коннектор)	Два	Поиск по ЛСО, показателю, признакам контекста употребления показателя	Хранение аннотаций и истории ее состояния (изменения, удаление, восстановление) на сервере, доступном зарегистрированным пользователям	Статистика по любому из параметров поиска, а также SQL-запросы

недоступны в ранее созданной НБДК: отражение иерархии ЛСО, обеспечивающих связность текста, и визуализация границ фрагментов текста, связанных ЛСО¹ (рис. 5). Верхний уровень содержит кон-

текст употребления коннектора в том виде, в каком он зафиксирован в НБДК. Однако лишь часть его непосредственно участвует в ЛСО условия *если||то*, что отражено в узлах, содержащих компоненты дан-

¹Подробнее об архитектуре НБДИ ЛСО см. [24].

ного коннектора. Во фрагменте текста, вводимого первой частью коннектора, находится ЛСО сопоставления, вводимое *a*, а его левый контекст содержит два ЛСО — сопоставления и времени, оформляемых неоднословным коннектором *a потом*. Таким образом, ЛСО, выражаемое *a потом*, «встраивается» в ЛСО, выражаемое *a*, которое, в свою очередь, «встраивается» в ЛСО, выражаемое *если||то*. Эту иерархию ЛСО и отражает приведенный на рис. 5 граф.

Хотя аннотирование в корпусе GUM и в НБДИ ЛСО ставят перед собой схожие задачи: аннотирование как самого отношения, так и его показателя, эти два ресурса имеют существенные различия в предоставляемых пользователю возможностях (табл. 2).

5 Заключение

Лингвистический ресурс НБДИ ЛСО не имеет отечественных и зарубежных аналогов по своим функциональным возможностям. Помимо поиска и получения статистических данных он позволяет исследователям проводить контрастные исследования, сопоставляя тексты на двух языках. Это дает возможность, с одной стороны, выявлять универсальные закономерности в дискурсивной организации текста, а с другой — лингвоспецифичные черты, характеризующие тот или иной язык, особенно в зоне функционирования показателей отношений связности.

Литература

1. Гончаров А. А., Инькова О. Ю. Извлечение знаний о средствах выражения логико-семантических отношений при помощи Надкорпусной базы данных // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 2. С. 96–103.
2. Das D., Taboada M. RST Signalling Corpus Annotation Manual. 2014. https://www.sfu.ca/~mtaboada/docs/publications/RST_Signalling_Corpus_Annotation_Manual.pdf.
3. Penn Discourse Treebank Project (PDTB). <https://www.seas.upenn.edu/~pdtb>.
4. Ru-RSTreebank: Русскоязычный дискурсивный корпус. <https://rstreebank.ru>.
5. Carlson L., Marcu D. Discourse Tagging Reference Manual: Technical Report ISI-TR-545. — Marina del Rey, CA, USA: The University of Southern California, 2001. 87 p.
6. Carlson L., Marcu D., Okurowski M. E. Building a discourse-tagged corpus in the framework of rhetorical structure theory // Current directions in discourse and dialogue / Eds. J. van Kuppevelt, R. Smith. — Dordrecht: Kluwer Academic Publs., 2003. P. 85–109.
7. Mann W., Thompson S. Rhetorical structure theory: Towards a functional theory of text organization // Text, 1988. Vol. 8. Iss. 3. P. 243–281. doi: 10.1515/text.1.1988.8.3.243.
8. Руководство по разметке текстов (на основе теории риторических структур). — Ru-RSTreebank, 2019. https://docs.google.com/document/d/1wd-sgGylo5AQq2lPj6jWa_QmU0fUohXj48qsfVDgcBs/edit#heading=h.gjdgxs.
9. Рассказы о сновидениях: Корпусное исследование устного русского дискурса / Под ред. А. А. Кибрика, В. И. Подлесской. — М.: Языки славянских культур, 2009. 736 с.
10. Инькова О. Ю. Логико-семантические отношения: проблемы классификации // Связность текста: Ме-реологические логико-семантические отношения. — М.: Языки славянских культур, 2019. С. 11–98.
11. Prasad R., Miltsakaki E., Dinesh N., Lee A., Joshi A., Webber B. L. The Penn Discourse Treebank 1.0 Annotation Manual. — Philadelphia, PA, USA: Institute for Research in Cognitive Science, University of Pennsylvania, 2006. Technical Report No. IRCS-06-01.
12. Prasad R., Webber B., Lee A., Joshi A. The Penn Discourse Treebank 3.0 Annotation Manual. — Philadelphia, PA, USA: Linguistic Data Consortium, University of Pennsylvania, 2019. 81 p. <https://catalog.ldc.upenn.edu/docs/LDC2019T05/PDTB3-Annotation-Manual.pdf>.
13. Prasad R., Joshi A., Webber B. Realization of discourse relations by other means: Alternative lexicalizations // 23rd Conference (International) on Computational Linguistics: Posters Volume. — Beijing, 2010. P. 1023–1031. <https://www.aclweb.org/anthology/C10-2118.pdf>.
14. Prasad R., Miltsakaki E., Dinesh N., Lee A., Joshi A. The Penn Discourse Treebank 2.0 Annotation Manual. — Philadelphia, PA, USA: Institute for Research in Cognitive Science, University of Pennsylvania, 2008. Technical Report No. IRCS-08-01. https://repository.upenn.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1203&context=ircs_reports.
15. Инькова-Манзотти О. Ю. Коннекторы противопоставления во французском и русском языках: сопоставительное исследование. — М.: МГУ-Информэлектро, 2001. 432 с.
16. PennDiscourse Treebank Project (PDTB). <https://www.seas.upenn.edu/~pdtb>.
17. Национальный корпус русского языка (НКРЯ). <https://ruscorpora.ru/new>.
18. Inkova O., Popkova N. Statistical data as information source for linguistic analysis of Russian connectors // Информатика и её применения, 2017. Т. 11. Вып. 3. С. 123–131.
19. Инькова О. Ю. Лингвоспецифичность коннекторов: методы и параметры описания // Семантика коннекторов: контрастное исследование / Под ред. О. Ю. Иньковой. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2018. С. 5–23.

20. Das D., Taboada M. RST Signalling Corpus: A corpus of signals of coherence relations // Lang. Resour. Eval., 2018. Vol. 52. P. 149–184.
21. Zeldes A. rstWeb — a browser-based annotation interface for rhetorical structure theory and discourse relations // NAACL–HLT Proceedings. — San Diego, CA, USA: Association for Computational Linguistics, 2016. P. 1–5.
22. Gessler L., Liu J., Zeldes A. A Discourse Signal Annotation System for RST Trees // Discourse Relation Parsing and Treebanking Proceedings. — Minneapolis, MN, USA: Association for Computational Linguistics, 2019. P. 56–61. doi: 10.18653/v1/W19-2708.
23. GUM: The Georgetown University Multilayer Corpus. <https://corpling.uis.georgetown.edu/gum/annotations.html>.
24. Дурново А. А., Инькова О. Ю., Попкова Н. А. Архитектура базы данных иерархии логико-семантических отношений // Системы и средства информатики, 2022. Т. 32. № 1. С. 114–125.

Поступила в редакцию 07.04.21

PRINCIPLES OF DESCRIBING MARKERS OF LOGICAL-SEMANTIC RELATIONS AND THEIR HIERARCHY

A. A. Durnovo¹, O. Yu. Inkova^{1,2}, and N. A. Popkova¹

¹Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

²University of Geneva, 22 Bd des Philosophes, CH-1205 Geneva 4, Switzerland

Abstract: The article deals with annotation strategies in corpora with discourse markup. It is shown that Rhetorical Structure Theory (RST)-based corpora only contain annotations of coherence relations, or rhetorical relations (RR). In contrast, the Penn Discourse Treebank (PDTB) of the University of Pennsylvania annotates relations markers, as does the Supracorpora Database of Connectives. The RST Signaling Corpus (RST-SC), also based on RST, has been shown to annotate RR markers, but cannot combine the markup of RRs and their markers in a single annotation. This problem is solved by the GUM corpus and the Supracorpora Database of Hierarchy of Logical-Semantic Relations. The latter has a few advantages: the ability to search, to obtain statistics, and to form bilingual annotations. This makes it possible to identify both universal phenomena in the discursive organization of the text and language-specific phenomena.

Keywords: supracorpora database; corpus of texts’ annotation; discourse relations; connective

DOI: 10.14357/19922264220207

Acknowledgments

The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (CKP “Informatics”) of FRC CSC RAS (Moscow) and supported by the Switzerland–Russia Research Preparation Grant “Annotation methodology in a supracorpora database of connectives” of the State Secretariat for Education, Research, and Innovation.

References

1. Goncharov, A. A., and O. Yu. Inkova. 2021. Izvlechenie znaniy o sredstvakh vyrazheniya logiko-semanticheskikh otnosheniy pri pomoshchi Nadkorpusnoy bazy danykh [Extracting knowledge about means of expression of logical-semantic relations from the Supracorpora database]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* (15)2:96–103.
2. Das, D., and M. Taboada. 2014. RST Signalling Corpus annotation manual. Available at: https://www.sfu.ca/~mtaboada/docs/publications/RST_Signalling_Corpus_Annotation_Manual.pdf (accessed April 22, 2022).
3. Penn Discourse Treebank Project (PDTB). Available at: <https://www.seas.upenn.edu/~pdtb/> (accessed April 22, 2022).
4. Ru-RSTreebank: Russkoyazychnyy diskursivnyy korpus [Ru-RSTreebank: Russian discourse corpus]. Available at: <https://rstreebank.ru/> (accessed April 22, 2022).
5. Carlson, L., and D. Marcu. 2001. *Discourse tagging reference manual*. 87 p. Available at: <ftp://128.9.176.20/isipubs/tr-545.pdf> (accessed April 22, 2022).
6. Carlson, L., D. Marcu, and M. E. Okurowski. 2003. Building a discourse-tagged corpus in the framework of rhetorical structure theory. *Current directions in discourse and dialogue*. Eds J. van Kuppevelt and R. Smith. Dordrecht: Kluwer Academic Pubs. 85–109.
7. Mann, W. C., and S. A. Thompson. 1988. Rhetorical structure theory: Towards a functional theory of text organization. *Text* 8(3):243–281. doi: 10.1515/text.1.1988.8.3.243.
8. Ru-RSTreebank. 2019. Rukovodstvo po razmetke tekstov (na osnove teorii ritoricheskikh struktur) [Text

- Markup Guide (based on the theory of rhetorical structures)]. Available at: https://docs.google.com/document/d/1wd-sgGylo5AQq21Pj6jWa_QmU0fUohXj48qsfVDgcBs/edit#heading=h.gjdgxs (accessed April 22, 2022).
9. Kibrik, A. A., and V. M. Podlesskaya, eds. 2009. *Rasskazy o snovideniyakh: Korpusnoe issledovanie ustnogo russkogo diskursa* [Night dream stories. A corpus study of spoken Russian discourse]. Moscow: LRC Publishing House. 736 p.
 10. Inkova, O. Yu. 2019. Logiko-semanticheskie otnosheniya: Problemy klassifikatsii [Logical-semantic relations: Classification problems]. *Svyaznost' teksta: mereologicheskije logiko-semanticheskie otnosheniya* [Text coherence: Mereological logical semantic relations]. Moscow: LRC Publishing House. 11–98.
 11. Prasad, R., E. Miltsakaki, N. Dinesh, A. Lee, A. Joshi, and B. L. Webber. 2006. The Penn Discourse Treebank 1.0 Annotation Manual. Philadelphia, PA: Institute for Research in Cognitive Science, University of Pennsylvania. Technical Report No. IRCS-06-01. Available at: https://repository.upenn.edu/ircs_reports/3/ (accessed April 22, 2022).
 12. Prasad, R., B. Webber, A. Lee, and A. Joshi. 2019. The Penn Discourse Treebank 3.0 Annotation Manual. Philadelphia, PA: Linguistic Data Consortium, University of Pennsylvania. 81 p. Available at: <https://catalog.ldc.upenn.edu/docs/LDC2019T05/PDTB3-Annotation-Manual.pdf> (accessed April 22, 2022).
 13. Prasad, R., A. Joshi, and B. Webber. 2010. Realization of discourse relations by other means: Alternative lexicalizations. *23rd Conference (International) on Computational Linguistics Proceedings: Posters Volume*. Beijing. 1023–1031. Available at: <https://www.aclweb.org/anthology/C10-2118.pdf> (accessed April 22, 2022).
 14. Prasad, R., E. Miltsakaki, N. Dinesh, A. Lee, and A. Joshi. 2008. The Penn Discourse Treebank 2.0 Annotation Manual. Philadelphia, PA: Institute for Research in Cognitive Science, University of Pennsylvania. Technical Report IRCS-08-01. Available at: https://repository.upenn.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1203&context=ircs_reports. (accessed June 9, 2022).
 15. Inkova-Manzotti, O. Yu. 2001. *Konnektory protivopostavleniya vo frantsuzskom i russkom yazykakh. Sopotavitel'noe issledovanie* [Connectives of opposition in French and Russian. A comparative study]. Moscow: Informelektro. 432 p.
 16. Penn Discourse Treebank Project (PDTB). Available at: <https://www.seas.upenn.edu/~pdtb/> (accessed April 22, 2022).
 17. Natsional'nyy korpus russkogo yazyka (NKRYa) [Russian National Corpus (RNC)]. Available at: <http://www.ruscorpora.ru> (accessed April 22, 2022).
 18. Inkova, O., and N. Popkova. 2017. Statistical data as information source for linguistic analysis of Russian connectors. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 11(3):123–131.
 19. Inkova, O. Yu. 2018. Lingvospetsifichnost' konnektorov: metody i parametry opisaniya [Language specificity of connectives methods and parameters of description]. *Semantika konnektorov: kontrastivnoe issledovanie* [Semantics of connectives: A contrastive study]. Ed. O. Yu. Inkova. Moscow: TORUS PRESS. 5–23.
 20. Das, D., and M. Taboada. 2018. RST signalling corpus: A corpus of signals of coherence relations. *Lang. Resour. Eval.* 52:149–184.
 21. Zeldes, A. 2016. rstWeb — a browser-based annotation interface for rhetorical structure theory and discourse relations. *NAACL-HLT Proceedings*. San Diego, CA: Association for Computational Linguistics. 1–5.
 22. Gessler, L., J. Liu, and A. Zeldes. 2019. A discourse signal annotation system for RST trees. *Discourse Relation Parsing and Treebanking Proceedings*. Minneapolis, MN: Association for Computational Linguistics. 56–61. doi: 10.18653/v1/W19-2708.
 23. GUM: The Georgetown University Multilayer Corpus. Available at: <https://corpling.uis.georgetown.edu/gum/annotations.html> (accessed April 22, 2022).
 24. Durnovo, A. A., O. Yu. Inkova, and N. A. Popkova. 2022. Arkhitektura bazy dannykh iyerarkhii logiko-semanticheskikh otnosheniy [Database of hierarchies of logical-semantic relations: Architecture]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* (32)1:114–125.

Received April 7, 2021

Contributors

Durnovo Aleksandr A. (b. 1949) — leading programmer, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; duralex49@mail.ru

Inkova Olga Yu. (b. 1965) — Doctor of Science in philology, senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; faculty member, University of Geneva, 22 Bd des Philosophes, CH-1205 Geneva 4, Switzerland; olyainkova@yandex.ru

Popkova Nataliia A. (b. 1992) — junior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; natasha_popkova@mail.ru

СРЕДОВЫЕ МОДЕЛИ ИЗВЛЕЧЕНИЯ ИЗ ТЕКСТА НОВЫХ ТЕРМИНОВ И ИНДИКАТОРОВ НАСТРОЕНИЙ*

И. М. Зацман¹, О. В. Золотарев², А. Х. Хакимова³

Аннотация: Рассматриваются модели информатики, названные средовыми, так как они создаются в соответствии с парадигмой деления предметной области информатики на среды различной природы. Основная идея создания средовых моделей состоит в явном использовании трех и более сред, границ между ними, а также распределении этапов информационных технологий (ИТ) по средам и границам при моделировании ИТ. Сопоставляются две средовые модели, ориентированные на проектирование ИТ и автоматизированных систем (АС), обеспечивающих извлечение индикаторов настроений и новых терминов сочетанием этапов программного и экспертного анализа текстов. Первая модель, предназначенная для описания процессов извлечения только новых терминов, получила название информационно-технологически ориентированной модели (модель ИТО). Вторая модель описывает процессы извлечения индикаторов настроений из текста сообщений пользователей социальных сетей и, одновременно, новых терминов, если они встретились в этом тексте. Она получила название модель ИТО-Sent. Основная цель статьи состоит в сопоставительном описании этих двух моделей.

Ключевые слова: индикаторы настроений; извлечение новых терминов; модель ИТО; анализ текстов; модель ИТО-Sent; проектирование информационных технологий

DOI: 10.14357/19922264220208

1 Введение

Сопоставляемые модели ИТО и ИТО-Sent применяются в проекте РФФИ № 20-04-60185 при проектировании ИТ, используемой для решения двух задач: (1) извлечения новых терминов из текстов научных документов и (2) поиска индикаторов настроений (= терминов-маркеров) в текстах сообщений пользователей социальных сетей, обсуждающих пандемию нового коронавируса. При решении первой задачи эта технология позволяет обнаружить новые термины, представляющие научное знание и его эволюцию во времени. При решении второй задачи она помогает экспертам сопоставить понимание пользователями социальных сетей вопросов, относящихся к пандемии, с эволюционирующим научным знанием, найти индикаторы настроений и определить отношение пользователей к обсуждаемым вопросам. Отметим, что появление новых терминов обусловлено, как правило, изменением научного знания о пандемии.

Анализ настроений и определение их индикаторов (sentiment analysis) — это одно из направле-

ний исследований в области обработки естественного языка. Под индикаторами настроений обычно подразумевают эмоционально⁴ окрашенные слова и выражения, в том числе оценки, высказанные автором в тексте (в проекте РФФИ это вопросы, относящиеся к пандемии нового коронавируса; индикаторы настроений отражают, например, степень психологической напряженности пользователей социальных сетей, которые их обсуждают).

Анализ текста для извлечения индикаторов настроений может быть проведен на уровне леммы, нескольких эмоционально окрашенных лексем (связанных друг с другом семантическими отношениями), предложения и всего документа [3]. В процессе извлечения индикаторов настроений, как правило, создается тональный словарь терминов-маркеров (sentiments dictionary), которые могут быть эмоционально окрашенными словами или символами, обозначающими эмоции [4]. В своей простейшей форме тональный словарь представляет собой список терминов-маркеров с присвоенными значениями показателя настроения (положительное, нейтральное, отрицательное).

* Исследование выполнено с использованием ЦКП «Информатика» ФИЦ ИУ РАН при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-04-60185).

¹ Федеральное исследовательское учреждение «Информатика и управление» Российской академии наук, izatsman@yandex.ru

² Институт информационных систем и инженерно-компьютерных технологий Российского нового университета, ol-zolot@yandex.ru

³ Институт информационных систем и инженерно-компьютерных технологий Российского нового университета, aida_khatif@mail.ru

⁴ Психолог Пол Экман выделяет шесть основных эмоций: радость (счастье), печаль, страх, гнев, удивление и отвращение [1, 2].

Описание процесса создания модели ИТО как теоретической основы проектирования ИТ извлечения нового знания из текстов дано в работах [5–7]. Ее вариант, адаптированный для одновременного извлечения новых терминов и индикаторов настроений, названный ИТО-Sent, рассмотрен в работе [8]. Цель настоящей статьи состоит в сопоставительном описании этих моделей.

2 Сопоставление моделей

Модель ИТО первоначально была создана в результате увеличения с двух до трех числа сред (по сравнению с моделью генерации знания (= модель SECI) [9–11], но в которой среды не эксплицированы) за счет добавления цифровой среды для решения двух задач [5, 6, 12]:

- (1) извлечения из текстов новых значений исследуемых языковых единиц;
- (2) извлечения из текстов новых терминов для создания и обновления базы медицинских знаний о терминологических портретах заболеваний.

При создании модели ИТО информатика позиционируется как четвертая отрасль научного знания при делении всей его совокупности на четыре отрасли [13, 14]. Применение такого позиционирования дало возможность использовать парадигму

средового деления предметной области информатики (ПОИ), соотнести процессы генерации знания и информационные трансформации со средами ПОИ и границами между ними [15–17]. Основная идея создания этой модели состоит в явном использовании трех сред ПОИ различной природы (ментальной, информационной и цифровой).

В задаче извлечения новых терминов из текстов документов базы данных PubMed и терминов-маркеров из сообщений социальной сети Twitter описание этих трех сред выглядит следующим образом [8]:

- (1) ментальная среда содержит концепты терминов как понятий человеческого знания в умах (сознании) экспертов, которые формируются в рамках той или иной вербальной знаковой системы (см. обусловленность концептов используемыми знаковыми системами в описаниях к рис. 2 в работе [17] и рис. 1 и 2 в работе [18]);
- (2) информационная среда включает в себя перцептивные (= сенсорно воспринимаемые) формы представления концептов знания человека, образующие тексты, таблицы, диаграммы, формулы и пр.;
- (3) цифровая среда охватывает коды текстов документов и сообщений в компьютерах, телекоммуникационных сетях, базах данных и пр.

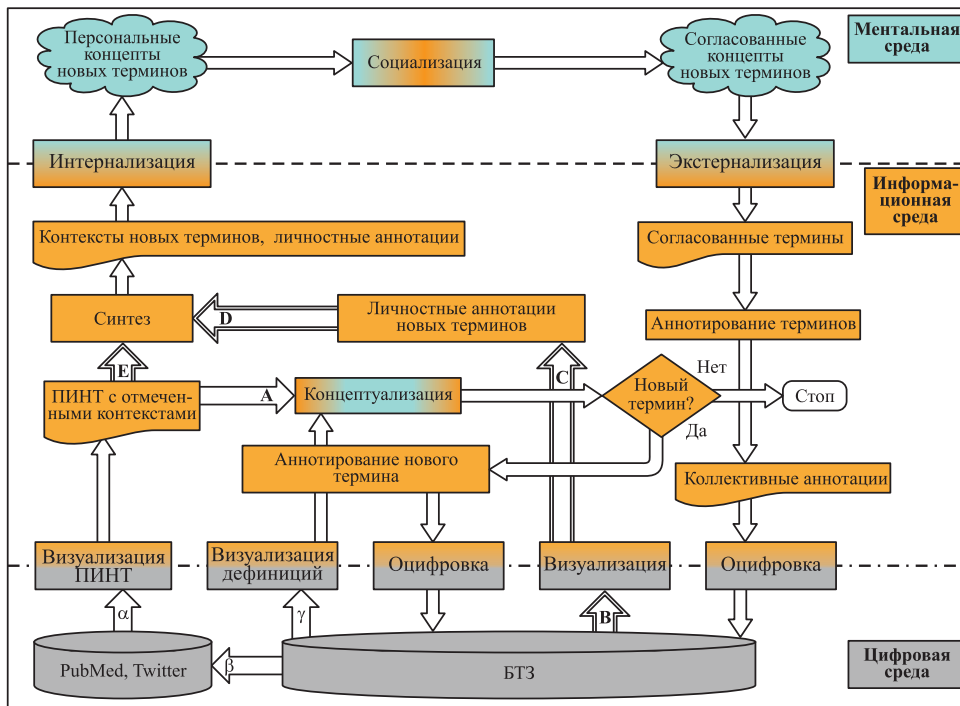


Рис. 1 Модель ИТО извлечения новых терминов из текстов и их социализации

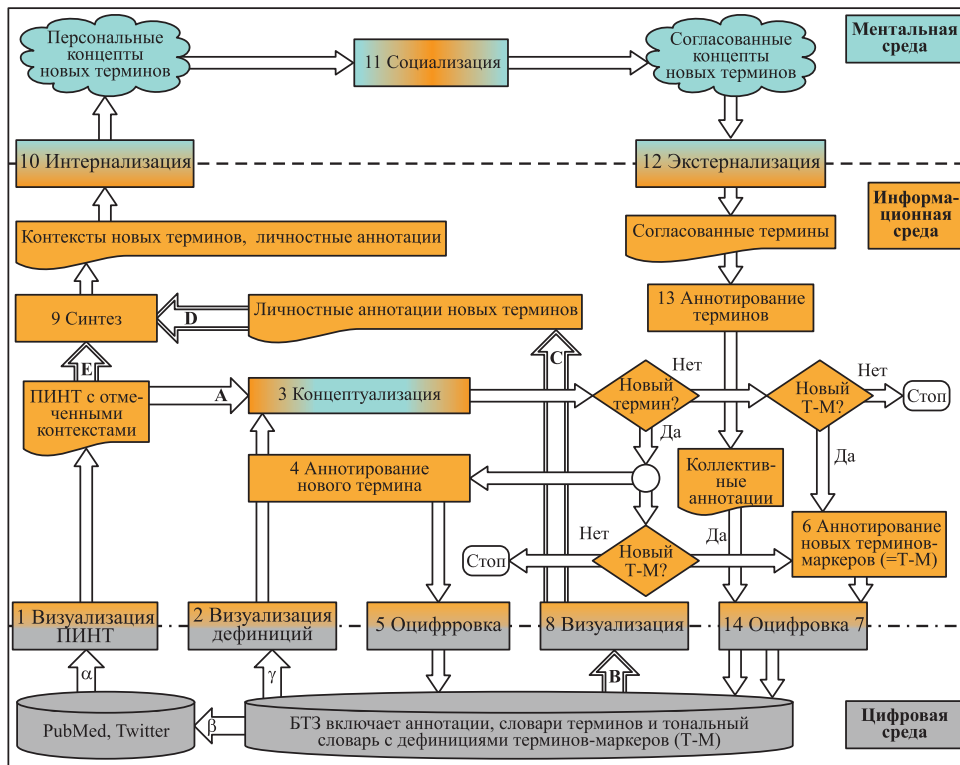


Рис. 2 Модель ITO-Sent (числовая нумерация процессов используется в разд. 4)

Модель ITO включает эти три среды и соотносит процессы извлечения новых терминов из текстов с тремя средами и границами между ними (рис. 1). При выполнении этих процессов для того, чтобы найти новые термины, сначала программно формируется массив документов как потенциальных источников новых терминов (ПИНТ), что обозначено стрелкой с греческой буквой α на рис. 1 и 2. При его формировании используются словари уже известных терминов из базы терминологических знаний (БТЗ), что обозначено стрелкой с греческой буквой β (словари описаны в разд. 3). В отобранных документах программно отмечаются контексты потенциально новых терминов (ПНТ), которые затем визуализируются. Каждый отмеченный контекст служит входом операции концептуализации (стрелка А), при выполнении которой эксперт сравнивает этот контекст с найденными дефинициями существующих терминов, извлечение которых из словарей обозначено стрелкой с греческой буквой γ .

Если термин признается экспертом новым, то его аннотация с *личной дефиницией* вводится в БТЗ, включающую словари известных терминов и аннотации новых терминов с их дефинициями, сформированными экспертами. В противном случае обработка этого контекста ПНТ в модели ITO прекращается (но она продолжается в модели ITO-Sent, см. рис. 2).

Отметим, что если бы в проекте использовалась модель SECI, то новые термины с коллективными (= согласованными в коллективе экспертов) дефинициями служили бы входом процесса синтеза, а не вводились бы в БТЗ. Базы знаний в модели SECI отсутствуют [8–11]. В качестве источника личного знания модель SECI указывает коллективное знание, не определяя его первоисточники. Модель ITO содержит базу данных первоисточников в цифровой среде, в которой и осуществляется поиск ПИНТ (см. разд. 4).

Для того чтобы сформировать коллективную аннотацию нового термина согласно модели ITO, из БТЗ извлекается личностная аннотация эксперта и она визуализируется, что обозначено стрелками В и С. Затем, в процессе синтеза, эта аннотация объединяется (обозначено стрелками D и E) с контекстом нового термина (КНТ), из которого этот термин был извлечен в процессе концептуализации. Его дефиниции согласовываются в коллективе экспертов и ими формируется коллективная аннотация, которая вводится в БТЗ.

Отметим, что процесс концептуализации выполняется для *всех* контекстов ПНТ, что условно обозначено *одинарным контуром* стрелки А на входе этого процесса. Однако на вход процесса синтеза поступают только те контексты, которые *действительно оказались источниками новых терминов* (т. е.

КНТ), что условно обозначено *двойным контуром* стрелки Е на входе процесса синтеза. Двойной контур стрелок В–Е на рис. 1 и 2 подчеркивает одновременное использование контекстов и соответствующих личностных аннотаций новых терминов в операции синтеза. Новизна термина становится ясной только после завершения концептуализации его контекста и сопоставления его смысла в этом контексте с дефинициями словарей уже известных терминов. После операции синтеза процессы социализации (согласования смыслового содержания нового термина) и экстернализации полностью соответствуют модели SECI [9–11], но есть одно существенное отличие после выполнения этих двух процессов: согласованная аннотация нового термина вводится в БТЗ.

Между моделями ИТО и SECI существуют и другие отличия [5]. Во-первых, модель ИТО различает два вида представления явных знаний: словами и компьютерными кодами. Во-вторых, модель ИТО включает четыре дополнительных процесса: визуализацию, оцифровку, концептуализацию и аннотирование, которых нет в модели SECI. В-третьих, модель ИТО включает стандарт для определения новизны терминов (на рис. 1 и 2 это словари БТЗ). И, наконец, модель ИТО является теоретической основой разработки ИТ для целенаправленного извлечения нового знания из текстов. И эта модель уже используется для проектирования таких технологий [6, 7, 12, 19], но без извлечения терминов-маркеров эмоций.

В проекте РФФИ № 20-04-60185 используется терминологическое сопоставление научной системы знаний о пандемии нового коронавируса и знаний о ней пользователей социальных сетей, а также выполняется извлечение терминов-маркеров в целях оценки динамики психологического состояния пользователей социальных сетей. Следовательно, из текстов необходимо извлекать не только новые термины, но также и термины-маркеры. Поэтому в рамках этого проекта в модель ИТО добавляется тональный словарь терминов-маркеров (словарь Т-М). Кроме того, в модель добавляется процесс аннотирования новых терминов-маркеров в информационной среде (см. процесс б на рис. 2).

В модели ИТО после процесса концептуализации обработка ПНТ с его контекстом прекращается, если термин не признается новым (см. рис. 1). В модели ИТО-Sent его обработка продолжается: если эксперт находит в контексте термин-маркер эмоций (процесс его поиска не показан на рис. 2), то он проверяется на новизну по словарю Т-М, который является частью БТЗ. В случае его новизны он ан-

отируется вместе с контекстом (см. вертикальную стрелку «да» на входе процесса б; связь процессов проверки и аннотирования с БТЗ не показана), аннотация оцифровывается и вместе с дефиницией термина-маркера добавляется в тональный словарь Т-М. Такая же обработка согласно модели ИТО-Sent выполняется и для контекстов новых терминов (см. горизонтальную стрелку «да»).

3 Словари базы терминологических знаний

Согласно модели ИТО-Sent, БТЗ содержит словари известных терминов для экспертной оценки новизны тех ПНТ, которые извлекаются из текстов. БТЗ может включать как сами словари, так и ссылки на них. При проектировании технологии извлечения новых англоязычных терминов из текстов документов базы данных PubMed в качестве эталона новизны применялись два словаря Merriam-Webster [20, 21]. Для оценки новизны терминов в русскоязычных документах и твитах применяется словарь Ожегова [22], который насчитывает более 100 000 слов. Словарь Merriam-Webster [20] применяется для оценки новизны слов в англоязычных твитах. Если термин отсутствует в соответствующем словаре, то он считается новым. В проектируемой ИТ в БТЗ включены ссылки на вышеперечисленные словари, содержащие определения терминов. Для доступа к определениям терминов используются именно эти ссылки [20–22].

Например, слов «антипрививочник» и «антипрививочница» нет в словаре Ожегова. Поэтому им присваивается статус «новый термин». В то же время термин «anti-vaxxer» появился в английском языке более 20 лет назад и для него уже есть дефиниция («лицо, которое выступает против использования вакцин или нормативных актов, предписывающих вакцинацию»¹ [23]), поэтому он не считается новым. Отметим, что дефиниции медицинского словаря Merriam-Webster [21] используются в проекте для оценки новизны научной лексики по медицине.

В проекте РФФИ значение показателя настроений присваивается каждому термину-маркеру на основе тернарной шкалы полярностей, используемой в информационном ресурсе Sentiment140 при аннотировании твитов с терминами-маркерами [24]. Этот ресурс содержит аннотации 1 600 000 твитов, извлеченных с помощью Twitter API. Каждая аннотация содержит одно из трех значений показателя настроений по тернарной шкале полярностей (0 = отрицательный; 2 = нейтраль-

¹ В оригинале «a person who opposes the use of vaccines or regulations mandating vaccination» [23].

ный; 4 = положительный), а также идентификатор твита, его текст и дату создания аннотации. Отметим, что при формировании ресурса Sentiment140 применялся новый подход к автоматической классификации настроений в сообщениях с применением алгоритмов машинного обучения [25].

В рамках проекта РФФИ был создан тональный словарь терминов-маркеров по социально-психологической тематике с указанием для каждого из них одного, двух или трех значений показателя настроений. В процессе аннотирования терминов-маркеров (см. рис. 2) им присваиваются значения показателей с учетом их контекстов на основе тернарной шкалы полярностей. В разных контекстах одному и тому же термину-маркеру могут быть присвоены разные значения показателя настроений. Поэтому в тональном словаре термин-маркер может иметь более одного значения показателя. Для каждого значения всех показателей в словаре эмоционально окрашенной лексики также указана его частотность [26], которая определена по экспериментальному массиву, содержащему 12 193 твита.

4 Информационная технология

На основе модели ITO-Sent в рамках проекта РФФИ разрабатывается ИТ, этапы которой соответствуют 17 процессам, распределенным по трем средам и границам между ними. Они обозначены прямоугольниками с числами от 1 до 14 и стрелками α , β и γ на рис. 2. Последние три процесса обозначены стрелками, чтобы упростить эти рисунки. Ниже кратко описаны технологические этапы, соответствующие 17 процессам модели, представленной на рис. 2.

Выполнение поискового запроса в цифровой среде сообщений Twitter (документов PubMed), сформированного экспертом, а также программный выбор из них терминов, сравнение выбранных терминов со словарями традиционных терминов, составление списка ПНТ и определение их контекстов в электронных документах/сообщениях, позиционируемых как ПИНТ, на рис. 1 и 2 обозначены стрелкой α , а обращение к словарям традиционных терминов — стрелкой β .

Визуализация электронных ПИНТ с отмеченными контекстами ПНТ обозначена на рис. 2 прямоугольником с цифрой 1 (далее в скобках указаны идентификаторы прямоугольников и стрелок на рис. 2), а его передача на этап концептуализации (3), выполняемой экспертом с использованием дефиниций словарей (γ), обозначена стрелкой А на рис. 1 и 2. Если термин в контексте некоторого ПИНТ позиционируется экспертом как новый,

то он аннотируется (4), его аннотация оцифровывается (5) и она вводится в БТЗ. Если в этом же контексте есть новый термин-маркер, то он аннотируется экспертом (6), эта личностная аннотация оцифровывается (7) и вводится в БТЗ. В противном случае обработка этого контекста прекращается. Если термин в этом же контексте позиционируется экспертом как синоним известного термина, но в контексте существует новый термин-маркер, то он аннотируется (6), его аннотация оцифровывается (7) и вводится в БТЗ. В противном случае обработка этого контекста прекращается.

Электронные личностные аннотации извлекаются из БТЗ (В). Аннотации визуализируются (8), объединяются (9) с контекстом аннотированного термина (С, D, E), анализируются и затем интерпретируются экспертами (10) в целях формирования согласованного понимания термина в процессе его социализации (11). Если экспертам это удастся (противоположный случай не показан на рис. 1 и 2), то термину присваивается статус согласованного. При этом границы его контекста могут быть изменены в процессе экстернализации (12) согласованного концепта. Суть процесса экстернализации заключается в формировании экспертами коллективной дефиниции этого термина на основе его контекста (на рис. 2 связь согласованного термина с его контекстом не показана). Затем эксперты формируют коллективную аннотацию термина (13), включающую его дефиницию и отношения с другими терминами. Аннотация оцифровывается (14) и вводится в БТЗ.

5 Заключение

Модель SECI используется в сфере экономики уже более 30 лет [9] для описания уже состоявшихся процессов генерации знания, протекающих в двух средах, ментальной и информационной, в частности для описания процесса «мозгового штурма». Добавление цифровой среды и потенциальных источников нового знания в ходе оцифровки модели SECI обусловило начало формирования нового теоретического направления в информатике: *средовые модели информационных технологий и систем*. В самом названии этого направления обозначено его прикладное назначение. Например, это проектирование ИТ и АС, обеспечивающих целенаправленную генерацию нового знания в процессе концептуализации потенциальных источников нового знания [5–7, 12, 19, 27, 28]. В 2012 г. средовые модели применялись при проектировании индикаторов мониторинга и оценке научно-исследовательских программ [29, 30].

Первой моделью, созданной для решения задач целенаправленной генерации нового знания, стала средовая модель ИТО и ее частные случаи. На ее основе уже создана и используется ИТ для извлечения из текстов новых значений немецких модальных глаголов [5, 7, 12, 19, 27, 28]. В стадии проектирования находятся еще две ИТ. Первая ИТ предназначена для извлечения из текстов новых терминов для создания и обновления базы медицинских знаний о терминологических профилях заболеваний [6]. Для проектирования второй ИТ, кратко описанной в разделе 4, был создан новый вариант средовой модели ИТО, получившей название «модель ИТО-Sent».

Основное отличие между моделями ИТО и ИТО-Sent (см. рис. 1 и 2) состоит в том, что в последнюю добавлен процесс аннотирования экспертами контекстов новых терминов-маркеров и включение их личностных аннотаций в словарь тональных слов. На рис. 2 не показано их согласование в коллективе экспертов, но оно может быть выполнено по аналогии с формированием коллективных аннотаций новых терминов (см. процессы 9–14).

В заключение отметим, что в соответствии с парадигмой деления предметной области информатики на среды различной природы [15–17] основная идея создания моделей ИТО и ИТО-Sent, других средовых моделей ИТ и АС заключается в явном использовании трех и более сред, границ между ними, а также в распределении технологических этапов по средам и границам при моделировании ИТ и информационных процессов в АС.

Литература

1. Ekman P. Are there basic emotions? // *Psychol. Rev.*, 1992. Vol. 99. No. 3. P. 550–553.
2. Ekman P. Basic emotions // *Handbook of cognition and emotion* / Eds. T. Dalgleish, M. Power. — Chichester, U.K.: John Wiley and Sons Ltd., 1999. P. 45–60.
3. Cruz F. L., Troyano J. A., Pontes B., Ortega F. J. Building layered, multilingual sentiment lexicons at synset and lemma levels // *Expert Syst. Appl.*, 2014. Vol. 41. No. 13. P. 5984–5994.
4. Thelwall M., Buckley K., Paltoglou G. Sentiment in Twitter events // *J. Am. Soc. Inf. Sci. Tec.*, 2011. Vol. 62. No. 2. P. 406–418.
5. Zatsman I. A model of goal-oriented knowledge discovery based on human-computer symbiosis // 16th Forum (International) on Knowledge Asset Dynamics Proceedings. — Matera, Italy: Arts for Business Institute, 2021. P. 297–312.
6. Zatsman I., Khakimova A. New knowledge discovery for creating terminological profiles of diseases // 22nd European Conference on Knowledge Management Proceedings. — Reading, U.K.: Academic Publishing International Ltd., 2021. P. 837–846.
7. Зацман И. М. Компьютерная и экономическая модели генерации нового знания: сопоставительный анализ // *Системы и средства информатики*, 2021. Т. 31. № 4. С. 84–96.
8. Зацман И. М. Модель процесса извлечения новых терминов и тональных слов из текстов // *Системы и средства информатики*, 2022. Т. 32. № 2. С. 115–127.
9. Nonaka I. The knowledge-creating company // *Harvard Bus. Rev.*, 1991. Vol. 69. No. 6. P. 96–104.
10. Nonaka I. A dynamic theory of organizational knowledge creation // *Organ. Sci.*, 1994. Vol. 5. No. 1. P. 14–37.
11. Нонака И., Такеучи Х. Компания — создатель знания / Пер. с англ. — М.: Олимп-бизнес, 2003. 384 с. (Nonaka I., Takeuchi H. The knowledge-creating company. — Oxford, NY, USA: Oxford University Press, 1995. 284 p.)
12. Зацман И. М. Проблемно-ориентированная актуализация словарных статей двуязычных словарей и медицинской терминологии: сопоставительный анализ // *Информатика и её применения*, 2021. Т. 15. Вып. 1. С. 94–101.
13. Denning P., Rosenbloom P. Computing: The fourth great domain of science // *Commun. ACM*, 2009. Vol. 52. No. 9. P. 27–29.
14. Rosenbloom P. S. On computing: The fourth great scientific domain. — Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2013. 308 p.
15. Зацман И. М. Таблица интерфейсов информатики как информационно-компьютерной науки // *Научно-техническая информация. Серия 1: Организация и методика информационной работы*, 2014. № 11. С. 1–15.
16. Зацман И. М. Интерфейсы третьего порядка в информатике // *Информатика и её применения*, 2019. Т. 13. Вып. 3. С. 82–89.
17. Зацман И. М. Кодирование концептов в цифровой среде // *Информатика и её применения*, 2019. Т. 13. Вып. 4. С. 97–106.
18. Zatsman I. Three-dimensional encoding of emerging meanings in AI-systems // 21st European Conference on Knowledge Management Proceedings. — Reading, U.K.: Academic Publishing International Ltd., 2020. P. 878–887.
19. Зацман И. М. Проблемно-ориентированная верификация полноты темпоральных онтологий и заполнение понятийных лакун // *Информатика и её применения*, 2020. Т. 14. Вып. 3. С. 119–128.
20. The dictionary by Merriam-Webster. <https://www.merriam-webster.com/browse/dictionary/a>.
21. Merriam-Webster medical dictionary. <https://www.merriam-webster.com/medical>.
22. Толковый словарь русского языка Ожегова С. И. <https://ozhegov.textologia.ru>.
23. Anti-vaxxer // The dictionary by Merriam-Webster. <https://www.merriam-webster.com/browse/dictionary/anti-vaxxer>.

24. Sentiment140 dataset with 1.6 million tweets. Sentiment analysis with tweets. <https://www.kaggle.com/kazanova/sentiment140>.
25. Go A., Bhayani R., Huang L. Twitter sentiment classification using distant supervision. https://www.researchgate.net/publication/228523135_Twitter_sentiment_classification_using_distant_supervision.
26. Словарь эмоционально окрашенной лексики. <http://bigwer.ru/zol2/index.html>.
27. Зацман И. М. Стадии целенаправленного извлечения знаний, имплицированных в параллельных текстах // Системы и средства информатики, 2018. Т. 28. № 3. С. 175–188.
28. Зацман И. М. Формы представления нового знания, извлеченного из текстов // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 3. С. 83–90.
29. Zatsman I. Tracing emerging meanings by computer: Semiotic framework // 13th European Conference on Knowledge Management Proceedings. — Reading, U.K.: Academic Publishing International Ltd., 2012. Vol. 2. P. 1298–1307.
30. Zatsman I. Denotatum-based models of knowledge creation for monitoring and evaluating R&D program implementation // 11th IEEE Conference (International) on Cognitive Informatics and Cognitive Computing Proceedings. — Los Alamitos, CA, USA: IEEE Computer Society Press, 2012. P. 27–34.

Поступила в редакцию 12.04.22

MEDIUM MODELS FOR DISCOVERING NOVEL TERMS AND SENTIMENTS FROM TEXTS

I. M. Zatsman¹, O. V. Zolotarev², and A. K. Khakimova²

¹Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

²Russian New University, 22 Radio Str., Moscow 105005, Russian Federation

Abstract: The models of informatics (= computer and information science), called medium models, are considered. They are created according to the paradigm of dividing the subject domain of informatics into media of different nature, for example, mental, information, and digital ones. The principal idea of creating medium models is the usage of three or more media, the boundaries between them, as well as the distribution of information technology (IT) stages by media and boundaries during IT modeling. Two medium models are compared which are focused on the design of IT and computerised systems that provide the discovery of sentiments and new terms through human–computer symbiosis during analysis of texts. The first model, designed to describe the processes of discovering new terms, was called the information technology-oriented (ITO) model. The second model describes the processes of discovering sentiments in messages of social network users and, at the same time, new terms if they are found in these messages. It was named the ITO-Sent model. The principal aim of the paper is to compare these two models.

Keywords: sentiments; discovering new terms; ITO model; text analysis; ITO-Sent model; information technology design

DOI: 10.14357/19922264220208

Acknowledgments

The research was carried out using the infrastructure of the shared research facilities CKP “Informatics” of FRC CSC RAS. The reported study was funded by RFBR, project number 20-04-60185.

References

1. Ekman, P. 1992. Are there basic emotions? *Psychol. Rev.* 99(3):550–553.
2. Ekman, P. 1999. Basic emotions. *Handbook of cognition and emotion*. Eds. T. Dalgleish and M. Power. Chichester, U.K.: John Wiley and Sons Ltd. 45–60.
3. Cruz, F.L., J.A. Troyano, B. Pontes, and F.J. Ortega. 2014. Building layered, multilingual sentiment lexicons at synset and lemma levels. *Expert Syst. Appl.* 41(13):5984–5994.
4. Thelwall, M., K. Buckley, and G. Paltoglou. 2011. Sentiment in Twitter events. *J. Am. Soc. Inf. Sci. Tec.* 62(2):406–418.
5. Zatsman, I. 2021. A model of goal-oriented knowledge discovery based on human–computer symbiosis. *16th Forum (International) on Knowledge Asset Dynamics Proceedings*. Matera, Italy: Arts for Business Institute. 297–312.
6. Zatsman, I., and A. Khakimova. 2021. New knowledge discovery for creating terminological profiles of diseases. *22nd European Conference on Knowledge Management Pro-*

- ceedings. Reading, U.K.: Academic Publishing International Ltd. 837–846.
7. Zatsman, I. 2021. Komp'yuternaya i ekonomicheskaya modeli generatsii novogo znaniya: sopostavitel'nyy analiz [Computer and economic models of new knowledge generation: A comparative analysis]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 31(4):84–96.
 8. Zatsman, I. 2022. Model' protsessy izvlecheniya novykh terminov i tonal'nykh slov iz tekstov [A model of discovering novel terms and sentiments in texts]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 32(2):115–127.
 9. Nonaka, I. 1991. The knowledge-creating company. *Harvard Bus. Rev.* 69(6):96–104.
 10. Nonaka, I. 1994. A dynamic theory of organizational knowledge creation. *Organ. Sci.* 5(1):14–37.
 11. Nonaka, I., and H. Takeuchi. 1995. *The knowledge-creating company*. Oxford, NY: Oxford University Press. 284 p.
 12. Zatsman, I. 2021. Problemno-orientirovannaya aktualizatsiya slovarnykh statey dvuyazychnykh slovarey i meditsinskoy terminologii: sopostavitel'nyy analiz [Problem-oriented updating of dictionary entries of bilingual dictionaries and medical terminology: Comparative analysis]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(1):94–101.
 13. Denning, P., and P. Rosenbloom. 2009. Computing: The fourth great domain of science. *Commun. ACM* 52(9):27–29.
 14. Rosenbloom, P.S. 2013. *On computing: The fourth great scientific domain*. Cambridge, MA: MIT Press. 308 p.
 15. Zatsman, I. 2014. A table of interfaces of informatics as computer and information science. *Sci. Tech. Inf. Proc.* 41(4):233–246.
 16. Zatsman, I. M. 2019. Interfeysy tret'ego poriyadka v informatike [Third-order interfaces in informatics]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(3):82–89.
 17. Zatsman, I. M. 2019. Kodirovanie kontseptov v tsifrovoy srede [Digital encoding of concepts]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(4):97–106.
 18. Zatsman, I. 2020. Three-dimensional encoding of emerging meanings in AI-systems. *21st European Conference on Knowledge Management Proceedings*. Reading, U.K.: Academic Publishing International Ltd. 878–887.
 19. Zatsman, I. 2020. Problemno-orientirovannaya verifikatsiya polnoty temporal'nykh ontologiy i zapolnenie ponyatiynykh lakun [Problem-oriented verifying the completeness of temporal ontologies and filling conceptual lacunas]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 14(3):119–128.
 20. The dictionary by Merriam-Webster. Available at: <https://www.merriam-webster.com/browse/dictionary/a> (accessed April 25, 2022).
 21. Merriam-Webster medical dictionary. Available at: <https://www.merriam-webster.com/medical> (accessed April 25, 2022).
 22. *Tolkovyy slovar' russkogo yazyka Ozhegova S. I.* [Ozhegov's explanatory Russian dictionary]. Available at: <https://ozhegov.textologia.ru> (accessed April 25, 2022).
 23. Anti-vaxxer. Available at: <https://www.merriam-webster.com/dictionary/anti-vaxxer> (accessed April 25, 2022).
 24. Sentiment140 dataset with 1.6 million tweets. Sentiment analysis with tweets. Available at: <https://www.kaggle.com/kazanova/sentiment140> (accessed April 25, 2022).
 25. Twitter sentiment classification using distant supervision. Available at: https://www.researchgate.net/publication/228523135_Twitter_sentiment_classification_using_distant_supervision (accessed April 25, 2022).
 26. Slovar' emotsional'no okrashennoy leksiki [Sentiments dictionary]. Available at: <http://bigwer.ru/zol2/index.html> (accessed April 25, 2022).
 27. Zatsman, I. 2018. Stadii tselenapravlennoy izvlecheniya znaniy, implitsirovannykh v paralel'nykh tekstakh [Stages of goal-oriented discovery of knowledge implied in parallel texts]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 28(3):175–188.
 28. Zatsman, I. 2021. Formy predstavleniya novogo znaniya, izvlechennogo iz tekstov [Forms representing new knowledge discovered in texts]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(3):83–90.
 29. Zatsman, I. 2012. Tracing emerging meanings by computer: Semiotic framework. *13th Conference (European) on Knowledge Management Proceedings*. Reading, U.K.: Academic Publishing International Ltd. 2:1298–1307.
 30. Zatsman, I. 2012. Denotatum-based models of knowledge creation for monitoring and evaluating R&D program implementation. *11th IEEE Conference (International) on Cognitive Informatics and Cognitive Computing Proceedings*. Los Alamitos, CA: IEEE Computer Society Press. 27–34.

Received April 12, 2022

Contributors

Zatsman Igor M. (b. 1952) — Doctor of Science in technology, head of department, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; izatsman@yandex.ru

Zolotarev Oleg V. (b. 1959) — Candidate of Science (PhD) in technology, head of department, Russian New University, 22 Radio Str., Moscow 105005, Russian Federation; ol-zolot@yandex.ru

Khakimova Aida Kh. (b. 1963) — Candidate of Science (PhD) in biology, leading scientist, Russian New University, 22 Radio Str., Moscow 105005, Russian Federation; aida_khatif@mail.ru

АНАЛИЗ ЦЕПОЧЕК ПРИЧИННО-СЛЕДСТВЕННЫХ СВЯЗЕЙ

А. А. Грушо¹, Н. А. Грушо², М. И. Забейайло³, А. А. Зацаринный⁴, Е. Е. Тимонина⁵, С. Я. Шоргин⁶

Аннотация: Работа посвящена анализу возможностей использования причинно-следственных связей для контроля выполнения информационных технологий (ИТ) в распределенных информационных системах (РИС). Для проведения этого анализа построен простой пример фрагмента некоторой фиксированной ИТ, в котором разобраны ситуации, когда контроль может опираться на причинно-следственные связи между действиями в ИТ и когда предполагаемые причинно-следственные связи просто не существуют. Показана ограниченность возможностей использования причинно-следственных связей для повышения доверия к результатам сложных компьютерных вычислений. Эта ограниченность основана на том, что для получения причинно-следственных связей в ожидании определенного следствия часто невозможно контролировать связи характеристик, обязательных для того, чтобы искомое следствие вытекало из действий, которые предполагаются его причиной. Для использования причинно-следственных связей в ИТ необходимо дополнять действия ИТ действиями по контролю связей между характеристиками. Без этого условия правильно построенная последовательность действий ИТ становится необходимым, но не достаточным условием ожидаемого следствия.

Ключевые слова: информационная безопасность; причинно-следственные связи; мониторинг информационных технологий

DOI: 10.14357/19922264220209

1 Введение

В связи с распространением использования искусственного интеллекта в процессе принятия решений [1, 2] становится актуальной проблема доверия к результатам компьютерных вычислений. Исследованиям причинно-следственных связей для получения и обоснования выводов компьютерных вычислений посвящено много работ.

Следует отметить работу [3], в которой предложен способ объяснимости на основе агентов, задающих простые вопросы и способных анализировать ответы на эти вопросы. Работа выполнена на основе каузальной модели Halpern–Pearl [4–7]. Большинство результатов в модели, разработанной в работе [5], направлено на требующие объяснений медицинские приложения, в которых использованы вероятностные инструменты. Вместе с тем в обзоре [8] указаны приложения, связанные с улучшением методов машинного обучения, образованием, областью принятия решений в политике.

Данная работа посвящена анализу возможностей использования причинно-следственных связей в контроле выполнения ИТ в РИС. Для проведения этого анализа построен простой пример фрагмента некоторой фиксированной ИТ, в котором разобраны ситуации, когда контроль может опираться на причинно-следственные связи между действиями в ИТ и когда предполагаемые причинно-следственные связи просто не существуют.

Показано, что анализ причинно-следственных связей служит тонким инструментом, использование которого для подтверждения доверия и объяснимости результатов компьютерных вычислений является ограниченным. Это утверждение основано на том, что для наличия причинно-следственных связей необходимо выполнение ограниченный на связи между характеристиками различных действий, образующих предполагаемые причины, и предполагаемых представляющих интерес следствий. Такие связи обязательно должны выполняться между элементами различных множеств, возможно очень больших. Отсюда возникают алгоритмические и вычислительные проблемы.

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, grusho@yandex.ru

²Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, info@itake.ru

³Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, m.zabehailo@yandex.ru

⁴Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, AZatsarinny@ipiran.ru

⁵Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, eltimon@yandex.ru

⁶Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, sshorgin@ipiran.ru

2 Модель причинно-следственных связей в задачах мониторинга рабочих процессов в распределенных информационных системах

Мониторинг функционирования РИС и, в частности, безопасности РИС — один из главных компонентов обеспечения информационной безопасности. Данные мониторинга представляют собой последовательности объектов определенного вида. Вместе с тем работа РИС описывается последовательностью действий с данными [9]. Действие состоит из 3 составляющих:

- (1) инициация действия;
- (2) реализация действия;
- (3) инициация других действий после выполнения действия.

Определим понятие параметра в системе.

Пусть A — переменная величина с областью допустимых значений $D(A)$. Элементы множества $D(A)$ будем называть характеристиками, или значениями, параметра A . Тогда действие X можно описать как минимум тремя параметрами $A_1(X)$, $A_2(X)$ и $A_3(X)$ с соответствующими множествами значений этих параметров (характеристиками) $D_1(X)$, $D_2(X)$ и $D_3(X)$. В множество $D_1(X)$ входят идентификаторы действия X и действий, которые воздействуют и иницируют X . В множество $D_2(X)$ входят правила действия X , описания формы действия X и ограничения, применимые к данным, вызывающим действие X . В множество $D_3(X)$ входят пути и средства воздействия на другие действия.

Объектом $O(X)$ назовем множество выбранных в соответствующих областях переменных характеристик действия X . Будем считать, что по любой характеристике x в объекте $O(X)$ можно восстановить имя параметра из множеств $A_1(X)$ или $A_3(X)$, который содержит эту характеристику. Данные представляют собой последовательность объектов

$$O_1, O_2, \dots, O_N. \quad (1)$$

Повторяющиеся конфигурации действий (схемы действий), как правило, связаны с причинно-следственными связями, которые существуют в ИТ, исполняемых в РИС. Поэтому методы анализа причинно-следственных связей должны использоваться в анализе мониторинга РИС, особенно когда такой анализ надо проводить быстро и даже приближенно.

Общее определение цепочки причинно-следственных связей вытекает из работы [6].

Действия X_1, X_2, \dots, X_k являются непосредственной причиной следствия, т.е. набора действий Y_1, Y_2, \dots, Y_s , если существует хотя бы один набор x_1, x_2, \dots, x_k значений выходных характеристик действий такой, при котором однозначно определены выходные значения y_1, y_2, \dots, y_s действий Y_1, Y_2, \dots, Y_s , т.е. всегда, когда в результатах действий X_1, X_2, \dots, X_k появляется набор значений x_1, x_2, \dots, x_k в непосредственных результатах этого набора действий, появляется набор значений y_1, y_2, \dots, y_s действий Y_1, Y_2, \dots, Y_s .

Фрагментом причинно-следственных связей длины 2 будем называть наборы действий $X_1, X_2, \dots, X_k, Y_1, Y_2, \dots, Y_s$ и B , для которых действия X_1, X_2, \dots, X_k являются непосредственной причиной следствия — набора действий Y_1, Y_2, \dots, Y_s , а действия Y_1, Y_2, \dots, Y_s являются непосредственной причиной действия B . Пусть область значений $D(B)$ действия B принимает два значения: 1 и 0.

Более естественно было бы определять причину, если вместо квантора существования использовать квантор всеобщности, т.е. для всех наборов x_1, x_2, \dots, x_k всегда порождаются наборы y_1, y_2, \dots, y_s . Тогда цепочки причинно-следственных связей определялись бы суперпозицией отображений.

Далее рассмотрим обоснование того, что проблема цепочек причинно-следственных связей не может рассматриваться так упрощенно.

3 Проблемы описания причинно-следственных связей

Рассмотрим следующий пример. Пусть U_1, U_2, U_3 и U_4 — пользователи, участвующие в некоторой фиксированной ИТ; ФХ — файловое хранилище. Содержание фрагмента ИТ состоит в следующих действиях:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{\text{пользователь } \dots \text{ готовит файл } \dots \\ &\quad \dots \text{ для пользователя } \dots\}; \\ X_2 &= \{\text{пользователь } \dots \text{ кладет файл } \dots \text{ в ФХ}\}; \\ X_3 &= \{\text{пользователь } \dots \text{ берет файл } \dots \text{ из ФХ}\}. \end{aligned}$$

Каждое действие может быть выполнено правильно и неправильно. Правила определения правильности действий заложены в соотношениях входных и выходных значений параметров. Правильная последовательность действий в рассматриваемом фрагменте ИТ следующая:

$$\begin{aligned} \{U_1 \text{ готовит файл } Z_1 \text{ для пользователя } U_3\}; \\ \{U_2 \text{ готовит файл } Z_2 \text{ для пользователя } U_4\}; \end{aligned}$$

- { U_1 кладет файл Z_1 в ФХ};
- { U_2 кладет файл Z_2 в ФХ};
- { U_3 берет файл Z_1 из ФХ};
- { U_4 берет файл Z_2 из ФХ}.

Безошибочными считаются действия: X_2 — положить файл в ФХ; X_3 — взять файл из ФХ; X_4 — подготовить сообщение «1» или «0» от пользователя, взявшего файл; X_5 — использовать сообщения «1» или «0» для принятия решения. U_1 , U_2 , U_3 и U_4 — неизменяемые характеристики действий; Z_1 , Z_2 и Z — изменяемые характеристики ИТ. Объекты, наблюдаемые при выполнении ИТ:

- $O_1 = \{U_1 \text{ получил доступ к ФХ,}$
положил файл Z_1 в ФХ};
- $O_2 = \{U_2 \text{ получил доступ к ФХ,}$
положил файл Z_2 в ФХ};
- $O_3 = \{U_3 \text{ получил доступ к ФХ,}$
взял файл Z_1 из ФХ};
- $O_4 = \{U_4 \text{ получил доступ к ФХ,}$
взял файл Z_2 в ФХ};
- $O_5 = \{U_1 \text{ получил доступ к ФХ,}$
положил файл Z в ФХ};
- $O_6 = \{U_3 \text{ получил доступ к ФХ,}$
взял файл Z_2 из ФХ};
- $O_7 = \{U_4 \text{ получил доступ к ФХ,}$
взял файл Z_1 из ФХ}.

Результаты действий X_4 и X_5 будут рассмотрены позже. Рассмотрим причинно-следственные связи на первых шагах. Действия на первом шаге — подготовка документов Z_1 , Z_2 и Z . Правила определения правильности действия X_1 состоят в привязке имени пользователя к названию файла. Действия X_2 не имеют правил контроля правильности, так как пользователь кладет в ФХ тот файл, который был привязан к его имени на первом шаге. Действие X_3 имеет правила контроля, которые состоят в том, что пользователь берет из ФХ файл, который имеет нужное название. Действия пользователей отражаются в событиях. Пользователи могут совершать ошибки. Например, пользователь U_1 неправильно привязал подготовленный файл и в ФХ положил файл с именем Z . Тогда пользователь U_3 не находит файл с именем Z_1 . По истечении контрольного времени U_3 с помощью действия X_4 формирует сообщение «0» и посылает его действию X_5 . При этом пользователь U_2 все сделал правильно и пользователь U_4 , получив файл Z_2 , сформировал сообщение «1» и отослал его действию X_5 . Получив сообщения «0» и «1», действие X_5 формирует сигнал

тревоги. Правильное выполнение ИТ соответствует сообщениям «1» и «1». Если пользователи U_1 и U_2 перепутали имена файлов, то формально на действие X_5 поступают сигналы «1» и «1», но в реализации технологии произошла ошибка. Поэтому правила контроля при выполнении действия X_1 имеют большое значение.

Теперь проведем анализ построенного примера с позиций причинно-следственных связей. Рассмотренные цепочки действий соответствуют причинно-следственным связям только при правильных связях между характеристиками проводимых действий. При нарушении связей проделанные действия не становятся причиной следствия (выполнения ИТ), причем эти связи должны выполняться по всей цепочке действий вплоть до проявления следствия (выполнение ИТ). Любая частичная цепочка не позволяет сделать вывод о существовании причинно-следственных связей. Отметим, что разрывы в последовательности действий (взаимодействие через ФХ) сохраняют требование, что вся цепочка действий должна удовлетворять связям между характеристиками. Требования существования правил контроля правильности соотношений между характеристиками делают трудоемким использование причинно-следственных связей для анализа и прогнозирования выполнимости ИТ.

Пример также показывает, что набор характеристик, которые могут удовлетворять связям, определяющим причину для искомого следствия, за счет действий пользователей, участвующих в ИТ, могут потерять свойство становиться причиной этого свойства.

Можно рассматривать сложные комплексные действия вместо рассмотренных в примере. Задача построения связей характеристик и правил контроля выполнения этих связей в таком случае становится сложной. Но можно использовать вероятностный подход, основанный на оценках совместных распределений характеристик предшествующих и последующих действий. В применении к построенному примеру вероятность связи U_1 и Z_1 , а также связи между Z_1 и U_3 больше, чем вероятности других конфигураций. Статистические оценки этих вероятностей на правильных прецедентах [10] позволят получить оценку вероятности следствия, т. е. прогнозировать вероятность правильного выполнения ИТ [11]. Эта оценка служит оценкой доверия к результатам выполнения ИТ.

Построенные фрагменты причинно-следственных связей могут иметь самостоятельную ценность для контроля правильности выполнения особо важных фрагментов ИТ при допустимой сложности выявления связей между характеристиками действий, при которых существуют причинно-следственные

связи. Как было показано в примере, по результатам выполнения фрагмента ИТ ставится сенсор, который позволяет с помощью полученных сообщений «1» и «0» построить оценку правильности выполнения этого фрагмента. Здесь речь идет именно об оценке, так как в примере было показано, что сенсор подтверждает правильность выполнения ИТ, но на самом деле возможна ошибка, поэтому при оценке «1» и «1» необходимо, двигаясь в направлении от следствия к причине, проверять выполнение всех правил и соотношений между характеристиками. Этот алгоритм усложняет, но в то же время улучшает оценку контроля.

Заметим, что все «1» могут ложно возникнуть только при перестановках данных, управляющих действиями, поэтому доверие к фрагменту ИТ можно повышать, контролируя только отдельные цепочки обработки данных. Ошибка в отдельной цепочке при всех «1» суммарного контроля означает неправильное направление потока данных при перемешивании цепочек.

Построенные методы использования причинно-следственных связей дают необходимые, но не достаточные условия контроля правильности вычислений с их помощью. При этом даже в рассмотренном выше простейшем примере показано, что следствие может участвовать в анализе причинных связей между характеристиками. Это, в свою очередь, затрудняет использование причинно-следственных связей для прогнозов следствий.

4 Контроль информационных технологий по последовательностям сопровождающих действия объектов

Напомним, что данные представляют собой последовательность объектов (1). При этом наборы параметров, определяющих характеристики объектов, могут быть разными у разных объектов.

Множество характеристик любого наблюдаемого объекта $O(X)$ делится на две непересекающиеся части B и C . Множество B объединяет характеристики, которые не зависят от характеристик других объектов. Эти характеристики служат своего рода идентификаторами объекта. Множество характеристик C зависит от предыдущих объектов в том смысле, что какие-то характеристики предыдущих объектов определяют значения характеристик из C в $O(X)$ или участвуют в инициации последующих действий. Это значит, что множество

характеристик, которые определяют значения характеристик из C , становятся причиной появления множества C [12–14] и для них выполнены ограничительные связи между характеристиками. Таким образом, можно считать, что некоторые объекты образуют причинно-следственные связи друг с другом. По этим связям и известным описаниям ИТ восстанавливаются фрагменты ИТ, определенные выше. В данном случае причинно-следственные связи существуют и работают, так как после проведенных действий не последовало сигнала тревоги или ИТ не остановлена при выполнении какого-то действия, поэтому при контроле исполнения ИТ не нужно детально проверять выполнение связей характеристик проведенных действий. Тогда анализ объектов (1) позволяет не только частично контролировать исполнение ИТ, но даже восстанавливать последовательность действий при выполнении неизвестной ИТ или возникновении сомнений в отсутствии вредоносного кода. Идея контроля ИТ по последовательности (1) с помощью причинно-следственных связей рассматривалась ранее. В статье [15] исследована проблема контроля безопасности ИТ на основе последовательности данных компьютерного аудита при известной схеме действий в ИТ.

Подобные задачи возникают также в поиске первопричин неявных сбоев и аномалий в компьютерных системах [15, 16]. Приближенные методы причинно-следственного анализа (агрегация действий) позволяют решать задачи поиска первопричины сбоя, или аномалии, и выявлять такие аномалии с точностью до блоков допустимо малых размеров. Такой подход позволяет быстро восстанавливать рабочие процессы за счет замены блока в сложной технической системе без детального анализа причины сбоя.

5 Заключение

В работе показана ограниченность возможностей использования причинно-следственных связей для повышения доверия к результатам сложных компьютерных вычислений. Эта ограниченность основана на том, что для получения причинно-следственных связей в ожидании определенного следствия часто невозможно контролировать связи характеристик, обязательных для того, чтобы искомое следствие получалось из действий, которые предполагаются причиной данного следствия, т. е. совокупность действий, которые должны породить искомое следствие, должны быть дополнены действиями контроля связей всех характеристик. Без этого соответствие «причина—следствие» мо-

жет в некоторых случаях существовать, а в некоторых отсутствовать, причем правильно построенная априори последовательность характеристик может перестать становиться причиной ожидаемого свойства за счет действий пользователей, не нарушающих состав характеристик.

Если цепочка данных показывает, что искомое следствие получено, то исследование последовательности характеристик действий может позволить установить связи между характеристиками, чтобы существовали причинно-следственные связи. Для этого можно использовать машинное обучение.

Таким образом, для использования причинно-следственных связей в ИТ необходимо дополнять действия ИТ действиями по контролю связей между характеристиками. Без этого условия правильно построенная последовательность действий ИТ становится необходимым, но не достаточным условием ожидаемого следствия.

Литература

1. Workshop on Explainable Artificial Intelligence Proceedings, 2017. <http://home.earthlink.net/dwaha/research/meetings/ijcai17-xai/>.
2. DARPA sets up fast track for third wave AI // Pakistan Defence, July 26, 2018.
3. Verma P., Srivastava S. Learning causal models of autonomous agents using interventios // Workshop on Generalization in Planning Proceedings, 2021. arXiv: 2108.09586 [cs.AI]. https://pulkitverma.net/assets/pdf/vs_genplan21/vs_genplan21.pdf.
4. Halpern J. Y., Pearl J. Causes // Brit. J. Philos. Sci. Vol. 56. No. 4. P. 843–887.
5. Pearl J. Causal inference // Workshop on Causality Proceedings: Objectives and Assessment at NIPS / Eds. I. Guyon, D. Janzing, B. Schölkopf. — Proceedings of machine learning research ser. — Whistler, Canada, 2010. Vol. 6. P. 39–58.
6. Pearl J. The mathematics of causal inference // Joint Statistical Meetings Proceedings. — ASA, 2013. P. 2515–2529.
7. Halpern J. Y. A modification of the Halpern–Pearl definition of causality // 4th Conference (International) on Artificial Intelligence Proceedings. — AAAI, 2015. P. 3022–3033.
8. Yao L., Chu Z., Li S., Li Y., Gao J., Zhang A. A survey on causal inference // ACM T. Knowl. Discov. D., 2021. Vol. 15. Iss. 5. Article 74. 46 p. doi: 10.1145/3444944.
9. Agrawal R., Gunopulos D., Leymann F. Mining process models from workflow logs // Advances in database technology / Eds. H.-J. Schek, G. Alonso, F. Saltor, I. Ramos. — Lecture notes in computer science ser. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. Vol. 1377. P. 467–483. doi: 10.1007/BFb0101003.
10. Грушо А. А., Грушо Н. А., Забейжайло М. И., Смирнов Д. В., Тимонина Е. Е., Шоргин С. Я. Статистика и кластеры в поисках аномальных вкраплений в условиях больших данных // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 4. С. 79–86.
11. Grusho A., Grusho N., Zabezhailo M., Timonina E. Evaluation of trust in computer-computed results // Comm. Com. Inf. Sc., 2022. Vol. 1552. P. 420–432.
12. Grusho A., Grusho N., Zabezhailo M., Zatsarinny A., Timonina E. Information security of SDN on the basis of metadata // Computer network security / Eds. J. Rak, J. Bay, I. V. Kotenko, et al. — Lecture notes in computer science ser. — Springer, 2017. Vol. 10446. P. 339–347.
13. Грушо Н. А., Грушо А. А., Забейжайло М. И., Тимонина Е. Е. Методы нахождения причин сбоев в информационных технологиях с помощью метаданных // Информатика и её применения, 2020. Т. 14. Вып. 2. С. 33–39. doi: 10.14357/19922264200205.
14. Грушо А. А., Тимонина Е. Е., Грушо Н. А., Терехина И. Ю. Выявление аномалий с помощью метаданных // Информатика и её применения, 2020. Т. 14. Вып. 3. С. 76–80. doi: 10.14357/19922264200311.
15. Grusho A., Grusho N., Zabezhailo M., Timonina E., Senchilo V. Metadata for root cause analysis // Communications ECMS, 2021. Vol. 35. Iss. 1. P. 267–271. doi: 10.7148/2021-0267.
16. Грушо А. А., Грушо Н. А., Забейжайло М. И., Тимонина Е. Е. Использование противоречий в данных для поиска неявных сбоев в компьютерных системах // Проблемы информационной безопасности. Компьютерные системы, 2021. № 3(47). С. 63–71.

Поступила в редакцию 17.04.22

CAUSE-AND-EFFECT CHAIN ANALYSIS

A. A. Grusho, N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, A. A. Zatsarinny, E. E. Timonina, and S. Ya. Shorgin

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The paper is devoted to the analysis of the possibilities of using cause-and-effect relationships in the control of the realization of information technologies in distributed information systems. To carry out this analysis, the simple example of a fragment of some fixed information technology has been built which examines situations

where control can rely on cause-and-effect relationships between actions in information technologies and when alleged cause-and-effect relationships simply do not exist. The paper shows the limitations of using cause-and-effect relationships to increase confidence in the results of complex computer calculations. This limitation is based on the fact that in order to get causal relationships in waiting of the certain result, it is often impossible to control the relationships of characteristics that are mandatory for the desired consequence to be obtained from actions that are assumed to be its cause. To use cause-and-effect relationships in information technology, it is necessary to supplement the actions of information technology with actions to control the relationships between characteristics. Without this condition, the properly constructed sequence of information technology actions is a necessary but insufficient condition of the expected consequence.

Keywords: information security; cause-and-effect relations; monitoring of information technologies

DOI: 10.14357/19922264220209

References

1. Workshop on Explainable Artificial Intelligence Proceedings. 2017. Available at: <http://home.earthlink.net/dwaha/research/meetings/ijcai17-xai/> (accessed April 28, 2022).
2. DARPA sets up fast track for third wave AI. July 26, 2018. Available at: <https://defence.pk/pdf/threads/darpa-sets-up-fast-track-for-third-wave-ai.569563/> (accessed April 28, 2022).
3. Verma, P., and S. Srivastava. 2021. Learning causal models of autonomous agents using interventions. *Workshop on Generalization in Planning Proceedings*. Available at: https://pulkitverma.net/assets/pdf/vs_genplan21/vs_genplan21.pdf (accessed April 28, 2022).
4. Halpern, J. Y., and J. Pearl. 2005. Causes and explanations: A structural-model approach. Part I: Causes. *Brit. J. Philos. Sci.* 56(4):843–887.
5. Pearl, J. 2010. Causal inference. *Workshop on Causality Proceedings: Objectives and Assessment at NIPS*. Eds. I. Guyon, D. Janzing, and B. Schölkopf. Proceedings of machine learning research ser. Whistler, Canada. 6:39–58.
6. Pearl, J. 2013. The mathematics of causal inference. *Joint Statistical Meetings Proceedings*. ASA. 2515–2529.
7. Halpern, J. Y. 2015. A modification of the Halpern–Pearl definition of causality. *24th Conference (International) on Artificial Intelligence Proceedings*. AAAI. 3022–3033.
8. Yao, L., Z. Chu, S. Li, Y. Li, J. Gao, and A. Zhang. 2021. A survey on causal inference. *ACM T. Knowl. Discov. D.* 15(5):74. 46 p. doi: 10.1145/3444944.
9. Agrawal, R., D. Gunopulos, and F. Leymann. 1998. Mining process models from workflow logs. *Advances in database technology*. Eds. H. J. Schek, G. Alonso, F. Saltor, and I. Ramos. Lecture notes in computer science ser. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. 1337:467–483. doi: 10.1007/BFb0101003.
10. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, D. V. Smirnov, E. E. Timonina and S. Ya. Shorgin. 2021. Statistika i klasteri v poiskakh anomal'nykh vkrapleniy v usloviyakh bol'shikh dannykh [Statistics and clusters for detection of anomalous insertions in Big Data environment]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(4):79–86.
11. Grusho, A., N. Grusho, M. Zabezhailo, and E. Timonina. 2022. Evaluation of trust in computer-computed results. *Comm. Com. Inf. Sc.* 1552:420–432.
12. Grusho, A., N. Grusho, M. Zabezhailo, A. Zatsarinny, and E. Timonina. 2017. Information security of SDN on the basis of metadata. *Computer network security*. Eds. J. Rak, J. Bay, I. V. Kotenko, et al. Lecture notes in computer science ser. Springer. 10446:339–347.
13. Grusho, N. A., A. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, and E. E. Timonina. 2020. Metody nakhozhdeniya prichin sboev v informatsionnykh tekhnologiyakh s pomoshch'yu metadannykh [Methods of finding the causes of information technology failures by means of metadata]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 14(2):33–39. doi: 10.14357/19922264200205.
14. Grusho, A. A., E. E. Timonina, N. A. Grusho, and I. Yu. Teryokhina. 2020. Vyyavlenie anomalii s pomoshch'yu metadannykh [Identifying anomalies using metadata]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 14(3):76–80. doi: 10.14357/19922264200311.
15. Grusho, A., N. Grusho, M. Zabezhailo, E. Timonina, and V. Senchilo. 2021. Metadata for root cause analysis. *Communications ECMS* 35(1):267–271. doi: 10.7148/2021-0267.
16. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, and E. E. Timonina. 2021. Use of contradictions in data for finding implicit failures in computer systems. *Autom. Control Comp. S.* 55(8):1115–1120.

Received April 17, 2022

Contributors

Grusho Alexander A. (b. 1946) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, principal scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; grusho@yandex.ru

Grusho Nikolai A. (b. 1982) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; info@itake.ru

Zabezhailo Michael I. (b. 1956) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, A. A. Dorodnicyn Computing Center, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 40 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; m.zabezhailo@yandex.ru

Timonina Elena E. (b. 1952) — Doctor of Science in technology, professor, leading scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; eltimon@yandex.ru

Zatsarinny Alexander A. (b. 1951) — Doctor of Science in technology, professor, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences; 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; AZatsarinny@ipiran.ru

Shorgin Sergey Ya. (b. 1952) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, principal scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; sshorgin@ipiran.ru

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ, СВЯЗАННЫХ С ЗАДАЧАМИ УПРАВЛЕНИЯ ПОЛУМАРКОВСКИМИ СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

П. В. Шнурков¹

Аннотация: Проведено исследование аналитической структуры трех видов функционалов от управляемого полумарковского процесса с конечным множеством состояний. Доказано, что все эти математические объекты представимы в виде дробно-линейного интегрального функционала, заданного на конечном наборе вероятностных мер, определяющих стратегию управления соответствующим полумарковским процессом. При этом для каждого из этих функционалов получены явные представления для подынтегральных функций числителя и знаменателя через исходные вероятностные характеристики управляемого полумарковского процесса. Данный результат позволяет свести проблему оптимального управления полумарковским процессом с конкретным целевым функционалом к задаче исследования на глобальный экстремум заданной функции конечного числа переменных.

Ключевые слова: стохастические модели управления; оптимальное управление полумарковскими процессами; дробно-линейный интегральный функционал; основная функция дробно-линейного интегрального функционала

DOI: 10.14357/19922264220210

1 Введение

Идея о дробно-линейной структуре целевого функционала в задаче оптимального управления полумарковским случайным процессом была, по-видимому, впервые реализована в классической работе Х. Майна и С. Осаки [1]. В этой работе рассматривались различные модели управления марковскими и полумарковскими случайными процессами с конечными множествами состояний и допустимых решений. Для модели управления полумарковским процессом без переоценки, когда множество состояний образует один эргодический класс, а показатель эффективности представляет собой стационарный средний удельный доход [1, разд. 5.5], полученное аналитическое выражение для указанного показателя имеет вид отношения двух линейных функций от дискретного вероятностного распределения, определяющего принимаемое решение. Соответствующая экстремальная задача на множестве дискретных вероятностных распределений была решена авторами методом линейного программирования. Было установлено, что оптимальная стратегия управления является детерминированной. Результатов для более общих моделей управления в данной работе получено не было, однако сама идея оказалась весьма плодотворной. Среди основополагающих исследо-

ваний в области теории управления полумарковскими случайными процессами следует также отметить работу [2], в которой были формально определены понятия аддитивного функционала дохода, связанного с полумарковским процессом, и получены эргодические теоремы для этого функционала. Это позволило поставить задачу управления по отношению к стационарному показателю эффективности, который по своему экономическому содержанию представляет собой средний удельный доход в рассматриваемой стохастической модели. Такой подход к задаче оптимального управления многократно использовался в дальнейшем вплоть до современных исследований [3, 4], в которых рассматривались полумарковские модели при весьма общих предположениях на пространства состояний и управлений.

Важный результат, связанный со структурой стационарного стоимостного показателя эффективности управления, представлен В. А. Каштановым в гл. 13 коллективной монографии [5]. Автором рассмотрена проблема оптимального управления полумарковским процессом с конечным множеством состояний и множеством возможных решений, которое представляет собой произвольный интервал множества вещественных чисел. Модель относится к виду моделей без переоценки, показателем качества управления служит стационарное значение

¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», pshnurkov@hse.ru

среднего удельного дохода, определяемое аналогично [1, 2]. Как и в указанных работах, рандомизированное управление в каждом состоянии определяется в соответствии с вероятностным распределением, а их совокупность задает стратегию управления. Автором сформулировано утверждение о том, что стационарное значение среднего удельного дохода представляет собой дробно-линейный интегральный функционал от набора вероятностных распределений, образующих стратегию управления. При этом ранее [5, гл. 10; 6] было установлено, что дробно-линейный функционал достигает экстремума на вырожденных распределениях. Отсюда следует, что оптимальная стратегия управления является детерминированной и должна определяться точкой экстремума функции, представляющей собой отношение подынтегральных функций числителя и знаменателя данного дробно-линейного функционала. Однако в [5] не были получены явные представления для указанных функций. Кроме того, приведенный в гл. 10 монографии [5] вариант теоремы об экстремуме дробно-линейного интегрального функционала требовал проверки выполнения условия существования этого экстремума. Такие условия не были установлены. В связи с этими обстоятельствами использовать полученные в [5] результаты для доказательства существования оптимальной детерминированной стратегии управления полумарковским процессом и для строгого обоснования способа нахождения такой стратегии оказалось невозможным. Результаты работы [5], связанные со структурой стационарного стоимостного показателя эффективности управления, были обобщены и усилены в [7]. Для соответствующей модели управления полумарковским процессом с конечным множеством состояний и произвольным пространством допустимых решений было доказано утверждение о дробно-линейной структуре стационарного стоимостного показателя эффективности управления. При этом были найдены явные аналитические формулы для подынтегральных функций интегральных выражений в числителе и знаменателе этого дробно-линейного функционала.

В настоящей работе получены принципиально новые результаты о дробно-линейной интегральной структуре иных видов функционалов, возникающих в задачах управления полумарковскими процессами. Эти функционалы связаны со случайной длительностью пребывания процесса в заданном конечном подмножестве состояний. По отношению к возможным приложениям такую случайную величину можно интерпретировать как время до первого отказа системы, или время до первого достижения некоторого «неприемлемого» состояния.

Математические ожидания таких случайных величин можно рассматривать как разумные и естественные показатели эффективности управления соответствующим случайным процессом.

2 Об аналитическом представлении классического стационарного стоимостного функционала

Начнем изложение с исследования классического варианта стационарного стоимостного показателя эффективности управления, идея которого восходит к работам [1, 2]. Рассмотрим управляемый полумарковский процесс $\xi(t)$ с конечным множеством состояний $X = \{1, 2, \dots, N\}$, где $N > 0$ — заданное целое положительное число. Процесс $\xi(t)$ управляется в моменты t_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, $t_0 = 0$, в которые происходят последовательные изменения состояний (скачки). Управление процессом представляет собой случайную величину u_n , принимающую значения из некоторого множества возможных управлений U . Обычно под U понимается множество вещественных чисел или некоторое его подмножество, на котором задана стандартная σ -алгебра борелевских множеств. Заддим на множестве U набор вероятностных мер (распределений) $\Psi_1(\cdot), \Psi_2(\cdot), \dots, \Psi_N(\cdot)$, которые будут определять принимаемые решения об управлении. Если выполняется условие, состоящее в том, что $\xi_n = \xi(t_n + 0) = i$, то управление u_n определяется как случайная величина, принимающая значения из U и имеющая распределение $\Psi_i(u)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Заданный набор вероятностных распределений $\Psi_1(\cdot), \Psi_2(\cdot), \dots, \Psi_N(\cdot)$ образует стратегию управления полумарковским процессом $\xi(t)$. Вероятностные распределения, входящие в него, часто называются управляющими. Последовательность $\{\xi_n = \xi(t_n + 0), n = 0, 1, \dots\}$ образует управляемую цепь Маркова, вложенную в данный полумарковский процесс $\xi(t)$. Обозначим через $\theta_n = t_{n+1} - t_n$ случайную длительность интервала времени $[t_n, t_{n+1}]$ между последовательными изменениями состояний процесса.

Введем основные вероятностные характеристики управляемого полумарковского процесса $\xi(t)$:

- условные вероятности перехода вложенной цепи Маркова при условии, что управление принимает фиксированное значение:

$$p_{ij}(u) = P(\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i, u_n = u), \\ i, j \in X, u \in U; \quad (1)$$

- полумарковские функции управляемого полумарковского процесса $\xi(t)$:

$$Q_{ij}(u) = P(\xi_{n+1} = j, \theta_n < t | \xi_n = i, u_n = u), \\ i, j \in X, u \in U, t \geq 0; \quad (2)$$

- условные математические ожидания длительностей пребывания полумарковского процесса в его состояниях при условии, что управление принимает фиксированное значение:

$$m_i(u) = E[\theta_n | \xi_n = i, u_n = u] = \\ = \sum_{j \in X} \int_0^{\infty} t d_t Q_{ij}(t, u), \quad i \in X, u \in U. \quad (3)$$

Рассмотрим также соответствующие вероятностные характеристики без условия на управление, т. е. усредненные по соответствующим управляющим вероятностным распределениям:

$$p_{ij} = P(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i) = \\ = \int_U p_{ij}(u) d\Psi_i(u), \quad i, j \in X; \quad (4)$$

$$Q_{ij}(t) = P(\xi_{n+1} = j, \theta_n < t | \xi_n = i) = \\ = \int_U Q_{ij}(t, u) d\Psi_i(u), \quad i, j \in X, t \geq 0; \quad (5)$$

$$m_i = E[\theta_n | \xi_n = i] = \int_U m_i(u) d\Psi_i(u), \quad i \in X. \quad (6)$$

Подынтегральные функции в правых частях соотношений (4)–(6), формально и содержательно определяемые равенствами (1)–(3) соответственно, предполагаются заданными.

Предположим, следуя работе [1], что при стратегии управления, определяемой набором управляющих вероятностных распределений $\Psi_1(u), \Psi_2(u), \dots, \Psi_N(u)$, цепь Маркова $\{\xi_n\}$, вложенная в полумарковский процесс $\xi(t)$, имеет ровно один класс возвратных положительных состояний. Как известно, тогда у этой цепи существует единственное стационарное распределение

$$\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N).$$

Следуя классической традиции решения задач стохастического управления [1, 2], рассмотрим стационарный стоимостный показатель эффективности управления вида

$$I = \frac{\sum_{j=1}^N c_j \pi_j}{\sum_{j=1}^N m_j \pi_j}. \quad (7)$$

Стоимостные характеристики c_j , входящие в формулу (7), определяются некоторым стоимостным аддитивным функционалом $\eta(t)$, связанным с исходным полумарковским процессом $\xi(t)$. Конструктивный метод задания такого функционала описан в работах [1, 2]. Отметим, что по своему экономическому содержанию такой функционал представляет собой накопленный случайный доход (прибыль), возникающий при эволюции системы, математической моделью которой служит основной случайный процесс $\xi(t)$. Конкретное представление для характеристик c_j определяется формулами:

- математическое ожидание дохода за время пребывания в состоянии j при условии, что в момент перехода в данное состояние принято решение об управлении $u \in U$:

$$c_j(u) = E[\eta(t_{n+1}) - \eta(t_n) | \xi_n = j, u_n = u] = \\ = E[\Delta \eta_n | \xi_n = j, u_n = u];$$

- математическое ожидание дохода (приращения значения рассматриваемого аддитивного функционала $\eta(t)$) за время пребывания процесса $\xi(t)$ в фиксированном состоянии j , которое определяется без условия на управление, $j \in X$:

$$c_j = \int_U c_j(u) d\Psi_j(u).$$

Параметры m_j , $j \in X$, входящие в (7), определяются равенствами (3) и (6). Вектор $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$ представляет собой стационарное распределение вложенной цепи Маркова $\{\xi_n\}$ и зависит от заданной стратегии управления.

Теперь сформулируем основной результат данного раздела, связанный с аналитическим представлением стационарного стоимостного показателя эффективности управления вида (7).

Теорема 1. *Стационарный стоимостный функционал I вида (7), связанный с управляемым полумарковским процессом $\xi(t)$, представляется в форме дробно-линейного интегрального функционала от управляющих вероятностных распределений:*

$$I = I(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N) = \\ = \left(\iint_{U^{(N)}} \dots \int A(u_1, u_2, \dots, u_N) d\Psi_1(u_1) d\Psi_2(u_2) \dots \right. \\ \left. \dots d\Psi_N(u_N) \right) / \left(\iint_{U^{(N)}} \dots \int B(u_1, u_2, \dots, \right. \\ \left. \dots, u_N) d\Psi_1(u_1) d\Psi_2(u_2) \dots d\Psi_N(u_N) \right), \quad (8)$$

где подынтегральные функции числителя и знаменателя задаются следующими выражениями:

$$A(u_1, u_2, \dots, u_N) = \sum_{j=1}^N c_j(u_j) \widehat{D}^{(j)}(u_1, u_2, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_N); \quad (9)$$

$$B(u_1, u_2, \dots, u_N) = \sum_{j=1}^N m_j(u_j) \widehat{D}^{(j)}(u_1, u_2, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_N), \quad (10)$$

а функции $\widehat{D}^{(j)}(u_1, u_2, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_N)$, $j = 1, 2, \dots, N$, в свою очередь, определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \widehat{D}^{(j)}(u_1, u_2, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_N) &= \\ &= (-1)^j \sum_{\alpha^{(N),j}} (-1)^{\delta(\alpha^{(N),j})} \widehat{D}_0^{(j)}(\alpha^{(N),j}; u_1, u_2, \dots, \\ &\dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_N), \quad (11) \end{aligned}$$

где $\alpha^{(N),j} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_N)$ — произвольная перестановка чисел $(1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, N)$; $\delta(\alpha^{(N),j})$ — число инверсий в перестановке $\alpha^{(N),j}$, причем суммирование в правой части формулы (11) проводится по всем возможным перестановкам набора чисел $(1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, N)$, т. е. число членов в этой сумме составляет $(N-1)!$;

$$\begin{aligned} \widehat{D}_0^{(j)}(\alpha^{(N),j}; u_1, u_2, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_N) &= \\ &= \widetilde{p}_{1,\alpha_1}(u_1) \widetilde{p}_{2,\alpha_2}(u_2) \cdots \\ &\cdots \widetilde{p}_{j-1,\alpha_{j-1}}(u_{j-1}) \widetilde{p}_{j+1,\alpha_{j+1}}(u_{j+1}) \cdots \\ &\cdots \widetilde{p}_{N,\alpha_N}(u_N), \quad (12) \end{aligned}$$

где

$$\widetilde{p}_{i,\alpha_i}(u_i) = \begin{cases} p_{ii}(u_i) - 1, & \text{если } \alpha_i = i; \\ p_{i,\alpha_i}(u_i), & \text{если } \alpha_i \neq i, \end{cases} \quad (13)$$

Доказательство теоремы 1 приведено в работе [7].

Замечание 1. Интегральные выражения в числителе и знаменателе функционала вила (8) представляют собой многомерные интегралы Лебга–Стилтьеса, заданные на декартовых произведениях пространств допустимых управлений $U^{(N)} = U \times U \times \dots \times U$. Вероятностные меры, на которых определены эти интегралы, порождаются произведениями вероятностных мер, образующих стратегии управления. Теория конечных произведений измеримых пространств, на которых заданы исходные меры, и соответствующих произведений мер,

определяемых на произведении пространств, изложена в известной работе П. Халмоша [8].

Замечание 2. Функции $c_j(u_j)$, $m_j(u_j)$ и $p_{jk}(u_j)$, $j, k = 1, 2, \dots, N$, входящие в правые части соотношений (9)–(13), предполагаются известными. Таким образом, подынтегральные функции интегральных выражений в числителе и знаменателе функционала (8) имеют явные аналитические представления.

3 Представление функционала математического ожидания времени пребывания процесса в заданном подмножестве состояний

Одна из важнейших вероятностных характеристик полумарковского процесса — распределение времени его пребывания в заданном подмножестве множества состояний до первого выхода из этого подмножества. В содержательных прикладных задачах, когда данный полумарковский процесс описывает эволюцию некоторой реальной системы, время пребывания в заданном подмножестве состояний может совпадать, например, с временем до первого отказа системы, или с временем до первого наступления определенного «нежелательного» события. В связи с этим математическое ожидание времени пребывания управляемого процесса в заданном подмножестве состояний может вполне естественно рассматриваться как один из важных показателей эффективности управления.

Рассмотрим вновь управляемый полумарковский процесс $\xi(t)$ с дискретным множеством состояний X . Предположим дополнительно, что данный процесс может с положительной вероятностью обрываться в некоторый момент времени, совпадающий с одним из моментов изменения состояний, причем событие, заключающееся в обрыве процесса, не зависит от принимаемых решений. Обозначим через ζ случайное число изменений состояний процесса до момента обрыва (включительно). Тогда основные вероятностные характеристики управляемого полумарковского процесса $\xi(t)$, задаваемые соотношениями (1)–(6), будут определяться при дополнительном условии ($\zeta > n$). Во введенных обозначениях t_ζ представляет собой момент последнего скачка, или обрыва, процесса. В стандартном варианте, когда процесс является необрывающимся, т. е. $P(\zeta = \infty) = 1$, будем полагать, что момент обрыва также равен бесконечности с вероятностью, равной единице.

Пусть $X_0 \subset X$ — заданное подмножество множества состояний полумарковского процесса $\xi(t)$; $k \in X_0$ — фиксированное состояние подмножества X_0 . Предположим, что в некоторый случайный момент времени t_n процесс $\xi(t)$ перешел в состояние k , т.е. значение процесса $\xi(t_n) = k$. Обозначим через $\zeta_k^{(n)}$ случайное время от момента t_n до момента первого выхода процесса из подмножества состояний X_0 .

Рассмотрим теперь математические ожидания случайных длительностей пребывания полумарковского процесса $\xi(t)$ в подмножестве состояний X_0 . Положим

$$a_k = E \left(\zeta_k^{(n)} | t_\zeta > t_n + \zeta_k^{(n)} \right),$$

если процесс $\xi(t)$ обрывающийся. Если же процесс $\xi(t)$ необрывающийся, т.е. с вероятностью, равной единице, реализуется событие ($\zeta = \infty$), то будем полагать

$$a_k = E \zeta_k^{(n)}, \quad k \in X_0.$$

Поскольку распределение случайной величины $\zeta_k^{(n)}$ не зависит от n , в дальнейшем индекс n в обозначении данной величины будем опускать.

Как известно [9, 10], математические ожидания a_k , $k \in X_0$, удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений, связанных с уравнениями марковского восстановления:

$$a_k = m_k + \sum_{i \in X_0} p_{ki} a_i, \quad k \in X_0. \quad (14)$$

Заметим, что величины p_{ki} , $k, i \in X_0$, и m_k , $k \in X_0$, входящие в соотношение (14), определяются равенствами (4) и (6) при дополнительном условии, связанном с возможным обрывом процесса $\xi(t)$.

Теперь можно установить аналитическую структуру зависимости показателей a_k , $k \in X_0$, от управляющих вероятностных распределений.

Теорема 2. Пусть X_0 — конечное множество: $X_0 = \{1, 2, \dots, N_0\}$. Тогда для любого фиксированного $k \in \{1, 2, \dots, N_0\}$ функционал a_k среднего времени пребывания процесса $\xi(t)$ в множестве состояний X_0 с начальным состоянием k имеет следующий вид:

$$a_k(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{N_0}) = \left(\iint \dots \int_{U^{(N_0)}} A_k^{(0)}(u_1, u_2, \dots, u_{N_0}) d\Psi_1(u_1) d\Psi_2(u_2) \dots d\Psi_{N_0}(u_{N_0}) \right) / \left(\iint \dots \int_{U^{(N_0)}} B^{(0)}(u_1, u_2, \dots, u_{N_0}) d\Psi_1(u_1) d\Psi_2(u_2) \dots d\Psi_{N_0}(u_{N_0}) \right). \quad (15)$$

Здесь

$$A_k^{(0)}(u_1, u_2, \dots, u_{N_0}) = \sum_{i^{(N_0)}} (-1)^{\delta(i^{(N_0)})+1} \tilde{p}_{i_1,1}(u_{i_1}) \tilde{p}_{i_2,2}(u_{i_2}) \dots \tilde{p}_{i_{k-1},k-1}(u_{i_{k-1}}) m_{i_k}(u_{i_k}) \tilde{p}_{i_{k+1},k+1}(u_{i_{k+1}}) \dots \tilde{p}_{i_{N_0},N_0}(u_{i_{N_0}}), \quad k = 1, 2, \dots, N_0; \quad (16)$$

$$B^{(0)}(u_1, u_2, \dots, u_{N_0}) = \sum_{j^{(N_0)}} (-1)^{\delta(j^{(N_0)})} \tilde{p}_{j_1,1}(u_{j_1}) \tilde{p}_{j_2,2}(u_{j_2}) \dots \tilde{p}_{j_{N_0},N_0}(u_{j_{N_0}}), \quad (17)$$

где $i^{(N_0)} = (i_1, i_2, \dots, i_{N_0})$ и $j^{(N_0)} = (j_1, j_2, \dots, j_{N_0})$ — произвольные перестановки набора чисел $(1, 2, \dots, N_0)$; $\delta(i^{(N_0)})$ — число инверсий в перестановке $i^{(N_0)}$; суммирование в формулах (16) и (17) для функций $A_k^{(0)}(u_1, u_2, \dots, u_{N_0})$, $k = \overline{1, N_0}$, $B^{(0)}(u_1, u_2, \dots, u_{N_0})$ проводится по всем возможным перестановкам чисел $(1, 2, \dots, N_0)$, т.е. число членов в указанных суммах равно $N_0!$.

Величины, входящие в правые части соотношений (16) и (17), определяются равенством

$$\tilde{p}_{ij}(u_i) = \begin{cases} p_{ii}(u_i) - 1, & \text{если } j = i; \\ p_{ij}(u_i), & \text{если } j \neq i. \end{cases} \quad (18)$$

Доказательство теоремы 2 в целом аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 3. Вероятностные характеристики полумарковского процесса $p_{ij}(u_i)$, $m_k(u_k)$, $i, j, k = \overline{1, 2, \dots, N_0}$, предполагаются заданными. Таким образом, подынтегральные функции интегральных выражений в числителе и знаменателе функционала (15) определяются аналитически соотношениями (16)–(18).

4 Аналитическое представление специального функционала, связанного с предельным распределением времени пребывания полумарковского процесса в заданном подмножестве состояний

В данном разделе будет исследован показатель, также связанный с распределением времени пребывания управляемого полумарковского процесса в заданном подмножестве состояний. В отличие от предыдущего варианта предполагается, что веро-

ятностные характеристики управляемого полумарковского процесса зависят от некоего малого параметра. При этом вероятность выхода процесса из заданного подмножества состояний достаточно мала при стремлении этого параметра к нулю. Прикладное содержание такого предположения заключается в том, что вероятность отказа соответствующей системы или вероятность иного «нежелательного» события мала, т. е. система считается высоконадежной. Исследование таких систем представляет значительный интерес.

Было установлено [9], что предельное распределение времени до первого выхода полумарковского процесса из заданного подмножества состояний при стремлении малого параметра к нулю в некотором смысле близко к экспоненциальному. Основываясь на этом результате, можно предложить еще один содержательный показатель эффективности управления полумарковским процессом в модели с малым параметром. Основное утверждение данного раздела состоит в определении аналитической структуры этого показателя.

Построим модель управления полумарковским процессом, взяв за основу схему полумарковского процесса с малым параметром, изложенную в [9, гл. 6]. Пусть $\xi^{(\varepsilon)}(t)$ — управляемый полумарковский процесс, зависящий от (малого) параметра ε и принимающий значения в дискретном фазовом пространстве $X = X_0 \cup \{0\}$, где $X_0 = \{1, 2, \dots, N_0\}$; $\{0\}$ — поглощающее состояние. Как и в исходной полумарковской модели, основные вероятностные характеристики процесса $\xi^{(\varepsilon)}(t)$ определяются равенствами (1)–(6). Предположим, что полумарковские функции $Q_{ij}(t, u)$, $i, j \in X$, зависят от ε следующим образом:

$$Q_{ij}^{\varepsilon}(t, u) = p_{ij}^{\varepsilon}(u)G_{ij}(t, u),$$

где

$$G_{ij}(t, u) = P(\theta_n < t | \xi_n = i, \xi_{n+1} = j, u_n = u),$$

причем условные распределения $G_{ij}(t, u)$, $i, j \in X$, не зависят явно от параметра ε . Вероятность перехода $p_{ij}^{\varepsilon}(u)$ вложенной цепи Маркова исходного полумарковского процесса $\xi^{(\varepsilon)}(t)$ определяется соотношением:

$$p_{ij}^{\varepsilon}(u) = \begin{cases} p_{ij}(u) - \varepsilon b_{ij}(u), & i, j \in X_0; \\ \varepsilon q_i(u), & i \in X_0, j = 0; \\ 1, & i = j = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Функции $b_{ij}(u)$ и $q_i(u)$, $i, j \in X_0$, входящие в соотношение (19), предполагаются известными, причем выполняется условие

$$q_i(u) = \sum_{j \in X_0} b_{ij}(u), \quad i \in X_0.$$

Указанные функции являются также ограниченными и интегрируемыми по соответствующим управляющим вероятностным распределениям $\Psi_i(u)$, $i \in X_0$.

Определение 1. Полумарковский процесс $\xi^{(\varepsilon)}(t)$, принимающий значения в фазовом пространстве $X = X_0 \cup \{0\}$, определяемый начальным распределением $p^{(0)}$ (или заданным начальным состоянием $i_0 \in X_0$), совокупностью полумарковских функций $\{Q_{ij}^{\varepsilon}(t, u)$, $i, j \in X\}$ и набором управляющих распределений (стратегией управления) $\Psi_i(u)$, $i \in X_0$, будем называть возмущенным управляемым полумарковским процессом.

Определение 2. Полумарковский процесс $\xi^{(0)}(t)$ с фазовым пространством X_0 , задаваемый полумарковскими функциями $Q_{ij}(t, u) = p_{ij}(u)G_{ij}(t, u)$, $i, j \in X_0$, соответствующим начальным условием и набором управляющих вероятностных распределений $\Psi_i(u)$, $i \in X_0$, называется невозмущенным процессом, управляемым в определенном выше смысле. Аналогично вложенные цепи Маркова $\{\xi_n^{(\varepsilon)}\}$ и $\{\xi_n^{(0)}\}$ полумарковских процессов $\xi^{(\varepsilon)}(t)$ и $\xi^{(0)}(t)$ называются соответственно возмущенной и невозмущенной вложенными цепями Маркова.

Как следует из (19), матрица переходных вероятностей $\mathbf{P}^{(\varepsilon)}(u)$ управляемой возмущенной цепи $\{\xi_n^{(\varepsilon)}\}$, рассматриваемой на множестве X_0 , представима в виде

$$\mathbf{P}^{(\varepsilon)}(u) = \mathbf{P}^{(0)}(u) - \varepsilon \mathbf{B}(u), \quad (20)$$

где $\mathbf{P}^{(0)}(u) = \{p_{ij}(u)$, $i, j \in X_0\}$ — матрица переходных вероятностей управляемой невозмущенной цепи $\{\xi_n^{(0)}\}$, $\varepsilon \mathbf{B}(u) = \{\varepsilon b_{ij}(u)$, $i, j \in X_0\}$ — матрица возмущений. Обозначим:

$$p_{ij} = P(\xi_{n+1}^{(0)} = j | \xi_n^{(0)} = i) = \int_U p_{ij}(u) d\Psi_i(u); \quad (21)$$

$$q_i = \int_U q_i(u) d\Psi_i(u) = \sum_{j \in X_0} b_{ij}, \quad i \in X_0. \quad (22)$$

где

$$b_{ij} = \int_U b_{ij}(u) d\Psi_i(u).$$

Из равенств (20)–(22) следует матричное соотношение

$$\mathbf{P}^{(\varepsilon)} = \mathbf{P}^{(0)} - \varepsilon \mathbf{B},$$

где $\mathbf{P}^{(\varepsilon)} = \{p_{ij}^{(\varepsilon)}$, $i, j \in X_0\}$, $\mathbf{P}^{(0)} = \{p_{ij}$, $i, j \in X_0\}$, $\mathbf{B} = \{b_{ij}$, $i, j \in X_0\}$. Рассмотрим также следующие характеристики невозмущенного управляемого полумарковского процесса $\xi^{(0)}(t)$:

$$g_{ij}^{(1)} = \int_U \left\{ \int_0^\infty t d_i G_{ij}(t, u) \right\} d\Psi_i(u), \quad i, j \in X_0;$$

$$m_i(u) = \mathbb{E} \left(\theta_n^{(0)} | \xi_n^{(0)} = i, u_n = u \right) =$$

$$= \int_0^\infty \sum_{j=1}^{N_0} t d_i Q_{ij}(t, u), \quad i = 1, 2, \dots, N_0; \quad (23)$$

$$m_i = \mathbb{E} \left(\theta_n^{(0)} | \xi_n^{(0)} = i \right) = \int_U m_i(u) d\Psi_i(u) =$$

$$= \sum_{j \in X_0} p_{ij} g_{ij}^{(1)}. \quad (24)$$

По аналогии с [9] предположим, что для любых допустимых стратегий управления полумарковским процессом $\xi^{(\varepsilon)}(t)$ выполнены следующие условия:

- (1) $Q_{ij}^*(s) = p_{ij} - s p_{ij} g_{ij}^{(1)} + o(s)$, где $Q_{ij}^*(s)$ — преобразование Лапласа–Стилтьеса функции $Q_{ij}(t)$, $i, j \in X_0$;
- (2) вложенная невозмущенная цепь Маркова $\{\xi_n^{(0)}\}$ имеет ровно один класс положительно возвратных состояний;
- (3) существует такое состояние $i \in X_0$, которое возвратно в невозмущенном управляемом полумарковском процессе $\xi^{(0)}(t)$ и для которого $p_{i0}^\varepsilon > 0$.

Заметим, что для произвольной фиксированной допустимой стратегии управления состояние i возвратно в полумарковском процессе $\xi^{(0)}(t)$ тогда и только тогда, когда оно возвратно во вложенной цепи Маркова данного процесса [9].

Обозначим через $\zeta_k^{(\varepsilon)}$ время пребывания процесса $\xi^{(\varepsilon)}(t)$ в подмножестве состояний X_0 до поглощения в состоянии $\{0\}$, определяемое при условии, что в начальный момент $t = 0$ процесс попадает в состояние $k \in X_0$. Тогда, согласно теореме 6.1 из [9], получаем следующее представление для предельного распределения случайного времени пребывания процесса $\xi^{(\varepsilon)}(t)$ в подмножестве состояний:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left(\varepsilon \zeta_k^{(\varepsilon)} \geq x \right) = e^{-\lambda x}. \quad (25)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{\sum_{i \in X_0} q_i \pi_i}{\sum_{i \in X_0} m_i \pi_i},$$

где q_i , $i \in X_0$, определяются равенствами (22), параметры m_i , $i \in X_0$, — соотношениями (23) и (24); $\{\pi_i, i \in X_0\}$ — стационарное распределение невозмущенной цепи Маркова, определяемой матрицей переходных вероятностей $\mathbf{P}^{(0)}$. Из соотноше-

ния (25) непосредственно следует, что при достаточно малых ε для любого фиксированного значения $y > 0$ можно приближенно полагать, что

$$\mathbb{P} \left(\zeta^{(\varepsilon)} \geq y \right) = e^{-\lambda \varepsilon y}. \quad (26)$$

Теперь рассмотрим величину T , определяемую равенством

$$T = \lambda^{-1} = \frac{\sum_{i \in X_0} m_i \pi_i}{\sum_{i \in X_0} q_i \pi_i}. \quad (27)$$

Параметр T представляет собой предельное значение нормированного среднего времени пребывания полумарковского процесса $\xi^{(\varepsilon)}(t)$ в подмножестве состояний X_0 до поглощения в состоянии $\{0\}$:

$$T = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \mathbb{E} \zeta_k^{(\varepsilon)}.$$

Отметим, что если $T^* \geq T$, то для любого $x \geq 0$ выполняется неравенство $e^{-\lambda^* \varepsilon x} \geq e^{-\lambda \varepsilon x}$, где $\lambda^* = (T^*)^{-1}$. Учитывая вероятностное содержание функции (26), можно утверждать, что наилучшим предельным распределением случайной величины $\zeta^{(\varepsilon)}$ будет распределение с минимальным значением параметра λ , т. е. с максимальным значением параметра T . Таким образом, величину T можно рассматривать как содержательный показатель эффективности управления возмущенным полумарковским процессом. Как и в предыдущих разделах, выясним структуру зависимости показателя T , определяемого равенством (27), от управляющих вероятностных распределений.

Теорема 3. Пусть $X_0 = \{1, 2, \dots, N_0\}$ — конечное множество. Тогда показатель T , характеризующий предельное распределение времени до первого выхода процесса из данного подмножества, имеет следующее аналитическое представление:

$$T = \tilde{T}(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{N_0}) =$$

$$= \left(\int \dots \int_{U^{(N_0)}} \tilde{A}(u_1, u_2, \dots, u_{N_0}) d\Psi_1(u_1) d\Psi_2(u_2) \dots \right.$$

$$\left. \dots d\Psi_{N_0}(u_{N_0}) \right) / \left(\int \dots \int_{U^{(N_0)}} \tilde{B}(u_1, u_2, \dots \right.$$

$$\left. \dots, u_{N_0}) d\Psi_1(u_1) d\Psi_2(u_2) \dots d\Psi_{N_0}(u_{N_0}) \right). \quad (28)$$

Здесь

$$\tilde{A}(u_1, u_2, \dots, u_{N_0}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N_0} \sum_{i \in (N_0), k} (-1)^{\delta(i^{(N_0)}, k) + k} \tilde{p}_{1, i_1}(u_1) \tilde{p}_{2, i_2}(u_2) \dots$$

$$\dots \tilde{p}_{k-1, i_{k-1}}(u_{k-1}) m_k(u_k) \tilde{p}_{k+1, i_{k+1}}(u_{k+1}) \dots$$

$$\dots \tilde{p}_{N_0, i_{N_0}}(u_{N_0}); \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}(u_1, u_2, \dots, u_{N_0}) &= \\ &= \sum_{k=1}^{N_0} \sum_{j \in (N_0), k} (-1)^{\delta(j^{(N_0),k})+k} \tilde{p}_{1,j_1}(u_1) \tilde{p}_{2,j_2}(u_2) \dots \\ &\dots \tilde{p}_{k-1,j_{k-1}}(u_{k-1}) q_k(u_k) \tilde{p}_{k+1,j_{k+1}}(u_{k+1}) \dots \\ &\dots \tilde{p}_{N,j_{N_0}}(u_{N_0}), \quad (30) \end{aligned}$$

где $i^{(N_0),k} = (i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_{N_0})$ — произвольная перестановка чисел $(1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, N_0)$; $j^{(N_0),k} = (j_1, \dots, j_{k-1}, j_{k+1}, \dots, j_{N_0})$ — произвольная перестановка чисел $(1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, N_0)$; $\delta(i^{(N_0),k})$ и $\delta(j^{(N_0),k})$ — число инверсий в соответствующих перестановках. В выражениях для функций $\tilde{A}(u_1, u_2, \dots, u_{N_0})$ и $\tilde{B}(u_1, u_2, \dots, u_{N_0})$ суммирование проводится по всем возможным перестановкам. Функции $\tilde{p}_{ij}(u)$, входящие в (29) и (30), определяются соотношениями:

$$\tilde{p}_{ij}(u) = \begin{cases} p_{ii}(u) - 1, & i = j; \\ p_{ij}(u), & i \neq j, \\ i, j = 1, 2, \dots, N_0. \end{cases} \quad (31)$$

Замечание 4. Исходное аналитическое выражение для показателя T , определяемое формулой (27), имеет структуру, аналогичную стандартному стационарному стоимостному показателю (7). В связи с этим доказательство теоремы 3 полностью аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 5. Вероятностные характеристики полумарковского процесса $p_{ij}(u_i)$, $m_k(u_k)$ и $q_j(u_j)$, $i, j, k = 1, 2, \dots, N_0$, предполагаются заданными. Таким образом, подынтегральные функции интегральных выражений в числителе и знаменателе функционала (28) определяются аналитически соотношениями (29)–(31).

5 Заключение

В работах [11–13] были получены исчерпывающие результаты решения задачи безусловного экстремума для дробно-линейного интегрального функционала, заданного на множестве вероятностных мер. Теоретическое значение этих результатов для решения общей задачи управления марковскими и полумарковскими случайными процессами можно описать следующим образом. Если удается установить, что некоторый показатель, связанный с управляемым полумарковским процессом, может быть выражен в указанной форме, причем известны явные аналитические представления для подынтегральных функций его числителя и знаменателя, то решение задачи оптимального управления полностью определяется экстремальными свойствами

так называемой основной функции дробно-линейного интегрального функционала, которая представляет собой отношение указанных подынтегральных функций. Таким образом, проблема существования оптимальной детерминированной стратегии управления полумарковским процессом с конечным множеством состояний и проблема нахождения этой стратегии могут быть решены одновременно при помощи численного исследования на глобальный экстремум основной функции.

В настоящей работе установлено, что несколько конкретных содержательных показателей эффективности управления полумарковскими процессами с конечными множествами состояний могут быть представлены в форме дробно-линейных интегральных функционалов, заданных на множестве наборов вероятностных распределений, определяющих стратегию управления. При этом получены явные аналитические представления для основных функций этих функционалов. Таким образом, результаты данного исследования в совокупности с упомянутыми результатами работ [11–13] создают теоретическую основу общего метода решения проблем оптимального управления полумарковскими процессами с конечными множествами состояний.

Литература

1. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений / Пер. с англ. — М.: Наука, 1977. 176 с. (Mine H., Osaki S. Markovian decision processes. — New York, NY, USA: Elsevier, 1970. 142 p.)
2. Джевелл В. С. Управляемые полумарковские процессы // Кибернетический сборник. Новая серия. — М.: Мир, 1967. Вып. 4. С. 97–134. (Jewell W. S. Markov-renewal programming I, II // Oper. Res., 1963. Vol. 11. No. 6. P. 938–971.)
3. Luque-Vasquez F., Herndandez-Lerma O. Semi-Markov control models with average costs // Appl. Math., 1999. Vol. 26. No. 3. P. 315–331.
4. Vega-Amaya O., Luque-Vasquez F. Sample-path average cost optimality for semi-Markov control processes on Borel spaces: Unbounded costs and mean holding times // Appl. Math., 2000. Vol. 27. No. 3. P. 343–367.
5. Вопросы математической теории надежности / Под ред. Б. В. Гнеденко. — М.: Радио и связь, 1983. 376 с.
6. Барзилович Е. Ю., Капитанов В. А. Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем. — М.: Сов. радио, 1971. 272 с.
7. Шнурков П. В., Иванов А. В. Анализ дискретной полумарковской модели управления запасом непрерывного продукта при периодическом прекращении по-

- ребления // Дискретная математика, 2014. Т. 26. № 1. С. 143–154.
8. Халмос П. Теория меры / Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1953. 282 с. (*Halmos P. Measure theory.* — Princeton, NJ, USA: Van Nostrand, 1950. 304 p.)
 9. Королюк В. С., Турбин А. Ф. Полумарковские процессы и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1976. 184 с.
 10. Janssen J., Manca R. Applied semi-Markov processes. — New York, NY, USA: Springer, 2006. 309 p.
 11. Шнурков П. В. О решении задачи безусловного экстремума для дробно-линейного интегрального функционала на множестве вероятностных мер // Докл. Акад. наук, 2016. Т. 470. № 4. С. 387–392.
 12. Шнурков П. В., Горшенин А. К., Белоусов В. В. Аналитическое решение задачи оптимального управления полумарковским процессом с конечным множеством состояний // Информатика и ее применения, 2016. Т. 10. Вып. 4. С. 72–88.
 13. Shnurkov P. V. Solution of the unconditional extremum problem for a linear-fractional integral functional on a set of probability measures and its applications in the theory of optimal control of semi-Markov processes. arXiv:2001.06424v1 [math.OC], 2020. 26 p.

Поступила в редакцию 17.04.22

ON THE ANALYTICAL STRUCTURE OF SOME KINDS OF TARGET FUNCTIONALS ASSOCIATED WITH THE CONTROL PROBLEMS OF SEMI-MARKOV STOCHASTIC PROCESSES

P. V. Shnurkov

National Research University Higher School of Economics, 34 Tallinskaya Str., Moscow 123458, Russian Federation

Abstract: The present author investigates the analytical structure of three kinds of functionals from a controllable semi-Markov process with a finite set of states. It is proved that all these mathematical objects can be represented in the form of a fractional-linear integral functional defined on a finite set of probability measures that determine the control strategy of the corresponding semi-Markov process. For each of these functionals, explicit representations for the integrand functions of the numerator and denominator through the initial probabilistic characteristics of the controlled semi-Markov process are obtained. This result allows one to reduce the problem of optimal control of a semi-Markov process with a particular target functional to the problem of investigation on the global extremum of a given function of a finite number of variables.

Keywords: stochastic control models; optimal control of semi-Markovian processes; partial-linear integral functional; basic function of partial-linear integral functional

DOI: 10.14357/19922264220210

References

1. Mine, H., and S. Osaki. 1970. *Markovian decision processes*. New York, NY: Elsevier. 142 p.
2. Jewell, W. S. 1963. Markov-renewal programming. I, II. *Oper. Res.* 11(6):938–971.
3. Luque-Vasquez, F., and O. Herndandez-Lerma. 1999. Semi-Markov control models with average costs. *Appl. Math.* 26(3):315–331.
4. Vega-Amaya, O., and F. Luque-Vasquez. 2000. Sample-path average cost optimality for semi-Markov control processes on Borel spaces: Unbounded costs and mean holding times. *Appl. Math.* 27(3):343–367.
5. Gnedenko, B. V., ed. 1983. *Voprosy matematicheskoy teorii nadezhnosti* [Questions of mathematics reliability theory]. Moscow: Radio i svyaz'. 376 p.
6. Barzilovich, E. Yu., and V. A. Kashtanov. 1971. *Nekotorye matematicheskie voprosy teorii obsluzhivaniya slozhnykh sistem* [Some mathematical questions in theory of complex systems maintenance]. Moscow: Sovetskoe radio. 272 p.
7. Snurkov, P. V., and A. V. Ivanov. 2015. Analysis of a discrete semi-Markov model of continuous inventory control with periodic interruptions of consumption. *Discrete Math.* 25(1):59–67.
8. Halmos, P. 1950. *Measure theory*. Princeton, NJ: Van Nostrand. 304 p.
9. Korolyuk, V. S., and A. F. Turbin. 1976. *Polumarkovskie protsessy i ikh prilozheniya* [Semi-Markov processes and their applications]. Kiev: Naukova Dumka. 184 p.
10. Janssen, J., and R. Manca. 2006. *Applied semi-Markov processes*. New York, NY: Springer. 309 p.

11. Shnurkov, P. V. 2016. Solution of the unconditional extremum problem for a linear-fractional integral functional on a set of probability measures. *Dokl. Math.* 94(2):550–554.
12. Shnurkov, P. V., A. K. Gorshenin, and V. V. Belousov. 2016. Analiticheskoe reshenie zadachi optimal'nogo upravleniya polumarkovskim protsessom s konechnym mnozhestvom sostoyaniy [An analytic solution of the optimal control problem for a semi-Markov process with a finite set of states]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 10(4):72–88.
13. Shnurkov, P. 2020. Solution of the unconditional extremum problem for a linear-fractional integral functional on a set of probability measures and its applications in the theory of optimal control of semi-Markov processes. arXiv.org. 26 p. Available at: <https://arxiv.org/abs/2001.06424> (accessed April 29, 2022).

Received April 17, 2022

Contributor

Shnurkov Peter V. (b. 1953) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, National Research University Higher School of Economics, 34 Tallinskaya Str., Moscow 123458, Russian Federation; pshnurkov@hse.ru

СОВМЕСТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ И РАСПОЗНАВАНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ

И. Н. Синицын¹

Аннотация: Разработано методическое и алгоритмическое обеспечение аналитического моделирования, оценивания и идентификации для существенно нестационарных процессов (например, ударных) в стохастических системах (СтС), не разрешенных относительно производных (НРОП). Дан обзор профильных публикаций и изучены основные классы регрессионных уравнений СтС НРОП. Основные результаты: (1) для общего вида нелинейных СтС НРОП приведены оптимальные алгоритмы совместной фильтрации и распознавания; (2) для линейных гауссовских СтС НРОП получены простые алгоритмы; (3) для СтС НРОП, линейных относительно состояния X_t и нелинейных Y_t наблюдений, получены соответствующие алгоритмы; (4) в случае (3) методом нормальной аппроксимации получен простой алгоритм. Приводится иллюстративный пример скалярной нелинейной гауссовской СтС НРОП. Обсуждаются возможные обобщения разработанных алгоритмов.

Ключевые слова: стохастические системы, не разрешенные относительно производных; совместная фильтрация и распознавание; регрессионная модель

DOI: 10.14357/19922264220211

1 Введение

В [1] рассмотрены вопросы синтеза нелинейных субоптимальных гауссовских фильтров (НСОФ) для дифференциальных СтС НРОП. Представлены уравнения состояния и наблюдения нелинейных дифференциальных СтС НРОП. Синтез НСОФ выполнен при следующих условиях: (1) отсутствуют пуассоновские шумы в наблюдениях; (2) при гауссовском шуме не зависит от состояния. Подробно рассмотрен синтез НСОФ при аддитивных шумах в уравнениях состояния и наблюдения.

В [2] для нелинейных интегродифференциальных СтС (ИДСтС), не разрешенных относительно производных и приводимых к дифференциальным методом сингулярных ядер, разработаны алгоритмы аналитического моделирования нормальных стохастических процессов (СтП), при этом нелинейность под интегралом может быть разрывной, а также синтеза НСОФ для онлайн-обработки информации в ИДСтС. Предложены алгоритмы оценки качества НСОФ на основе теории чувствительности.

В [3] разработано методическое обеспечение для негладких правых частей уравнений СтС НРОП. Рассмотрены вопросы аналитического моделирования нормальных СтП на основе нелинейных регрессионных моделей. Особое внимание уделено методам гауссовской фильтрации и экстраполяции. Изучены вопросы условно-оптимальной фильтра-

ции и экстраполяции для СтС НРОП с параметрическими шумами.

Для систем, стохастически НРОП, в [4] разработано два подхода к сведению таких систем к детерминированным уравнениям, не разрешенным относительно математических ожиданий и ковариационных характеристик, а также математических ожиданий и координатных функций канонических разложений. После сведения таких систем к детерминированным используются известные результаты. Рассмотрены вопросы фильтрации, экстраполяции, идентификации и калибровки для приведенных моделей. Алгоритмы положены в основу инструментального программного обеспечения для решения задач надежности и безопасности технических систем.

В [5] дано развитие на случай типовых существенно нестационарных, в первую очередь ударных, возмущений. Рассмотрены вопросы аналитического моделирования нормальных СтП в скалярных и векторных СтС НРОП с помощью общих, а также основанных на канонических разложениях (КР) нелинейных корреляционных методов. Изучены случаи широкополосных, узкополосных и ударных возмущений. Отдельный раздел посвящен вопросам оптимизации, оценивания, идентификации и калибровки.

Следуя [2–6], поставим задачу совместной гауссовской фильтрации и распознавания классов про-

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук; Московский авиационный институт, sinitsin@dol.ru

цессов в СтС НРОП. В разд. 2 рассмотрены классы регрессионных уравнений для СтС НРОП. Основные четыре утверждения сформулированы и обоснованы в разд. 3. Иллюстративный пример дан в разд. 4. Заключение содержит выводы и некоторые обобщения.

2 Классы регрессионных уравнений для стохастических систем, не разрешенных относительно производных

2.1. Рассмотрим векторную систему уравнений

$$\Phi = \Phi(t, X_t, \bar{X}_t, Y_t, U_t) = 0. \quad (1)$$

Здесь X_t — вектор состояния; $\bar{X}_t = [X_t^T \dots (X_t^{(l)})^T]^T$ — расширенный вектор состояния; Y_t — вектор наблюдений; U_t — вектор возмущений; Φ — нелинейная функция переменных $\bar{X}_t = [X_t^T \bar{X}_t^T U_t^T]^T$, допускающая среднеквадратичную оптимальную регрессионную оценку $\hat{\Phi}(\bar{x}_t)$ регрессии $m^\Phi(\bar{x}_t) = M[\Phi|\bar{x}_t]$ в классе функций \mathcal{A}^Φ . Эта регрессия содержится в классе функций \mathcal{A}^Φ , в которой ищется оценка; в частности, если \mathcal{A}^Φ совпадает с множеством всех функций переменной \bar{x}_t , то оптимальной среднеквадратичной оценкой регрессии служит сама регрессия. Регрессия является единственной среднеквадратичной оценкой, реализующей минимум условного математического ожидания квадрата модуля ошибки аппроксимации при данном значении x_t .

Необходимым и достаточным условием оптимальности служит равенство [7]:

$$\text{tr} \left\{ M \left[\hat{\Phi}(\bar{X}_t) - \Phi \right] \psi(\bar{X}_t)^* \right\} = 0,$$

где $\psi(\bar{X}_t) \in \Psi$ — производная функция класса \mathcal{A}^Ψ ; $\hat{\Phi}(\bar{X}_t)$ — среднеквадратичная оптимальная оценка Φ в классе \mathcal{A}^Ψ ; * — символ транспонирования с заменой всех элементов соответствующими сопряженными числами.

Как известно [7], линейные регрессионные модели описываются уравнениями двух видов:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\bar{X}_t) &= g\bar{X}_t, \quad \psi(\bar{X}_t) = h\bar{X}_t, \\ g\Gamma_{\bar{x}_t} &= \Gamma_{\Phi\bar{x}_t}, \quad \Gamma_{x_t} = M[\bar{X}_t \bar{X}_t^*], \quad \Gamma_{\Phi\bar{x}_t} = M[\Phi \bar{X}_t^*]; \\ \hat{\Phi}(\bar{X}_t) &= g\bar{X}_t + a, \quad \psi(\bar{X}_t) = h\bar{X}_t + b, \\ K_{\Phi\bar{x}_t} &= M(\Phi - m^\Phi)(\bar{X}_t - m^{\bar{x}_t})^*, \\ gK_{\bar{x}_t} &= K_{\Phi\bar{x}_t}, \quad a = m^\Phi - gm^{\bar{x}_t}, \quad b = -hm^{\bar{x}_t}, \\ K_{\bar{x}_t} &= M(\bar{X}_t - m^{\bar{x}_t})(\bar{X}_t - m^{\bar{x}_t})^*. \end{aligned}$$

Рассмотренные регрессионные модели — детерминированные. Для их нахождения в линейном случае достаточно знать математические ожидания m^Φ и $m^{\bar{x}_t}$ и ковариационные матрицы $K_{\bar{x}_t}$ и $K_{\Phi\bar{x}_t}$. Для получения стохастической регрессионной модели достаточно представить функцию Φ в виде

$$\Phi = m^\Phi(\bar{X}) + Z_{1t}; \quad \Phi = \hat{\Phi}(\bar{X}) + Z_{2t}.$$

Для нахождения стохастической регрессионной модели необходимо еще знать распределение Φ при любом \bar{X} или по крайней мере ее математическое ожидание $m^\Phi(\bar{x}_t)$, регрессию и ковариационную матрицу $K_{\Phi}(\bar{x}_t)$, совпадающую с ковариационной матрицей $K_z(\bar{x}_t)$ для Z_{1t} и Z_{2t} .

Более общая задача наилучшего приближения регрессии конечной линейной комбинацией заданных функций классов $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ сводится к задаче наилучшего линейного приближения регрессии [7].

В дальнейшем будем основываться на следующих допущениях, лежащих в основе приведения уравнения (1) к виду, разрешенному относительно производных.

1. Стохастический процесс X_t и его производные обладают конечными моментами второго порядка и являются гауссовскими.
2. Векторная детерминированная функция Φ допускает линейную гауссовскую регрессионную линеаризацию относительно всех производных вплоть до старшей производной $X_t^{(l)}$:

$$\Phi \approx \Phi_0 + \sum_{j=1}^l k_{x_j}^\Phi X_t^{(j)} + k_U^\Phi U_t^0.$$

3. Вектор возмущения U_t обладает конечными моментами второго порядка и связан с гауссовским белым шумом V_0 линейным уравнением формирующего фильтра:

$$\dot{U}_t = a_t^U U_t + a_{0t}^U + b_t^U V_0, \quad (2)$$

где

$$M V_0 = 0, \quad M[V_0(t)V_0(t)^T] = \nu_0 \delta(t - \tau);$$

$\nu_0 = \nu_0(t)$ — матрица интенсивностей векторного белого шума V_0 .

Утверждение 2.1. Пусть векторное детерминированное уравнение (1) удовлетворяет условиям 1–3. Тогда СтС НРОП при условиях

$$\det k_{X_l}^\Phi \neq 0, \quad \det k_U^\Phi \neq 0$$

приводится к виду:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{1t} &= \bar{X}_{2t}, \dots, \dot{X}_{(l-1)t} = \bar{X}_{lt}, \\ \dot{X}_{lt} &= -(k_{X_l}^\Phi)^{-1} \bar{X}_t^{(l)} - (k_{X_l}^\Phi)^{-1} (k_U^\Phi)^{-1} U_t \end{aligned}$$

и (2). Матрицы коэффициентов $k_{X_l}^\Phi$ и k_U^Φ неявно зависят от первых двух вероятностных моментов переменных \bar{X}_t и U_t .

3 Основные результаты

3.1. Пусть СтС НРОП (1) удовлетворяет условиям утверждения 2.1 и приведена к гауссовской дифференциальной СтС, а измерительная система вполне наблюдаема. Кроме того, будем считать, что наблюдения гауссовские и они влияют на ее наблюдаемую регрессионную модель. В качестве исходных приведенных уравнений примем следующие:

$$\dot{X}_t = a(X_t, Y_t, \alpha, t) + b(X_t, Y_t, \alpha, t) V_0; \quad (3)$$

$$Z_t = \dot{Y}_t = a_1(X_t, Y_t, t) + b_1(X_t, Y_t, t) V_0. \quad (4)$$

Здесь a, a_1, b и b_1 — известные векторно-матричные функции отмеченных переменных, причем уравнение наблюдения (4) описывается уравнением, разрешенным относительно Y_t ; α — вектор параметров в уравнении состояния (3); V_0 — векторный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием $MV_0 = 0$ и интенсивностью $\nu_0 = \nu_0(t)$.

Во многих задачах распознавания наблюдаемой случайной величиной (СВ) является некоторая функция СтП, определяемого стохастическим дифференциальным уравнением, зависящим от того, к какому из распознаваемых классов относится этот СтП. В непрерывных СтС задача сводится к оцениванию неизвестного параметра в дифференциальных уравнениях, стохастически не разрешенных относительно производных. Предположим, что входящие в эти уравнения функции зависят от неизвестного параметра α , который может принимать одно значение из конечного множества значений $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, соответствующих распознаваемым классам A_1, \dots, A_N . Тогда задача распознавания сведется к решению вопроса о том, какое из значений $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ принимает параметр α для данного наблюдаемого сигнала. Но значение параметра α , выдаваемое системой распознавания, можно рассматривать как его оценку. Для решения задачи распознавания можно применить прием расширения вектора состояния системы, включив параметр $\alpha = \alpha_t$ ($\dot{\alpha}_t = 0$) в вектор состояния X_t . Единственное отличие состоит в том, что в задаче оценки неизвестных параметров параметр α неизвестен и априори может принимать любые значения, а в задаче распознавания α может принимать лишь одно из конечного множества заранее известных значений $\alpha_1, \dots, \alpha_N$.

Решение о том, к какому из N классов A_1, \dots, A_N относится наблюдаемый сигнал, обычно принимается по критерию максимума апостериорной вероятности: за значение параметра α принимается то из значений $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, которое имеет наибольшую апостериорную вероятность. Иными словами, модель распознавания

принимает $\hat{\alpha} = \alpha_h$, если апостериорная вероятность α_h больше (или по крайней мере не меньше) апостериорных вероятностей всех остальных значений $\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}, \alpha_{h+1}, \dots, \alpha_N$. Поэтому модель распознавания должна вычислять апостериорные вероятности всех классов (т.е. всех значений $\alpha_1, \dots, \alpha_N$).

3.2. Следуя [6], в силу $\dot{\alpha}_t = 0$ для среднеквадратичной гауссовской фильтрации будем основываться на следующем фильтрационном уравнении для апостериорной характеристической функции вектора $[\bar{X}_t^T \alpha_t^T]^T$:

$$dg_t(\lambda, \mu) = M \left[\left\{ i\lambda^T a(\bar{X}_t, Y_t, \alpha_t, t) - \frac{1}{2} \lambda^T (b\nu_0 b^T) (\bar{X}_t, Y_t, \alpha_t, t) \right\} \times \right. \\ \left. \times e^{i\lambda^T \bar{X}_t + i\mu^T \alpha_t} \mid Y_{t_0}^t \right] dt + M \left[\left\{ a_1(\bar{X}_t, Y_t, \alpha_t, t) \right\}^T - \right. \\ \left. - \hat{a}_1^T + i\lambda^T (b\nu_0 b_1^T) (x_t, Y_t, \alpha_t, t) \right\} e^{i\lambda^T X_t + i\mu^T \alpha_t} \mid Y_{t_0}^t \times \\ \times (b_1 \nu_0 b_1^T)^{-1} (Y_t, t) (dY_t - a_1 dt) \right].$$

Положив, что $\lambda = 0$, найдем стохастический дифференциал апостериорной характеристической функции $g'_t(\mu)$ вектора $g'_t(\mu) = M \left[e^{i\mu^T \alpha_t} \mid Y_{t_0}^t \right] = g_t(0, \mu)$:

$$dg'_t(\mu) = M \left[\left\{ a_1(\bar{X}_t, Y_t, \alpha_t, t) \right\}^T - \hat{a}_1^T \right] \times \\ \times e^{i\mu^T \alpha_t} \mid Y_{t_0}^t \left[(b_1 \nu_0 b_1^T)^{-1} (Y_t, t) (dY_t - \hat{a}_1 dt) \right]. \quad (5)$$

Принимая во внимание (3), получим

$$dg_t(\lambda) = \\ = M \left[\left\{ i\lambda^T a(X_t, Y_t, t) - \frac{1}{2} \lambda^T (b\nu b^T) (X_t, Y_t, t) \lambda \right\} \times \right. \\ \left. \times e^{i\lambda^T X_t} \mid Y_{t_0}^t \right] dt + M \left[\left\{ a_1(X_t, Y_t, t) \right\}^T - \right. \\ \left. - \hat{a}_1^T + i\lambda^T (b\nu_0 b_1^T) (X_t, Y_t, t) \right\} e^{i\lambda^T X_t} \mid Y_{t_0}^t \times \\ \times (b_1 \nu_0 b_1^T)^{-1} (Y_t, t) (dY_t - \hat{a}_1 dt) \right]. \quad (6)$$

Здесь введены обозначения:

$$(b\nu_0 b^T) (X_t, Y_t, t) = b(X_t, Y_t, t) \nu(t) b(X_t, Y_t, t)^T; \\ (b\nu_0 b_1^T) (X_t, Y_t, t) = b(X_t, Y_t, t) \nu_0(t) b_1(Y_t, t)^T; \\ (b_1 \nu_0 b_1^T)^{-1} (Y_t, t) = \left[b_1(Y_t, t) \nu_0(t) b_1(Y_t, t)^T \right]^{-1}; \\ \hat{a}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} a_1 p_t(x) dx = M \left[a_1(X_t, Y_t, t \mid Y_{t_0}^t) \right].$$

Правая часть здесь — функционал от характеристической функции $g_t(\lambda)$, рассматриваемой как функция λ , поскольку апостериорное распределение вектора X_t полностью и однозначно определяется этой характеристической функцией. Поэтому (6) представляет собой стохастическое дифференциальное уравнение для апостериорной характеристической функции $g_t(\lambda)$. Это уравнение нелинейно, поскольку $\hat{a}_1 = M[a_1(X_t, Y_t, t) | Y_{t_0}^t]$ тоже является функционалом от $g_t(\lambda)$. В начальный момент t_0 функция $g_{t_0}(\lambda)$ будет условной характеристической функцией величины X_0 относительно Y_0 . Это служит начальным условием для уравнения (6).

Но α_t — дискретная СВ с возможными значениями $\alpha_1, \dots, \alpha_N$. Поэтому, обозначив апостериорные вероятности этих значений соответственно через $q_1(t), \dots, q_N(t)$:

$$q_k(t) = P(\alpha_t = \alpha_k | Y_{t_0}^t) \quad (k = 1, \dots, N), \quad (7)$$

будем иметь следующие равенства:

$$g'_t(\mu) = \sum_{k=1}^N q_k(t) e^{i\mu^T \alpha_k}; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} M \left[a_1 \left(\bar{X}_t, Y_t, t \right)^T e^{i\mu^T} | Y_{t_0}^t \right] = \\ = \sum_{k=1}^N q_k(t) e^{i\mu^T \alpha_k} M \left[a_1 \left(\bar{X}_t, Y_t, \alpha_k, t \right)^T | Y_{t_0}^t \right]; \quad (9) \end{aligned}$$

$$\hat{a}_1 = \sum_{k=1}^N q_k(t) M \left[a_1 \left(\bar{X}_t, Y_t, \alpha_k, t \right)^T | Y_{t_0}^t \right]. \quad (10)$$

Подставив эти выражения в (5) и положив для краткости

$$\hat{a}_{1h} = M \left[a_1 \left(\bar{X}_t, Y_t, \alpha_h, t \right) | Y_{t_0}^t \right] \quad (h = 1, \dots, N), \quad (11)$$

придем к равенству:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N e^{i\mu^T \alpha_k} \dot{q}_k(t) = \left\{ \sum_{k=1}^N q_k(t) \hat{a}_{1k}^T e^{i\mu^T \alpha_k} - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^N \sum_{h=1}^N q_k(t) q_h(t) \hat{a}_{1h}^T e^{i\mu^T \alpha_k} \right\} (b_1 \nu_0 b_1^T)^{-1} \times \\ \times \left(\dot{Y}_t - \sum_{h=1}^N q_h(t) \hat{a}_{1h}^T \right). \quad (12) \end{aligned}$$

Сравнив коэффициенты при одинаковых показательных функциях в левой и правой частях этого равенства, получим:

$$\begin{aligned} \dot{q}_k(t) = \left(a_{1k}^T - \sum_{h=1}^N q_h(t) \hat{a}_{1h}^T \right) q_k(t) (b_1 \nu_0 b_1^T)^{-1} \times \\ \times \left(\dot{Y}_t - \sum_{h=1}^N q_h(t) \hat{a}_{1h}^T \right) \quad (k = 1, \dots, N). \quad (13) \end{aligned}$$

Величины (11) зависят от распределений процесса \bar{X}_t при $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_N$. Лишь после решения уравнения относительно апостериорных характеристических функций, вычисления апостериорных плотностей сигнала \bar{X}_t при $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_N$ и вычисления величин \hat{a}_{1k} как функций Y_t и t равенства (13) становятся уравнениями, определяющими $q_1(t), \dots, q_N(t)$.

Таким образом, задача оптимального распознавания сигнала решается лишь после решения уравнений (13) при соответствующих условиях. При этом уравнения определяют апостериорные вероятности классов $q_1(t), \dots, q_N(t)$ при всех $t \geq t_0$, если за их начальные значения при $t = t_0$ взять соответствующие условные вероятности классов относительно величины Y_0 .

Задачу оптимального распознавания сигнала можно решать с одновременным оцениванием вектора состояния системы \bar{X}_t . При этом оптимальная оценка $\hat{\bar{X}}_t$ определяется формулой:

$$\hat{\bar{X}}_t = \sum_{k=1}^N q_k(t) \hat{\bar{X}}_{t,k}, \quad (14)$$

где $\hat{\bar{X}}_{t,k}$ — условная оптимальная оценка вектора \bar{X}_t в предположении, что $\alpha = \alpha_k$ ($k = 1, \dots, N$). При этом в вектор x_t могут входить и неизвестные параметры, от которых могут зависеть функции a , ψ и a_1 .

Таким образом, задачу оптимального по критерию максимума апостериорной вероятности распознавания можно решать с одновременным среднеквадратичным оптимальным оцениванием вектора состояния системы и всех неизвестных параметров.

Утверждение 3.1. Пусть СтС НРОП (1) приведена к виду (3), (4). Тогда в условиях полного наблюдения задачу оптимального по критерию максимума апостериорной вероятности распознавания можно решать с одновременной среднеквадратичной оптимальной фильтрацией вектора состояния на основе соотношений (5), (7)–(14).

3.3. В случае линейных гауссовских уравнений (3), (4) сигналы Y_t и \bar{X}_t определяются для различных классов сигналов, т.е. для значений $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ параметра α , уравнениями ($k = 1, \dots, N$):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{X}}_t &= \left[\bar{a}(\alpha_k, t) Y_t + \bar{a}_1(\alpha_k, t) \bar{\hat{X}}_t + \right. \\ &\quad \left. + \bar{a}_0(\alpha_k, t) \right] + \bar{b}(\alpha_k, t) V_0, \\ \dot{Y}_t &= \left[c(\alpha_k, t) Y_t + c_1(\alpha_k, t) \bar{\hat{X}}_t + \right. \\ &\quad \left. + c_0(\alpha_k, t) \right] + \bar{b}_1(t) V_0. \end{aligned} \right\} (15)$$

В этом случае

$$a_{1k} = c(\alpha_k, t) Y_t + c_1(\alpha_k, t) \hat{\hat{X}}_{t,k} + c_0(\alpha_k, t) \quad (k = 1, \dots, N).$$

Здесь $\hat{\hat{X}}_{t,1}, \dots, \hat{\hat{X}}_{t,N}$ — условные оптимальные оценки вектора состояния $\bar{\hat{X}}_t$ при $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_k$, определяемые уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\hat{X}}}_{t,k} &= \\ &= \left[\bar{a}(\alpha_k, t) Y_t + \bar{a}_1(\alpha_k, t) \hat{\hat{X}}_{t,k} + \bar{a}_0(\alpha_k, t) \right] + \beta_k \left\{ \dot{Y}_t - \right. \\ &\quad \left. - \left[c(\alpha_k, t) Y_t + c_1(\alpha_k, t) \hat{\hat{X}}_{t,k} + c_0(\alpha_k, t) \right] \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

где параметры линейного фильтра β_k и R_k удовлетворяют уравнениям ($k = 1, \dots, N$):

$$\beta_k = \left[R_k c_1(\alpha_k, t)^T + (\bar{b}\nu_0\bar{b}_1^T)^{-1}(\alpha_k, t) \right] (\bar{b}_1\nu_0\bar{b}_1^T)^{-1}; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dot{R}_k &= \bar{a}(\alpha_k, t) R_k + R_k \bar{a}(\alpha_k, t)^T + (\bar{b}\nu_0\bar{b}^T)(\alpha_k, t) - \\ &- \left[R_k c_1(\alpha_k, t)^T + (\bar{b}\nu_0\bar{b}_1^T)(\alpha_k, t) \right] (\bar{b}_1\nu_0\bar{b}_1^T)^{-1}(t) \times \\ &\quad \times \left[c_1(\alpha_k, t) R_k + (\bar{b}_1\nu_0\bar{b}_1^T)(\alpha_k, t) \right]. \quad (18) \end{aligned}$$

Уравнения (13) для апостериорных вероятностей классов при этом принимают вид ($k = 1, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \dot{q}_k(t) &= \left\{ Y_t^T c(\alpha_k, t)^T + \hat{\hat{X}}_{t,k}^T c_1(\alpha_k, t)^T + c_0(\alpha_k, t)^T - \right. \\ &- \sum_{h=1}^N q_h(t) \left[Y_t^T c(\alpha_k, t)^T + \hat{\hat{X}}_{t,h}^T c_1(\alpha_k, t)^T + \right. \\ &\quad \left. + c_0(\alpha_k, t)^T \right] \left. \right\} q_k(t) (\bar{b}_1\nu_0\bar{b}_1^T)^{-1}(t) \left\{ \dot{Y}_t - \right. \\ &- \sum_{h=1}^N q_h(t) \left[c(\alpha_k, t) Y_t + c_1(\alpha_k, t) \hat{\hat{X}}_{t,h} + \right. \\ &\quad \left. + c_0(\alpha_k, t) \right] \left. \right\}. \quad (19) \end{aligned}$$

Оптимальная оценка вектора состояния X_t определяется после этого формулой (14).

Утверждение 3.2. Пусть СтС НРОП (1) приведена к виду (15). Тогда уравнениями совместной средне-квадратичной фильтрации и распознавания по критерию максимума апостериорной вероятности служат уравнения (14), (16)–(19).

3.4. Теперь рассмотрим случай, когда приведенные уравнения линейны относительно \hat{X}_t , но нелинейны относительно наблюдений Y_t :

$$\dot{\hat{X}}_t = \left[\tilde{a}_1(Y_t, \alpha_k, t) \bar{\hat{X}}_t + \tilde{a}_0(Y_t, \alpha_k, t) \right] + \tilde{b}(Y_t, \alpha_k, t) V_0; \quad (20)$$

$$\dot{Y}_t = \left[\tilde{c}_1(Y_t, \alpha_k, t) \bar{\hat{X}}_t + \tilde{c}_0(Y_t, \alpha_k, t) \right] + \tilde{b}_1(Y_t, t) V_0; \quad (21)$$

$$\hat{b}_{1k} = \tilde{c}_1(Y_t, \alpha_k, t) \hat{\hat{X}}_{t,k} + \tilde{c}_0(Y_t, \alpha_k, t) \quad (k = 1, \dots, N), \quad (22)$$

где оптимальные оценки $\hat{\hat{X}}_{t,1}, \dots, \hat{\hat{X}}_{t,N}$ вектора $\bar{\hat{X}}_t$ при $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_N$ определяются уравнениями [7] ($k = 1, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\hat{X}}}_{t,k} &= \left[\tilde{a}_1(Y_t, \alpha_k, t) \hat{\hat{X}}_{t,k} + \tilde{a}_0(Y_t, \alpha_k, t) \right] + \\ &+ \left[R_k \tilde{c}_1(Y_t, \alpha_k, t)^T + (\tilde{b}\nu_0\tilde{b}_1^T)(Y_t, \alpha_k, t) \right] \times \\ &\quad \times (\tilde{b}_1\nu_0\tilde{b}_1^T)^{-1}(Y_t, t) \left\{ \dot{Y}_t - \right. \\ &\quad \left. - \left[\tilde{c}_1(Y_t, \alpha_k, t)^T \hat{\hat{X}}_{t,k} + \tilde{c}_0(Y_t, \alpha_k, t) \right] \right\}; \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{R}_k &= \tilde{a}_1(Y_t, \alpha_k, t) R_k + R_k \tilde{a}_1(Y_t, \alpha_k, t)^T + \\ &+ (\tilde{b}\nu_0\tilde{b}^T)(Y_t, \alpha_k, t) - \left[R_k \tilde{c}_1(Y_t, \alpha_k, t)^T + \right. \\ &+ (\tilde{b}\nu_0\tilde{b}_1^T)(Y_t, \alpha_k, t) \left. \right] (\tilde{b}_1\nu_0\tilde{b}_1^T)^{-1}(Y_t, t) \times \\ &\quad \times \left[\tilde{c}_1(Y_t, \alpha_k, t) R_k + (\tilde{b}_1\nu_0\tilde{b}_1^T)(Y_t, \alpha_k, t) \right]. \quad (24) \end{aligned}$$

Уравнения (16) для апостериорных вероятностей классов при этом принимают вид ($k = 1, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= \left\{ \hat{\hat{X}}_{t,k}^T \tilde{c}_1(Y_t, \alpha_k, t)^T + \tilde{c}_0(Y_t, \alpha_k, t)^T - \right. \\ &- \sum_{h=1}^N q_h(t) \left[\hat{\hat{X}}_{t,h}^T \tilde{c}_1(Y_t, \alpha_h, t)^T + \tilde{c}_0(Y_t, \alpha_h, t)^T \right] \left. \right\} \times \\ &\quad \times q_k(t) (\tilde{b}_1\nu_0\tilde{b}_1^T)^{-1}(Y_t, t) \left\{ \dot{Y}_t - \right. \\ &- \sum_{h=1}^N q_h(t) \left[\tilde{c}_1(Y_t, \alpha_h, t) \hat{\hat{X}}_{t,h} + \tilde{c}_0(Y_t, \alpha_h, t) \right] \left. \right\}. \quad (25) \end{aligned}$$

Утверждение 3.3. Пусть СтС НРОП (1) приведена к линейным относительно X_t и нелинейным относительно Y_t уравнениям (20)–(22). Тогда уравнения совместной среднеквадратичной фильтрации и распознавания по критерию максимума апостериорной вероятности имеют вид (23)–(25).

3.5. В рамках метода нормальной аппроксимации (МНА) [6] апостериорной плотности вероятности, учитывая, что гауссовское (нормальное) распределение, аппроксимирующее апостериорное распределение вектора \bar{X}_t , полностью определяется апостериорными математическим ожиданием \hat{X}_t и ковариационной матрицей R_t вектора \bar{X}_t , при аппроксимации апостериорного распределения вектора \bar{X}_t нормальным распределением все математические ожидания будут представлять собой стохастические дифференциальные уравнения, определяющие \hat{X}_t и R_t :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}_t &= f(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t) dt + h(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t) dt \left[dY_t - \right. \\ &\quad \left. - f^{(1)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t) dt \right]; \quad (26) \\ \dot{R}_t &= \left\{ f^{(2)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t) - h(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t) \times \right. \\ &\quad \left. \times b_1 \nu_0 b_1^T(Y_t, t) h(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t)^T \right\} dt + \\ &\quad + \sum_{r=1}^{n_y} \rho_r(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t) \left[dY_r - \right. \\ &\quad \left. - f_r^{(1)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t) dt \right]. \quad (27) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t) &= [(2\pi)^n |R_t|]^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} a(Y_t, x, t) \times \\ &\quad \times \exp \left\{ - \left(x^T - \hat{X}_t^T \right) R_t^{-1} \frac{x - \hat{X}_t}{2} \right\} dx; \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t) &= \left\{ f_r^{(1)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t) \right\} = \\ &= [(2\pi)^{n_x} |R_t|]^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} a_1(Y_t, x, t) \times \\ &\quad \times \exp \left\{ - \left(x^T - \hat{X}_t^T \right) R_t^{-1} \frac{x - \hat{X}_t}{2} \right\} dx; \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t) &= \left\{ [(2\pi)^{n_x} |R_t|]^{-1/2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[x a_1(Y_t, x, t)^T + b \nu_0 b_1^T(Y_t, x, t) \right] \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad \left. \times \exp \left\{ - \left(x^T - \hat{X}_t^T \right) R_t^{-1} \frac{x - \hat{X}_t}{2} \right\} dx - \right. \\ &\quad \left. - \hat{X}_t f^{(1)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t)^T \right\} (b_1 \nu_0 b_1^T)^{-1}(Y_t, t); \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(2)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t) &= \\ &= [(2\pi)^{n_x} |R_t|]^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (x - \hat{X}_t) a(Y_t, x, t)^T + \right. \\ &\quad \left. + a(Y_t, x, t) \left(x^T - \hat{X}_t^T \right) + b \nu_0 b_1^T(Y_t, x, t) \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ - \left(x^T - \hat{X}_t^T \right) R_t^{-1} \frac{x - \hat{X}_t}{2} \right\} dx; \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_r(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t) &= [(2\pi)^{n_x} |R_t|]^{-1/2} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (x - \hat{X}_t) \left(x^T - \hat{X}_t^T \right) a_r(Y_t, x, t) + \right. \\ &\quad \left. + (x - \hat{X}_t) b_r(Y_t, x, t)^T \left(x^T - \hat{X}_t^T \right) + \right. \\ &\quad \left. + b_r(Y_t, x, t) \left(x^T - \hat{X}_t^T \right) \right\} \exp \left\{ - \left(x^T - \hat{X}_t^T \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times R_t^{-1} \frac{x - \hat{X}_t}{2} \right\} dx \quad (r = 1, \dots, n_y), \quad (32) \end{aligned}$$

где a_r — r -й элемент матрицы-строки $(a_1^T - \hat{a}_1^T)(b_1 \nu_0 b_1^T)^{-1}$; b_{kr} — элемент k -й строки и r -го столбца матрицы $(b_1 \nu_0 b_1^T)^{-1}$. Тогда, обозначив через b_r r -й столбец матрицы $b \nu_0 b_1^T (b_1 \nu_0 b_1^T)^{-1}$, имеем $b_r = [b_{1r} \dots b_{pr}]^T$ ($r = 1, \dots, n_1$).

Число уравнений МНА одномерного апостериорного распределения определяется по формуле:

$$Q_{\text{МНА}} = n_x + \frac{n_x(n_x + 1)}{2} = \frac{n_x(n_x + 3)}{2}.$$

За начальные значения \hat{X}_t и R_t при интегрировании уравнений (26) и (27), естественно, следует принять условные математическое ожидание и ковариационную матрицу величины \bar{X}_0 относительно Y_0 :

$$\left. \begin{aligned} \hat{X}_0 &= M_N \left[\bar{X}_0 \mid Y_0 \right]; \\ R_0 &= M \left[\left(\bar{X}_0 - \hat{X}_0 \right) \left(\bar{X}_0^T - \hat{X}_0^T \right) \mid Y_0 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Если нет информации об условном распределении \bar{X}_0 относительно Y_0 , то начальные условия можно взять в виде

$$\begin{aligned} \hat{\bar{X}}_0 &= M_N \bar{X}_0; \\ R_0 &= M_N \left(\bar{X}_0 - M_N \bar{X}_0 \right) \left(\bar{X}_0^T M_N \bar{X}_0^T \right). \end{aligned}$$

Если же и об этих величинах нет никакой информации, то начальные значения $\hat{\bar{X}}_t$ и R_t приходится задавать произвольно.

Из формулы (32) видно, что если функция a_1 линейна относительно \bar{X}_t , а функция b не зависит от \bar{X}_t , то при нормальной аппроксимации апостериорного распределения все матрицы ρ_r равны нулю, вследствие чего уравнение (27) не содержит \dot{Y}_t .

Утверждение 3.4. Пусть выполнены условия утверждения 3.2, а фильтрационные уравнения допускают решение МНА. Тогда уравнения совместной среднеквадратичной фильтрации и распознавания по критерию максимума апостериорной вероятности имеют вид (26)–(32) при условиях (33).

4 Пример

Рассмотрим скалярную систему следующего вида:

$$\varphi = \varphi_1 \left(\dot{X}_t \right) + \gamma X_t + U_t = 0; \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_t &= \rho U_t + b^U V_0; \\ Z_t = \dot{Y}_t &= c_1 X_t + b^Z V_0. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь $X_t, \dot{X}_t, U_t, \dot{U}_t$ и $Z_t = \dot{Y}_t$ — скалярные переменные; V_0 — гауссовский скалярный белый шум интенсивности ν_0 ; φ_1 — известная нелинейная функция \dot{X}_t ; γ, ρ, b^U, c_1 и b^Z — известные параметры. Заменяем функцию φ_1 линейной регрессией

$$\varphi_1 \approx \varphi_{10} + k_{\dot{X}}^{\varphi_1} \dot{X}_t, \quad (36)$$

где $\varphi_{10} = \varphi_{10}(m_t^{\dot{X}}, D_t^{\dot{X}})$; $k_{\dot{X}}^{\varphi_1} = k_{\dot{X}}^{\varphi_1}(m_t^{\dot{X}}, D_t^{\dot{X}})$ — коэффициенты регрессии.

Уравнение (34) с учетом (36) при условии $k_{\dot{X}}^{\varphi_1} \neq 0$ может быть представлено в виде линейного уравнения, параметрически зависящего от $m_t^{\dot{X}}$ и $D_t^{\dot{X}}$:

$$\dot{X}_t = - \left(k_{\dot{X}}^{\varphi_1} \right)^{-1} (\varphi_{10} - \gamma X_t - U_t). \quad (37)$$

Поставим задачу обнаружения несущего информацию сигнала X_t , определяемого линейным уравнением (37) в случае приема сигнала $Z_t = \dot{Y}_t$ согласно (35).

В таком случае параметр α_t имеет два значения: $\alpha_1 = 1$ (информационный сигнал присутствует в принимаемом сигнале) и $\alpha_2 = 0$ (принимается один шум). Уравнение, определяющее сигнал X_t , имеет вид:

$$\dot{X}_t = -\alpha_t \left(k_{\dot{X}}^{\varphi_1} \right)^{-1} (\varphi_{10} - \gamma X_t - U_t).$$

Уравнения (16), определяющие условные оптимальные оценки сигнала X_t при гипотезах $\alpha = 1$ и 0 , можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \dot{X}'_{t,1} &= \bar{a}(\alpha_1, t) Y_t + \bar{a}_1(\alpha_1, t) \dot{X}'_{t,1} + \bar{a}_0(\alpha_1, t) + \\ &\quad + \beta_1 \left(\dot{Y}_t - c_1 \dot{X}'_{t,1} \right); \\ \dot{X}'_{t,2} &= \beta_2 \left(\dot{Y}_t - c_1 \dot{X}'_{t,2} \right). \end{aligned}$$

Апостериорная вероятность q_1 присутствия сигнала, в силу условия $q_1 + q_2 = 1$, определяется из уравнения (19):

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \left(\dot{X}'_{t,1}{}^T c_1^T - q_1 \dot{X}'_{t,1}{}^T \bar{b}_1^T - q_2 \dot{X}'_{t,2}{}^T \bar{B}_1^T \right) q_1 \left(\bar{b}_1 \nu_0 \bar{b}_1 \right)^{-1} \times \\ &\quad \times \left(Z_t - q_1 c_1 \dot{X}'_{t,1} - q_2 c_1 \dot{X}'_{t,2} \right). \end{aligned}$$

В результате оптимальная оценка состояния определяется по формуле (14):

$$\hat{X}'_t = q_1 \dot{X}'_{t,1} + q_2 \dot{X}'_{t,2} \quad (q_1 + q_2 = 1).$$

Таким образом, оптимальная система обнаружения представляет собой, во-первых, последовательное соединение двух параллельно соединенных фильтров Калмана–Бьюси, вырабатывающих условные оценки $\dot{X}'_{t,1}$ и $\dot{X}'_{t,2}$ сигнала \dot{X}'_t , во-вторых, интегрирующего устройства дифференциального уравнения для q_1 и, в-третьих, порогового устройства, выдающего сигнал тревоги (сигнал о присутствии X'_t в случае, когда q_1 становится больше $1/2$).

5 Заключение

Рассмотрены вопросы общей теории совместной среднеквадратичной гауссовской фильтрации и распознавания по критерию максимума апостериорной вероятности распознавания. Предполагается, что в уравнения наблюдаемой системы входит вектор наблюдений.

Разработаны частные алгоритмы для случаев линейной и нелинейной зависимости уравнений от наблюдений. Приведен иллюстративный пример.

Результаты допускают обобщение на случай, когда уравнения СтС НРОП могут быть приведены к дискретными гауссовским системам.

Литература

1. Синицын И. Н. Аналитическое моделирование и оценивание нестационарных нормальных процессов в стохастических системах, не разрешенных относительно производных // Системы и средства информатики, 2022. Т. 32. № 2. С. 58–71.
2. Синицын И. Н. Аналитическое моделирование и фильтрация нормальных процессов в интегродифференциальных стохастических системах, не разрешенных относительно производных // Системы и средства информатики, 2021. Т. 31. № 1. С. 31–56.
3. Sinitsyn I. N. Analytical modeling and estimation of normal processes defined by stochastic differential equations with unsolved derivatives // J. Mathematics Statistics Research, 2021. Vol. 3. Iss. 1. Art. 139. 7 p. doi: 10.36266/JMSR/139.
4. Синицын И. Н. Нормализация систем, стохастически не разрешенных относительно производных // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 1. С. 32–38.
5. Пугачёв В. С., Синицын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. — М.: Наука, 1990. 632 с.
6. Синицын И. Н. Фильтры Калмана и Пугачева. — 2-е изд. — М.: Логос, 2007. 776 с.
7. Пугачёв В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. — 2-е изд. — М.: Физматлит, 2002. 496 с.

Поступила в редакцию 09.06.21

JOINT FILTRATION AND RECOGNITION OF NORMAL PROCESSES IN STOCHASTIC SYSTEMS WITH UNSOLVED DERIVATIVES

I. N. Sinitsyn^{1,2}

¹Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

²Moscow State Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation

Abstract: Methodological and algorithmic support for analytical modeling, estimation, identification, and calibration for essentially nonstationary (e. g., shock) stochastic systems with unsolved derivatives (StS USD) is worked out. It is supposed that state equations contain observation vector. After survey, classes of regression equations for StS USD are considered. Basic results: (i) for general StS USD, optimal algorithms of joint filtration and recognition are presented; (ii) for linear Gaussian equations, optimal algorithms of joint linear filtration and recognition are given; (iii) for StS USD, linear relatively on X_t and nonlinear relatively on Y_t algorithm is described; and (iv) in case of result (iii), using the method of normal approximation, the corresponding algorithm is developed. A scalar example of nonlinear StS USD with Gaussian noise corresponding algorithm is given and discussed. Some potential generalizations are presented.

Keywords: stochastic systems with unsolved derivatives; joint filtration and recognition; regression model

DOI: 10.14357/19922264220211

References

1. Sinitsyn, I. N. 2022. Analiticheskoe modelirovanie i otsenivanie nestatsionarnykh normal'nykh protsessov v stokhasticheskikh sistemakh, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnykh [Analytical modeling and estimation of nonstationary normal processes with unsolved derivatives]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 32(2):58–71.
2. Sinitsyn, I. N. 2021. Analiticheskoe modelirovanie i fil'tratsiya normal'nykh protsessov v integrodifferentsial'nykh stokhasticheskikh sistemakh, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnykh [Analytical modeling and filtering in integrodifferential systems with unsolved derivatives]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 31(1):37–56.
3. Sinitsyn, I. N. 2021. Analytical modeling and estimation of normal processes defined by stochastic differential equations with unsolved derivatives. *J. Mathematics Statistics Research* 3(1):139. 7 p. doi: 10.36266/JMSR/139.
4. Sinitsyn, I. N. 2022. Normalizatsiya sistem, stokhasticheski ne razreshennykh otnositel'no proizvodnykh [Normalization of systems with stochastically unsolved derivatives]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(1):32–38.
5. Pugachev, V. S., and I. N. Sinitsyn. 1987. *Stochastic differential systems. Analysis and filtering*. Chichester, New York: John Wiley & Sons. 549 p.
6. Sinitsyn, I. N. 2007. *Fil'try Kalmana i Pugacheva* [Kalman and Pugachev filters]. 2nd ed. Moscow: Logos. 776 p.
7. Pugachev, V. S. 2002. *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability theory and mathematical statistics]. 2nd ed. Moscow: Fizmatlit. 496 p.

Received June 9, 2021

Contributor

Sinitsyn Igor N. (b. 1940) — Doctor of Science in technology, professor, Honored scientist of RF, principal scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; professor, Moscow State Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; sinitsin@dol.ru

МЕТОД ВИЗУАЛИЗАЦИИ СНИЖЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ И РАЗРЕШЕНИЯ КОНФЛИКТОВ В ГИБРИДНЫХ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ МНОГОАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ

С. Б. Румовская¹, И. А. Кириков²

Аннотация: Многие практически проблемы диктуют необходимость коллективного решения, обеспечивающего плюрализм мнений, интеграцию частных точек зрения и снижение числа ошибок. Моделирование работы таких коллективов специалистов гибридными интеллектуальными многоагентными системами (ГиИМАС), учитывая особенности их групповой динамики, позволит повысить качество и эффективность решения, а также всесторонне рассмотреть проблему и процесс ее преодоления, в том числе с помощью визуализации конфликтов и процессов управления ими, предоставляя новую информацию по разрешению конфликтов и в системе, и в реальном коллективе специалистов. Работа посвящена разработке метода визуализации процессов разрешения конфликтов в рамках ГиИМАС с проблемно- и процессно-ориентированными конструктивными конфликтами.

Ключевые слова: коллектив специалистов; конфликт агентов; визуализация разрешения конфликта

DOI: 10.14357/19922264220212

1 Введение

В [1–6] предложены ГиИМАС, которые релевантны групповой динамике коллектива специалистов [7–9], решающего проблему, и моделируют проблемно- и процессно-ориентированные конфликты [1]. Это конструктивные инструментальные конфликты [10], актуализирующие плюрализм мнений относительно проблемы и способствующие поиску оптимальных способов ее решения. Такие конфликты идентифицируются [2], интенсифицируются [4] и разрешаются [6] в рамках ГиИМАС, повышая их релевантность работе реальных малых коллективов специалистов. Также в [3, 5] разработаны методы визуализации возникающих между агентами конфликтов и процесса их интенсификации в ГиИМАС, что повышает прозрачность работы системы для пользователя. В [6] описан один из методов управления конфликтами — разрешение конструктивных инструментальных конфликтов, включающий такие стратегии разрешения противоречий (СРП) [11], как переговоры — обмен знаниями и информацией о целях между агентами для достижения соглашения; делегирование — привлечение третьей стороны (агента) с более развитой базой знаний и возможностями, но не способной напрямую взаимодействовать с другими агентами; голосование — агенты голосуют по всем предвари-

тельно предложенным ими решениям; самомодификация — агент при возникновении конфликта вместо взаимодействия с целью выработки соглашения меняет свое поведение; игнорирование — отказ от разрешения конфликта ввиду его низкой интенсивности.

Работ, содержащих визуализацию конкретных конфликтов, найдено было мало [3], и все они отображают динамику деструктивных макроконфликтов [12] без деталей взаимодействия участников, а работы с визуализацией динамики конфликта в малых группах специалистов, решающих проблему (в том числе снижения интенсивности и разрешения конфликта), отсутствуют.

Цель настоящей работы — разработка метода визуализации процесса снижения интенсивности и разрешения конфликтов на базе предложенного метода их идентификации [2], функции управления [4] и метода разрешения [6] в рамках представленной в [1] модели ГиИМАС, что сделает возникшие противоречия контрастными, предоставляя детальную визуализацию разрешения конфликта, явно отображающую снижение интенсивности конфликта между каждой парой конфликтующих агентов — тип конфликта, напряженность между участниками, их изменение и применяемую стратегию разрешения конфликта или ее отсутствие.

¹ Калининградский филиал Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, sophiyabr@gmail.com

² Калининградский филиал Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, baltbipiran@mail.ru

2 Разрешение конфликтов между агентами как часть функции агента-фасилитатора «управление конфликтом»

В [4] задана функция агента-фасилитатора (АФ) «управление конфликтом», в рамках которой вычисляется среднее арифметическое показателей взаимозависимости целей агентов gd^{himas} , затем запускается функция идентификации конфликтов, анализирующая решения, предложенные агентами-специалистами (АС), и формирующая матрицу конфликтов CNF между парами агентов, элемент которой представляет собой кортеж ((3) из [4]):

$$cnf_{ij\ cnft} = \langle ag_i, ag_j, cnfn, cnft, АСТ_i^{agcr}, АСТ_j^{agcr} \rangle. \quad (1)$$

Здесь ag_i и ag_j — это агенты-субъекты конфликта, $i, j \in \mathbf{N}$, $i, j \in [1, n]$, $i \neq j$; $cnfn \in [0, 1]$ — напряженность конфликта; $cnft$ — «тип конфликта», определяется на множестве $CNFT = \{cnft_{prb} = \text{«проблемно-ориентированный»}, cnft_{prc} = \text{«процессно-ориентированный»}\}$; $АСТ_i^{agcr}$ и $АСТ_j^{agcr}$ — множества допустимых действий агентов ag_i и ag_j соответственно по разрешению противоречий, $АСТ_i^{agcr} \subseteq АСТ_i^{ag}$, $АСТ_j^{agcr} \subseteq АСТ_j^{ag}$, $АСТ_i^{agcr}, АСТ_j^{agcr} \subseteq АСТ_j^{ag}$, $АСТ_i^{agcr}, АСТ_j^{agcr} \subseteq АСТ_i^{ag}$, причем $АСТ_i^{ag}$ и $АСТ_j^{ag}$ — множества действий агентов ag_i и ag_j соответственно, а $АСТ^{agcr}$ — упорядоченное по отношению предпочтения \prec^{prf} множество допустимых стратегий АС по разрешению противоречий, включающее стратегии переговоров, делегирования, голосования, самомодификации и игнорирования соответственно:

$$АСТ^{agcr} = \left(\left\{ act_{ig}^{agcr}, act_{sm}^{agcr}, act_{vot}^{agcr}, act_{del}^{agcr}, act_{neg}^{agcr} \right\}, \prec^{prf} \right).$$

После формирования матрицы CNF вычисляется общий показатель напряженности конфликта в ГиИМАС cnf^{himas} [4]. На этом же этапе, если пользователь установил перед началом работы ГиИМАС необходимость визуализации работы коллектива агентов, запускается метод визуализации конфликта (МВК) [3] и отображаются gd^{himas} и cnf^{himas} с пороговыми значениями (по умолчанию 0 и 0,5 соответственно). Затем в зависимости от значений gd^{himas} и cnf^{himas} выполняется функция «стимуляция конфликтов» или «разрешение конфликтов»,

а также визуализация этих процессов (при необходимости). Если в результате выполнения одной из этих функций активируется признак завершения работы ГиИМАС, то инициализируется процедура окончания работы системы.

Последовательность шагов функции «управление конфликтом» (ПШФУК) АФ представлена в [4]. Визуализация стимуляции конфликта между агентами как модификация ПШФУК, дополненная запуском МВК [3] на базе матрицы CNF , а также визуализацией gd^{himas} и cnf^{himas} с их пороговыми значениями, описана в [5]. Алгоритм снижения интенсивности и разрешения конфликтов (АСИРК) в ГиИМАС предлагается в [6]. Метод визуализации разрешения конфликтов (МВРК) по всем парам конфликтующих агентов работает параллельно АСИРК. Рассмотрим подробнее предлагаемый метод МВРК в ГиИМАС.

3 Метод визуализации снижения интенсивности и разрешения конфликтов

Если пользователь установил перед запуском работы ГиИМАС флаг «необходимости визуализации динамики возможного конфликта», то в рамках работы системы запускается не функция «управление конфликтом», а ее модификация, включающая визуализацию и запуск МВК [5]. По аналогии с отображением вероятности перехода конфликта с одного уровня на другой в работе [13], разрешенные конфликты и стратегия разрешения противоречий, выбранная для применения между парой агентов на очередном шаге работы алгоритма АСИРК, визуализируются с помощью матрицы. В связи с этим для последующей работы МВРК перед запуском модификации ПШФУК необходимо сформировать матрицу $V_{m \times m}$ размерности m (равна мощности множества коллектива агентов), по диагонали которой стоят 0 ($v_{ii} = 0$), а на остальных позициях — 1 ($\forall i \neq j, i, j \in [1, m], v_{ij} = 1$), и установить: $k = 1$; $V_{m \times m}$. Рассмотрим последовательность шагов МВРК.

Первый шаг реализуется после запуска функции «разрешение конфликтов» на паре агентов ag_i, ag_j (субъектов конфликта). Его исполнение связано с верхней границей размерности малого коллектива специалистов относительно успешного руководства группой — соответствует «магическому числу» Дж. Миллера (7 ± 2), так как при численности свыше 10 человек возрастают число подгрупп и вероятность противостояния лицу, принимающему решения, осложняется координация. Однако, чтобы

учесть все возможные варианты и улучшить восприятие пользователем визуализации смены стратегий разрешения конфликтов между агентами и наличие возможных подгрупп, проверяем условие « $m > 10$ »: если принимает значение «истина», то запускаем функцию «выделение подгрупп конфликтующих агентов» (ФВПКА), иначе переходим ко второму шагу. Для того чтобы выделить возможные подгруппы неконфликтующих/слабоконфликтующих между собой агентов, воспользуемся алгоритмом поиска сообществ IS^2 [14, 15], приведенном в обзоре [16] и применяющемся к взвешенным неориентированным графам. IS^2 учитывает возможность принадлежности вершины нескольким сообществам и комбинирует алгоритмы последовательного обхода (Iterative Scan, IS) и удаления по рангу (Rank Removal, RaRe). Если перед началом работы ГиИМАС пользователь установил флаг «выявление подгрупп», то ФВПКА запускается при любом m и включает в себя следующие шаги:

- формирование матрицы РРК на базе матриц СР и СРР, полученных из CNF в процессе работы МВК (cr_{ij} описывает величину напряженности проблемно-ориентированного конфликта между агентами, а scr_{ij} — процессно-ориентированного конфликта):

$$prk_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j \\ \text{или } (0,5 (cr_{ij}^2 + scr_{ij}^2))^{0,5} > cnfin^{htr}; \\ 10\,000, & \text{если } scr_{ij} = cr_{ij} = 0; \\ (0,5 (cr_{ij}^2 + scr_{ij}^2))^{-0,5} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $cnfin^{htr}$ — верхний порог интенсивности конфликта (по умолчанию 0,5).

Чем выше напряженность конфликта между агентами, тем меньше вес ребра. Если вес равен нулю, то ребро отсутствует, в частности если между агентами имеет место сильный конфликт (напряженность выше порогового значения);

- запуск алгоритма RaRe на матрице РРК:
 - (1) подсчет рангов всех вершин (возможны разные подходы [8, 9], возьмем за меру степень вершины);
 - (2) удаление всех высокоранговых вершин с целью получения ядер (размерность по умолчанию — 2, можно корректировать) будущих сообществ;
 - (3) последовательное добавление каждой удаленной вершины к ядрам — если добавление приводит к увеличению весовой функции [8] ($W = W(C)/(W(C) + W_{out}(C))$), где

$W(C)$ — сумма весов ребер внутри сообщества C ; $W_{out}(C)$ — сумма весов ребер вне сообщества C), то оставляем вершину в сообществе. Вершина может добавляться к нескольким ядрам, образуя пересекающиеся сообщества;

- запуск алгоритма IS для уточнения результата, полученного от RaRe: выбирается произвольная вершина prk_i в качестве начального сообщества, к которой на каждом шаге добавляются другие вершины графа до тех пор, пока улучшается значение весовой функции W . Однако добавляемые вершины выбираются не из всего графа, а только из сообщества, полученного с помощью RaRe и содержащего вершину prk_i , а также из соседних сообществ;
- упорядочение строк и столбцов матрицы $V_{m \times m}$ в соответствии с полученным разбиением C коллектива агентов на сообщества.

Второй шаг — отображение последней сохраненной визуализации (укладки графа) конфликта и под ней отображение матрицы $V_{m \times m}$ как таблицы (рис. 1).

На рис. 1 i -е строка и столбец таблицы, отображающей матрицу, подписаны значением id_i^{ag} . На примере коллектива агентов, решающего задачу диагностики рака поджелудочной железы, $id_{id}^{ag} = \{«АХ», «АОНЛ», «АЛПР-Т», «АСУЗИ», «АВЛД», «АСЛД»\}$. По диагонали отображения матрицы располагаются черные квадраты (соответствуют $v_{ii} = 0$ в $V_{m \times m}$), так как сам с собой агент не конфликтует и эта область не интересна, а остальные элементы матрицы $V_{m \times m}$ отображаются белыми квадратами ($v_{ij} = 1, i \neq j$).

На графе конфликта (см. рис. 1) толщиной и цветом линии (от светло-серого до черного) отображается величина среднего квадратического напряженностей конфликтов между агентами (сплошной линией, если превалирует проблемно-ориентированный конфликт; штриховой — если процессно-ориентированный). Каждая вершина подписана идентификатором соответствующего агента. Слева от графа отображены gd^{himas} и cnf^{himas} [5] — их пороги, значения, цвет и символы (вычисляются в начале управления конфликтом [5]). Для gd^{himas} : ☉ темно-серого цвета, если выше нуля, и ☀ светло-серого цвета, если ниже или равно нулю. Для cnf^{himas} : ☹ темно-серого цвета, если меньше порогового значения (определяется в ходе тестирования системы, по умолчанию равно 0,5), ☺ светло-серого цвета, если равно порогу, и ☹☹, если больше порогового значения. Под gd^{himas} и cnf^{himas} расположена неактивная пустая иконка стимуляции конфликта [4, 5].

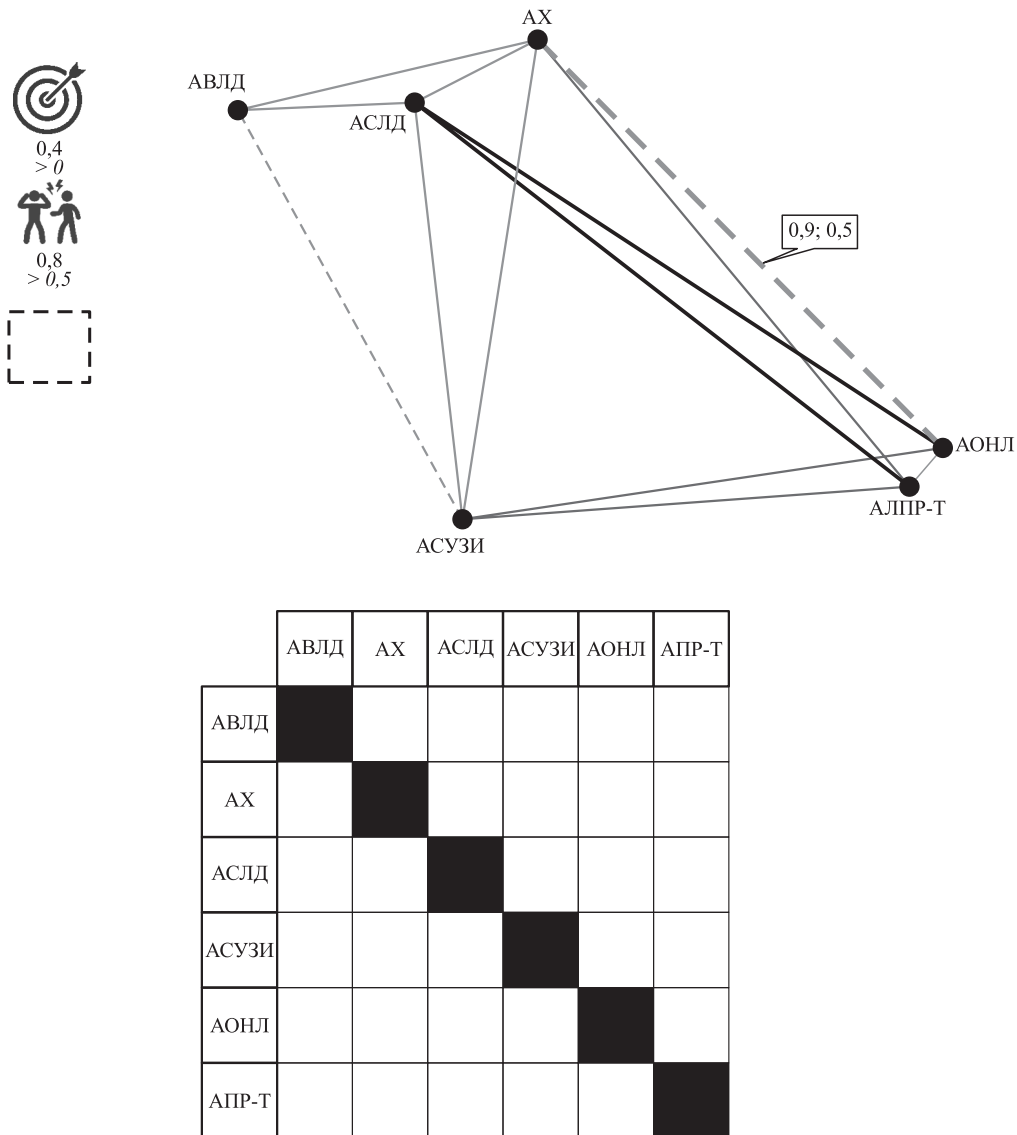


Рис. 1 Визуализация разрешения конфликта между агентами: АХ — хирург; АОНЛ — онколог по нехирургическому лечению; АЛПР-Т — лицо, принимающее решение (терапевт); АСУЗИ — специалист по ультразвуковому исследованию; АВЛД — врач лабораторной диагностики; АСЛД — специалист по лучевой диагностике

Третий шаг. После того как АСИРК [6] запросит у конфликтующих агентов ag_i и ag_j множества реализуемых ими СРП ACT_i^{agcr} и ACT_j^{agcr} , сформирует на их базе упорядоченное множество (список) ACT_{ijc}^{agcr} СРП между данной парой агентов и выберет стратегию по правилу из [6], элементу v_{ij} матрицы $V_{m \times m}$, который соответствует паре конфликтующих агентов ag_i и ag_j , присваивается значение, соответствующее ситуации:

- если $ACT_{ijc}^{agcr} = \emptyset$, т.е. конфликт не может быть разрешен и функция завершает свою работу, то $v_{ij} = 2$, а в соответствующей ячейке таблицы белый квадрат заменяется на иконку «X»;

- если $ACT_{ijc}^{agcr} \neq \emptyset$, то в зависимости от запущенной СРП на паре агентов:

$$v_{ij} = \begin{cases} 3(\langle \text{«} \text{👤} \text{»} \rangle) & \text{— переговоры;} \\ 4(\langle \text{«} \text{👤} \text{»} \rangle) & \text{— делегирование;} \\ 5(\langle \text{«} \text{👤} \text{»} \rangle) & \text{— голосование;} \\ 6(\langle \text{«} \text{👤} \text{»} \rangle) & \text{— самомодификация;} \\ 7(\langle \text{«} \text{👤} \text{»} \rangle) & \text{— игнорирование.} \end{cases}$$

Таким образом, множество

$$ve = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

биективно отображается на множество

$$sve = \{\blacksquare, \square, \text{X}, \text{👤}, \text{👤}, \text{👤}, \text{👤}, \text{👤}\}.$$

Четвертый шаг — сохранить визуализацию, полученную на k -м цикле управления конфликтом:

- сохранить в k -й элемент $\mathbf{VRK}_{1 \times K}$ матрицу $\mathbf{V}_{m \times m}$ ($\text{vrk}_{1k} = \mathbf{V}_{m \times m}$);
- сохранить укладку графа конфликтующих агентов, полученную в результате работы МВК, как k -й элемент $\mathbf{VK}_{1 \times K}$;
- сохранить значение gd^{himas} и $\text{cnf}^{\text{himas}}$ как очередной k -й элемент множеств VGD и VCNF соответственно и установить $k = k + 1$.

Матрицы $\mathbf{VRK}_{1 \times K}$ и $\mathbf{VK}_{1 \times K}$, а также множества VGD и VCNF позволят пользователю при необходимости просмотреть весь визуальный ряд

конфликта между агентами, смену напряженности и СРП в динамике или пошагово.

Если выбрана стратегия «игнорирование», то конфликт считается разрешенным, АСИРК и МВРК завершают работу, иначе АФ ожидает сообщений-решений от АС, которые они выработают после применения соответствующей стратегии. Получив такие сообщения, АФ вновь идентифицирует конфликт между парой агентов [6] согласно АСИРК и запускает МВРК.

Пример визуализации промежуточного этапа разрешения конфликта представлен на рис. 2. В сравнении с рис. 1 видно, что конфликты между агентами АВЛД и АСЛД разрешены и на данном этапе для агентов АВЛД и АСУЗИ выбрана стратегия переговоров.

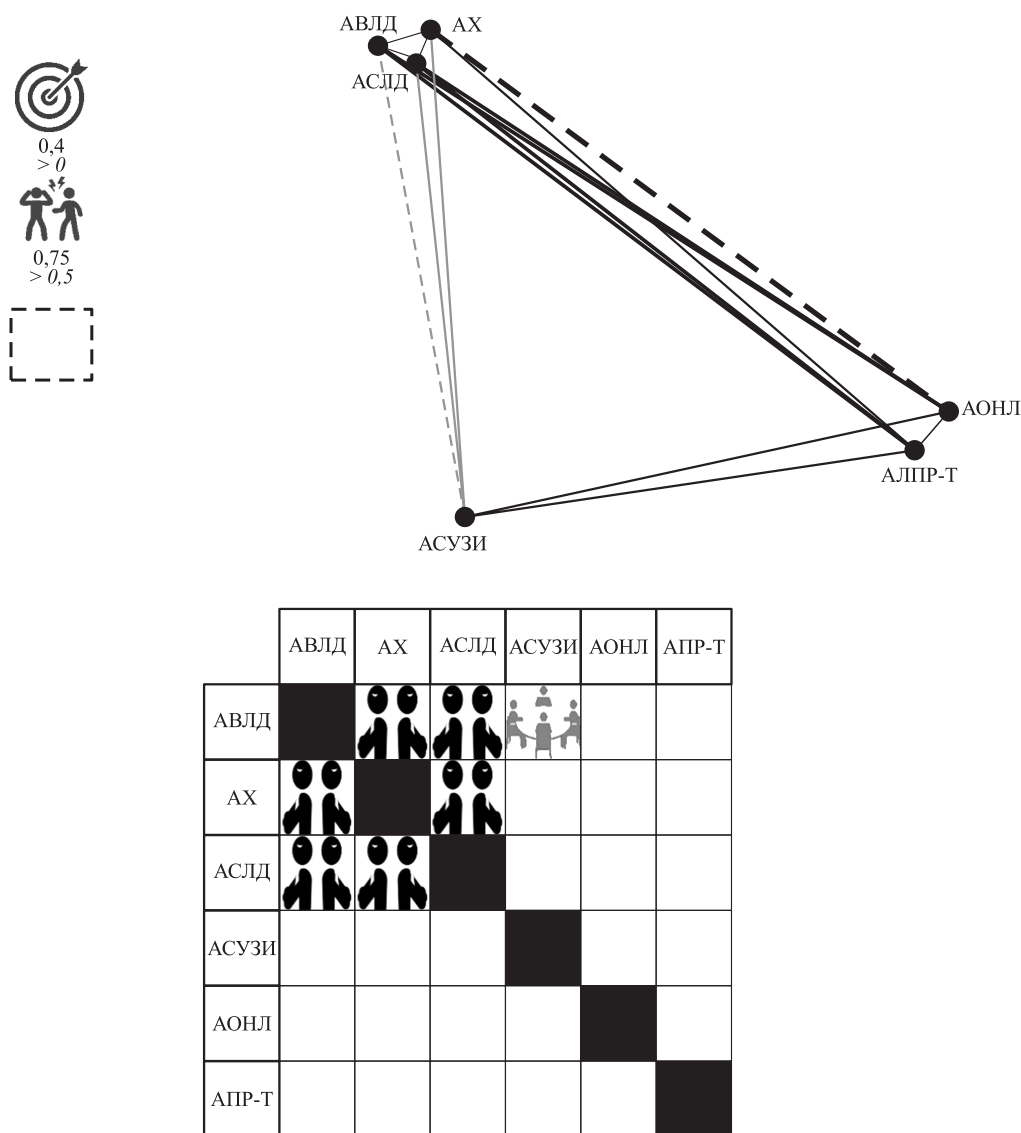


Рис. 2 Визуализация промежуточного этапа разрешения конфликта между агентами

4 Заключение

Моделирование и визуализация процессов разрешения конфликтов агентов избавляет пользователя от необходимости ручного анализа и выбора альтернативы из предлагаемого множества вариантов, тем самым повышая эффективность работы ГиИМАС. В работе предложен новый метод визуализации разрешения конфликтов, базирующийся на алгоритме АСИРК [6], методе визуализации конфликта [3] и алгоритме поиска сообществ IS² [14, 15]. Метод визуализации разрешения конфликтов в ГиИМАС интегрирует пиктографическую, визуальную (графы и таблицы) и численную информации, детально отображая процессы снижения интенсивности и разрешения конфликта агентов. Данный метод предоставляет возможность отследить изменение напряженности между агентами, используемые стратегии разрешения конфликтов, а также наличие подгрупп в коллективе агентов.

Литература

1. *Листопад С. В., Кириков И. А.* Моделирование конфликтов агентов в гибридных интеллектуальных многоагентных системах // Системы и средства информатики, 2019. Т. 29. № 3. С. 139–148. doi: 10.14357/08696527190312.
2. *Листопад С. В., Кириков И. А.* Метод идентификации конфликтов агентов в гибридных интеллектуальных многоагентных системах // Системы и средства информатики, 2020. Т. 30. № 1. С. 56–65. doi: 10.14357/08696527200105.
3. *Румовская С. Б., Кириков И. А.* Метод визуального представления конфликтов в гибридных интеллектуальных многоагентных системах // Информатика и её применения, 2020. Т. 14. Вып. 4. С. 77–82. doi: 10.14357/19922264200411.
4. *Листопад С. В., Кириков И. А.* Стимуляция конфликтов агентов в гибридных интеллектуальных многоагентных системах // Системы и средства информатики, 2021. Т. 31. № 2. С. 47–58. doi: 10.14357/08696527210205.
5. *Румовская С. Б., Кириков И. А.* Метод визуализации стимуляции конфликтов в гибридных интеллектуальных многоагентных системах // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 3. С. 75–82. doi: 10.14357/19922264210310.
6. *Листопад С. В., Кириков И. А.* Разрешение конфликтов в гибридных интеллектуальных многоагентных системах // Информатика и её применения, 2022. Т. 16. Вып. 1. С. 54–60.
7. *Shaw M.* Group dynamics: The psychology of small group behavior. — New York, NY, USA: McGraw-Hill, 1981. 531 p.
8. *Андреева Г. М.* Социальная психология. — М.: Аспект-пресс, 2009. 393 с.
9. *Brown R., Pehrson S.* Group processes: Dynamics with and between groups. — 3rd ed. — Oxford: Wiley-Blackwell, 2019. 344 p. doi: 10.1002/9781118719244.
10. *Емельянов С. М.* Конфликтология. — 4-е изд. — М.: Юрайт, 2018. 322 с.
11. *Behfar K., Peterson R., Mannix E., Trochim W.* The critical role of conflict resolution in teams: A close look at the links between conflict type, conflict management strategies, and team outcomes // J. Appl. Psychol., 2008. Vol. 93. No. 1. P. 170–188. doi: 10.1037/0021-9010.93.1.170.
12. *Анциупов А. Я., Баклановский С. В.* Конфликтология в схемах и комментариях. — 2-е изд. — СПб.: Питер, 2009. 304 с.
13. *Cusack J. J., Bradfer-Lawrence T., Baynham-Herd Z., et al.* Measuring the intensity of conflicts in conservation // Conserv. Lett., 2021. Vol. 14. Iss. 3. Art. e12783. 11 p. doi: 10.1111/conl.12783.
14. *Baumes J., Goldberg M. K., Krishnamoorthy M. S., Magdon-Ismail M., Preston N.* Finding communities by clustering a graph into overlapping subgraphs // Conference (International) on Applied Computing Proceedings. — IADIS Press, 2005. Vol. 1. P. 97–104.
15. *Baumes J., Goldberg M., Magdon-Ismail M.* Efficient identification of overlapping communities // Intelligence and security informatics / Eds. P. B. Kantor, G. Muresan, F. S. Roberts, et al. — Lecture notes in computer science ser. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2005. Vol. 3495. P. 27–36. doi: 10.1007/11427995_3.
16. *Вицьева Н. С., Вишняков И. Э., Иванов И. П.* Способы выделения сообществ с определенными типами отношений в графах на основе биллинговой информации // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение, 2021. Вып. 2(135). С. 4–22. doi: 10.18698/0236-3933-2021-2-4-22.

Поступила в редакцию 25.03.22

VISUAL REPRESENTATION OF THE DECREASE IN CONFLICT INTENSITY AND ITS RESOLUTION IN HYBRID INTELLIGENT MULTIAGENT SYSTEMS

S. B. Rumovskaya and I. A. Kirikov

Kaliningrad Branch of the Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 5 Gostinaya Str., Kaliningrad 236000, Russian Federation

Abstract: Many practical problems require a collective solution ensuring pluralism of opinions, integration of private points of view, and reduction of errors. The authors propose to model the work of such groups of specialists with hybrid intelligent multiagent systems considering the peculiarities of their group dynamics. Such approach would provide improving the quality and efficiency of the solution as well as comprehensive consideration of the problem and the process of its overcoming including visualization of conflicts and processes of their management. The latter would provide a new information on conflict resolution both in the system and in the real group of specialists. The work is devoted to the development of a method for visualization of conflict resolution processes within the framework of hybrid intelligent multiagent systems with problem-oriented and process-oriented constructive conflicts.

Keywords: collective of specialists; conflict; visualization of the conflict resolution

DOI: 10.14357/19922264220212

References

1. Listopad, S. V., and I. A. Kirikov. 2019. Modelirovanie konfliktov agentov v gibridnykh intellektual'nykh mnogoagentnykh sistemakh [Modeling of agent conflicts in hybrid intelligent multiagent systems]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 29(3):139–148. doi: 10.14357/08696527190312.
2. Listopad, S. V., and I. A. Kirikov. 2020. Metod identifikatsii konfliktov agentov v gibridnykh intellektual'nykh mnogoagentnykh sistemakh [Agent conflict identification method in hybrid intelligent multiagent systems]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 30(1):56–65. doi: 10.14357/08696527200105.
3. Rumovskaya, S. B., and I. A. Kirikov. 2020. Metod vizual'nogo predstavleniya konfliktov v gibridnykh intellektual'nykh mnogoagentnykh sistemakh [Conflict visual representation method in collective decision-making within hybrid intelligent multiagent systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 14(4):77–82. doi: 10.14357/19922264200411.
4. Listopad, S. V., and I. A. Kirikov. 2021. Stimulyatsiya konfliktov agentov v gibridnykh intellektual'nykh mnogoagentnykh sistemakh [Stimulation of agent conflicts in hybrid intelligent multiagent systems]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 31(2):47–58. doi: 10.14357/08696527210205.
5. Rumovskaya, S. B., and I. A. Kirikov. 2021. Metod vizualizatsii stimulyatsii konfliktov v gibridnykh intellektual'nykh mnogoagentnykh sistemakh [Visual representation method for the conflict stimulation in hybrid intelligent multiagent systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(3):75–82. doi: 10.14357/19922264210310.
6. Listopad, S. V., and I. A. Kirikov. 2022. Razreshenie konfliktov v gibridnykh intellektual'nykh mnogoagentnykh sistemakh [Resolving conflicts in hybrid intelligent multiagent systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 16(1):54–60.
7. Shaw, M. 1981. *Group dynamics: The psychology of small group behavior*. New York, NY: McGraw-Hill. 531 p.
8. Andreeva, G. M. 2009. *Sotsial'naya psikhologiya* [Social psychology]. Moscow: Aspect-press. 393 p.
9. Brown, R., and S. Pehrson. 2019. *Group processes: Dynamics with and between groups*. 3rd ed. Oxford: Wiley-Blackwell. 344 p. doi: 10.1002/9781118719244.
10. Emel'yanov, S. M. 2018. *Konfliktologiya* [Conflictology]. Moscow: Yurayt. 322 p.
11. Behfar, K., R. Peterson, E. Mannix, and W. Trochim. 2008. The critical role of conflict resolution in teams: A close look at the links between conflict type, conflict management strategies, and team outcomes. *J. Appl. Psychol.* 93(1):170–88. doi: 10.1037/0021-9010.93.1.170.
12. Antsupov, A. Ya., and S. V. Baklanovskiy. 2009. *Konfliktologiya v skhemakh i kommentariyakh* [Conflictology in schemes and comments]. St. Petersburg: Piter. 304 p.
13. Cusack, J. J., T. Bradfer-Lawrence, Z. Baynham-Herd, et al. 2021. Measuring the intensity of conflicts in conservation. *Conserv. Lett.* 14(3):e12783. 11 p. doi: 10.1111/conl.12783.
14. Baumes, J., M. K. Goldberg, M. S. Krishnamoorthy, et al. 2005. Finding communities by clustering a graph into overlapping sub-graphs. *Conference (International) on Applied Computing Proceedings*. IADIS. 1:97–104.
15. Baumes, J., M. Goldberg, and M. Magdon-Ismail. 2005. Efficient identification of overlapping communities. *Conference (International) on Intelligence and Security Informatics Proceedings*. Eds. P. B. Kantor, G. Muresan,

F. S. Roberts, *et al.* Lecture notes in computer science ser. Berlin–Heidelberg: Springer, 2005. 3495:27–36. doi: 10.1007/11427995_3.

16. Virtseva, N. S., I. E. Vishnyakov, and I. P. Ivanov. 2021. Sposoby vydeleniya soobshchestv s opredelennymi tipami otnosheniy v grafakh na osnove billingovoy informatsii

[Methods of detecting communities with certain relationship types in graphs using billing information]. *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Ser. Priborostroyeniye* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Instrument Engineering] 2(135):4–22. doi: 10.18698/0236-3933-2021-2-4-22.

Received March 25, 2022

Contributors

Rumovskaya Sphiya B. (b. 1985) — Candidate of Science (PhD) in technology, scientist, Kaliningrad Branch of the Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 5 Gostinaya Str., Kaliningrad 236000, Russian Federation; sphiyabr@gmail.com

Kirikov Igor A. (b. 1955) — Candidate of Science (PhD) in technology, director, Kaliningrad Branch of the Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 5 Gostinaya Str., Kaliningrad 236000, Russian Federation; baltbipiran@mail.ru

АНАЛИЗ ПЛОТНОСТИ БАЗОВЫХ СТАНЦИЙ 5G NR ДЛЯ ПРЕДОСТАВЛЕНИЯ УСЛУГ ВИРТУАЛЬНОЙ И ДОПОЛНЕННОЙ РЕАЛЬНОСТИ*

В. А. Бесчастный¹, Д. Ю. Острикова², С. Я. Шоргин³, Д. А. Молчанов⁴, Ю. В. Гайдамака⁵

Аннотация: Технология пятого поколения «новое радио» (5G New Radio, 5G NR), работающая в диапазоне частот миллиметрового диапазона (mmWave), разработана для поддержки ресурсоемких приложений, требующих чрезвычайно высоких скоростей на уровне радиointерфейса. В системах NR использование антенных решеток, формирующих особые узкие диаграммы направленности излучения, позволяет избежать высоких потерь и помех при передаче сигнала, но в то же время сокращает площадь покрытия отдельно взятого луча, а следовательно, и число многоадресных пользователей, которые могут быть обслужены с его помощью. В результате требуются эффективные алгоритмы доставки данных для поддержки таких услуг как в традиционных сетях 5G NR, так и в сетях на базе беспилотных летательных аппаратов (БПЛА). В работе рассматривается передача потоковых данных для услуг виртуальной реальности с использованием технологии масштабируемого видеокodирования, которая использует возможности многоадресной передачи для предоставления базового слоя с низким качеством разрешения получаемого контента и одноадресной передачи для предоставления дополнительных слоев с повышенным качеством. С использованием аппарата стохастической геометрии и теории массового обслуживания разработан метод, позволяющий оценить минимальную плотность развертывания базовых станций (БС) mmWave NR для обеспечения заданной производительности многослойных услуг с многоадресной передачей в зависимости от их различных требований и структуры, а также от плотности расположения абонентских терминалов.

Ключевые слова: 5G; «новое радио»; миллиметровый диапазон; виртуальная реальность; многоадресные соединения; масштабируемое видеокodирование; кластеризация

DOI: 10.14357/19922264220213

1 Введение

В настоящее время консорциум 3GPP уже завершил основные этапы стандартизации технологии NR в версиях 15 и 16 [1]. Такие системы, работающие как в микроволновом, так и в миллиметровом диапазонах, обещают обеспечить чрезвычайно высокие скорости передачи данных на уровне радиointерфейса [2]. На текущий момент внимание как 3GPP, так и исследовательского сообщества, сосредоточено на вопросе предоставления дополнительных услуг поверх нового уникального интерфейса радиодоступа с возможностью многоадресной передачи [3].

В работе рассматривается многослойная услуга виртуальной реальности (Virtual Reality, VR), где базовый слой, передача которого предполагается многоадресной, обеспечивает самое низкое каче-

ство воспроизведения видео, а каждый новый слой содержит дополнительные данные для повышения качества воспроизведения по технологии масштабируемого видеокodирования. По запросу нового пользователя VR-услуга должна быть предоставлена с базовым уровнем качества, а затем качество восприятия (Quality of Experience, QoE) можно улучшить, добавив дополнительные слои [4]. Такая возможность зависит от полосы пропускания и зоны покрытия. Дополнительный слой может содержать альтернативный контент или данные для улучшения качества текущего воспроизведения, его передача моделируется с помощью одноадресной сессии с собственным фиксированным требованием к ресурсу.

Большинство проведенных на данный момент исследований для многослойных многоадресных/одноадресных услуг сосредоточены на опти-

* Публикация выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 22-29-00694).

¹ Российский университет дружбы народов, beschastnyy-va@rudn.ru

² Российский университет дружбы народов, ostrikova-dyu@rudn.ru

³ Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, sshorgin@ipiran.ru

⁴ Университет Тампере, Финляндия, dmitri.moltchanov@tuni.fi

⁵ Российский университет дружбы народов; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, gaydamaka-yuv@rudn.ru

мизации уже развернутой системы для заданных параметров качества обслуживания [5–7]. Однако для сетевых операторов не менее важен вопрос оценки требуемой плотности БС NR для заданной стохастической нагрузки трафика в заданной области. Помимо наземных систем плотность расположения точек доступа имеет еще большее значение для систем, использующих БПЛА [8]. В этом случае БПЛА могут выступать как в качестве потребителя услуги, так и в качестве поставщика, предоставляя услугу некоторой группе пользователей. Именно на решение этих проблем направлена данная работа, где с использованием аппарата стохастической геометрии и теории массового обслуживания разработана математическая модель для расчета доли многослойных многоадресных VR-сессий, которые могут быть обслужены в зависимости от параметров точки доступа и нагрузки на систему.

2 Системная модель

Рассматривается зона покрытия БС NR в виде сектора радиуса R , который рассчитывается в соответствии с моделью распространения сигнала в миллиметровом диапазоне [9]. Сота обслуживается тремя антеннами, каждая из которых покрывает сектор с центральным углом 120° . Высота БС фиксирована и равна h_A , пользовательское устройство (ПУ) находится на высоте h_U . Система функционирует на рабочей частоте f_c , при этом каждая БС имеет в своем распоряжении B ресурсных блоков. Предположим наличие в соте потенциальных блокаторов сигнала — людей, распределенных случайным образом в соответствии с пуассоновским точечным процессом (ППТ) в Re^2 с плотностью λ_B , блокирующих своим телом пути распространения сигнала между БС и ПУ. Блокаторы моделируются как цилиндры радиусом r_B и высотой $h_B > h_U$.

В работе рассматривается VR-услуга с четырьмя уровнями качества (слоями): одним базовым и тремя дополнительными. Обозначим требуемую скорость передачи данных базового слоя d_M . Этот слой предоставляется всем пользователям услуги. В то же время все пользователи пытаются повысить качество услуги и получить дополнительные слои данных с требованиями $d_{U,l}$, $l = 1, 2, 3$. Предполагается, что процесс поступления пользовательских запросов является пуассоновским с параметром Λ , а длительности VR-сессий имеют экспоненциальное распределение с параметром μ .

При поступлении запроса на предоставление услуги от ПУ из зоны, не покрытой многоадресной сессией, организуется новая многоадресная сессия, и пользователь всегда получает базовый слой данных. Если же ПУ находится в зоне действия уже

установленной многоадресной сессии, оно присоединяется к ней, не требуя дополнительных ресурсов. Далее, если на БС достаточно ресурсов для загрузки дополнительных слоев, инициируется их передача.

3 Математическая модель

В данном разделе приводится аналитический метод группировки пользователей многоадресной сессии, после чего формулируется задача доставки дополнительных слоев VR-услуги в виде системы массового обслуживания. Посредством итеративного увеличения радиуса покрытия БС такой подход позволяет рассчитывать необходимую плотность развертывания.

Формирование групп многоадресных сессий основано на принципе выбора максимальной ширины по уровню половинной мощности α , позволяющей установить соединение с ПУ, находящимся на границе обслуживаемой соты. Для определения значения α сначала необходимо найти подходящее усиление на антенне БС, которое впоследствии может быть скорректировано в меньшую сторону с учетом доступных конфигураций антенной решетки:

$$G_A = \frac{S(R)[N_0 + M_T]}{P_A G_U R^{-\zeta_T} e^{-K R} p_B(R)}. \quad (1)$$

Получив значение G_A , можно рассчитать число многоадресных групп, необходимое для покрытия всей обслуживаемой зоны

$$N = \left\lceil \frac{\Theta}{G_A} \right\rceil,$$

где Θ — ширина дуги сектора антенны. Для того чтобы воспользоваться моделью Хеллмана [10], необходимо перевести ширину угла α в длину дуги образуемого им сегмента:

$$\xi = \frac{G_A \pi R}{180}.$$

Теперь, согласно [11], длины пробелов между парами соседних теней имеют экспоненциальное распределение с параметром $\lambda K^2 / (2R)$. Это позволяет выразить вероятность того, что пробел имеет ширину от k до $k + 1$ сегментов, в виде

$$q_k = e^{-\lambda K^2 k \xi / (2R)} - e^{-\lambda K^2 (k+1) \xi / (2R)}, \quad (2)$$

а потому не требует покрытия лучами. В конечном итоге это позволяет оценить среднее число лучей многоадресных сессий, попадающих в пробелы, как

$$\Delta = \frac{\pi \lambda K^2}{3 \left(e^{\lambda B(R-Q)+\lambda} \right)} \sum_{k=1}^N k q_k. \quad (3)$$

Таким образом, среднее число многоадресных сессий в соте можно найти как $N - \Delta$. В то же время требование отдельной многоадресной сессии зависит от того, все ли ПУ группы находятся в условиях прямой видимости или есть хотя бы одно заблокированное ПУ, которое вынуждает всю группу снижать схему модуляции и кодирования [12]. Чтобы рассчитать средний объем ресурса, требуемый для обслуживания многоадресной сессии, необходимо найти вероятность вхождения некоторого числа ПУ u в группу, которая имеет пуассоновское распределение, по свойству ПТП:

$$q_u = \frac{e^{-\lambda_n} \lambda_n^u}{u!}, \quad (4)$$

где $\lambda_n = \lambda\pi(R^2 - Q^2)\alpha/360$.

Следовательно, средний объем требуемого ресурса можно рассчитать как

$$b_M = \sum_{u=1}^{\infty} q_u \left[\prod_{i=1}^u (1 - p_{B,i}) b_{M,L} + \left(1 - \prod_{i=1}^u (1 - p_{B,i}) \right) b_{M,B} \right], \quad (5)$$

где $b_{M,L}$ и $b_{M,B}$ — требования к объему ресурса в условиях прямой видимости и в состоянии блокировки соответственно; $p_{B,i}$ — вероятность блокировки ПУ, которое является i -м соседом для БС в ПТП.

Как показано в [13], вероятность блокировки прямой видимости зависит как от расстояния между ПУ и БС, которое имеет распределение расстояния до i -го ближайшего соседа в ПТП с плотностью

$$f_i(x) = \frac{2(\pi\lambda)^i}{(i-1)!} x^{2i-1} e^{-\pi\lambda x^2}, \quad x > 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

так и от интенсивности блокаторов, пересекающих зону блокировки

$$\mu_{B,i} = \int_0^{\infty} f_i(x) \frac{(x[h_B - h_U] + r_B[h_T - h_U])}{(2r_B\lambda_B v)^{-1}(h_T - h_U)} dx, \quad (7)$$

где h_T , h_U и h_B — высоты БС, ПУ и блокаторов соответственно; r_B и v — радиус и скорость блокаторов. Это позволяет найти вероятность блокировки ПУ в виде

$$p_{B,i} = \frac{\mu_{B,i}}{\mu_{B,i} + v/(2r_B)}, \quad (8)$$

где $2r_B/v$ — среднее время прохождения блокатором зоны блокировки под прямым углом к ее длинной стороне.

Для оценки среднего объема ресурсов, необходимых для доставки дополнительных слоев видео с помощью одноадресных сессий, рассматриваются ресурсы, позволяющие загружать каждый слой некоторой доле пользователей. Процесс загрузки дополнительных слоев моделируется в виде СМО [14]

$$\lambda \left| \frac{M}{\mu} \right| C,$$

где λ — интенсивность поступления запросов на загрузку слоя видео; μ^{-1} — средняя длительность загружаемого фрагмента видео, которая имеет экспоненциальное распределение; C — число активных одноадресных сессий, которые необходимо поддерживать для выполнения определенных требований по вероятности успешной загрузки. Для расчета вероятности сброса сессии $E_C(\rho)$ можно воспользоваться первой формулой Эрланга

$$E_C(\rho) = \frac{\rho^C / C!}{\sum_{m=0}^C (\rho^m / m!)}, \quad 0 \leq \rho < \infty,$$

где $\rho = \lambda/\mu$.

Теперь можно оценить средний объем требуемых ресурсов для загрузки дополнительного l -го слоя как

$$E_l[U] = C_l [p_{B,i} b_{U_i,B} + (1 - p_{B,i}) b_{U_i,L}],$$

где $b_{U_i,B}$ и $b_{U_i,L}$ — требования отдельно взятого ПУ для загрузки l -го слоя в условиях заблокированной и незаблокированной прямой видимости.

Зададим вектор \mathbf{p}_U с элементами p_l — вероятностями успешной загрузки l -го слоя видео, $l = 1, \dots, L$. Тогда в общем виде схема нахождения минимальной требуемой плотности развертывания БС выглядит следующим образом:

- для максимально большого допустимого радиуса соты вычислить объем ресурса для доставки базового слоя, используя выражения (1)–(8);
- для каждого дополнительного слоя найти такое минимальное C_l , при котором будет выполняться условие по вероятности успешной загрузки p_l ;
- сложить рассчитанные требования на базовый и дополнительные слои и сравнить с объемом ресурсов на БС;
- если сумма требований меньше доступного ресурса, то повторить расчет для меньшего радиуса соты, иначе принять предпоследнее значение радиуса за минимально допустимое.

4 Численный анализ

В данном разделе проводится численный анализ влияния системных параметров, представленных в таблице, на минимальную допустимую плотность развертывания БС NR.

В данной работе рассматриваются три профиля качества обслуживания, характеризующиеся вектором \mathbf{p}_U : строгий (0,9; 0,8; 0,7), средний (0,75; 0,5; 0,25) и мягкий (0,5; 0,3; 0,1).

Одним из ключевых параметров, оказывающих влияние на производительность системы, является плотность блокаторов.

На рис. 1, *a* представлен график зависимости оптимальной плотности развертывания БС от λ_B , на котором можно заметить, что мягкий и средний профили не сильно подвержены влиянию бло-

каторов, в отличие от пользователей со строгим профилем, для которого при $\lambda_B = 1,0$ ед./м² требуется 110 БС на 1 км². Для менее строгих профилей требуемая плотность развертывания при этом практически вдвое меньше.

На рис. 1, *b* изображена зависимость оптимальной плотности развертывания БС от плотности ПУ. Очевидно, что чем более строгий профиль у пользователей, тем большую нагрузку они создают на сеть в целом и тем большая плотность развертывания требуется для обеспечения эффективного покрытия. Здесь стоит отметить, что рассматриваемая зависимость для всех профилей имеет практически линейный характер.

На рис. 2, *a* показана зависимость плотности развертывания от все той же плотности ПУ, однако здесь присутствуют две схемы доставки базового

Системные параметры

Обозначение	Описание	Значения по умолчанию
f_C	Рабочая частота	73 ГГц
B	Число доступных ресурсных блоков	264
r_B	Радиус блокатора	0,4 м
h_B	Высота блокатора	1,7 м
h_U	Высота ПУ	1,5 м
h_T	Высота БС	4 м
v	Скорость блокатора	1 м/с
P_T	Излучаемая мощность на БС	2 Вт
N_U	Число конфигураций антенны ПУ	8 × 8
λ_B	Плотность блокаторов	0,3 ед./м ²
N_0	Шум	-84 дБ
ζ_T	Коэффициент затухания	2,1
λ	Интенсивность запросов на видеосессии от ПУ	1/3600 сессий/с
μ^{-1}	Средняя длительность видеосессии	15 с
d_M	Требуемая скорость для загрузки базового слоя	7,78 Мбит/с
\mathbf{d}_U	Требуемые скорости для загрузки дополнительных слоев	19,78; 25,81; 31,96 Мбит/с

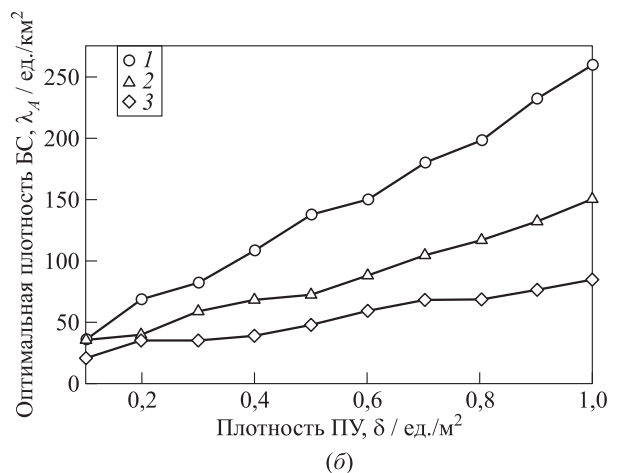
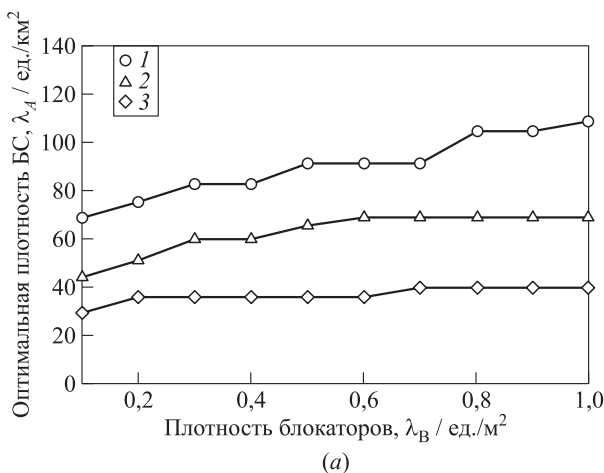


Рис. 1 Оптимальная плотность развертывания NR БС в зависимости от плотности блокаторов (*a*) и пользовательских устройств (*b*): 1 — $\mathbf{p}_U = (0,9; 0,8; 0,7)$; 2 — $(0,75; 0,5; 0,25)$; 3 — $\mathbf{p}_U = (0,5; 0,3; 0,1)$

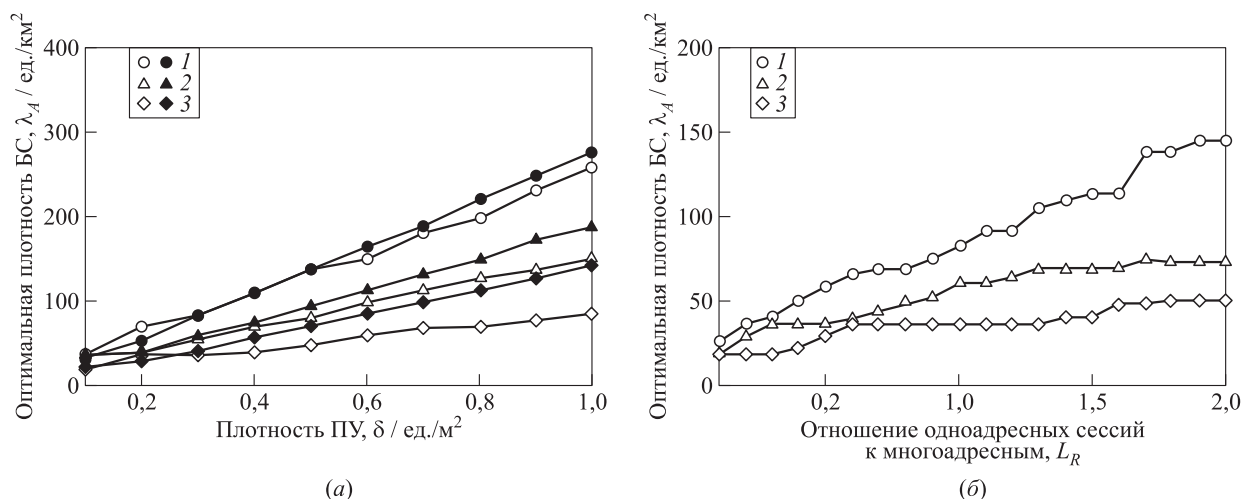


Рис. 2 Оптимальная плотность развертывания БС NR для разных режимов передачи базового слоя (а) (1 — $\mathbf{p}_U = (0,9; 0,8; 0,7)$; 2 — $(0,75; 0,5; 0,25)$; 3 — $\mathbf{p}_U = (0,5; 0,3; 0,1)$); пустые значки — многоадресные сессии; залитые значки — одноадресные сессии) и отношения долей одноадресных и многоадресных сессий (б) (1 — $\mathbf{p}_U = (0,9; 0,8; 0,7)$; 2 — $(0,75; 0,5; 0,25)$; 3 — $\mathbf{p}_U = (0,5; 0,3; 0,1)$)

слоя: с помощью многоадресных сессий и с помощью одноадресных. Сравнение схем показывает, что использование многоадресных сессий при низких плотностях ПУ малоэффективно, но для плотных сетей (при $\sigma \geq 0,4$ ед./м²) они позволяют добиться существенного выигрыша за счет переиспользования ресурсов для базового слоя.

Для рис. 2, б введен дополнительный коэффициент L_R , который обозначает отношение числа одноадресных сессий к многоадресным. Естественным образом с ростом числа одноадресных сессий возрастает необходимая плотность БС. Однако в то же время возрастает и разрыв между значениями для разных профилей, что объясняется резким повышением требований к дополнительным слоям видео.

5 Заключение

В данной работе предложен метод оценки производительности NR-систем при предоставлении услуги масштабируемого VR-видео посредством одноадресных и многоадресных сессий. Численный анализ показал, что при низкой плотности пользователей использование многоадресных сессий малоэффективно, а наибольший позитивный эффект от их применения наблюдается тогда, когда требования к ресурсам для доставки базового слоя начинают превосходить требования для дополнительных слоев видео. Также показано, что параметры качества обслуживания наряду с плотностью пользователей имеют значительное влияние на необходимую плотность развертывания БС. При этом

наиболее сильное влияние плотности блокаторов наблюдается в случае наиболее высоких требований к качеству обслуживания. В целом, в зависимости от различных системных параметров, плотность развертывания варьируется от 20 до 250 БС на 1 км².

Цель дальнейших исследований — расширение предложенной модели для сценария с использованием БПЛА в качестве подвижных точек доступа, что позволит исследовать проблему кластеризации роев.

Литература

1. Holma H., Toskala A., Nakamura T. 5G technology: 3GPP New Radio. — New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 2020. 536 p.
2. Lin X., Li J., Baldemair R., et al. 5G New Radio: Unveiling the essentials of the next generation wireless access technology // IEEE Communications Standards Magazine, 2019. Vol. 3. Iss. 3. P. 30–37. doi: 10.1109/MCOMSTD.001.1800036.
3. Le T. K., Salim U., Kaltenberger F. An overview of physical layer design for ultra-reliable low-latency communications in 3GPP Releases 15, 16, and 17 // IEEE Access, 2020. Vol. 9. P. 433–444. doi: 10.1109/ACCESS.2020.3046773.
4. Karembai A. K., Thompson J., Seeling P. Towards prediction of immersive virtual reality image quality of experience and quality of service // Future Internet, 2018. Vol. 10. Iss. 7. Art. 63. 12 p. doi: 10.3390/fi10070063.
5. Nasrabadi A. T., Mahzari A., Beshay J. D., Prakash R. Adaptive 360-degree video streaming using layered video coding // Virtual Reality Conference Proceedings. — Pis-

- cataway, NJ, USA: IEEE, 2017. P. 347–348. doi: 10.1109/VR.2017.7892319.
6. Park J., Hwang J., Wei H. Cross-layer optimization for VR Video Multicast Systems // Global Communications Conference Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2018. P. 206–212. doi: 10.1109/GLOCOM.2018.8647389.
 7. Long K., Cui Y., Ye C., Liu Z. Optimal transmission of multi-quality tiled 360 VR video by exploiting multicast opportunities // Global Communications Conference Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2019. Art. 9014280. 6 p. doi: 10.1109/GLOBECOM38437.2019.9014280.
 8. Tang N., Tang H., Li B. Yuan X. Joint maneuver and beamwidth optimization for UAV-enabled multicasting // IEEE Access, 2019. Vol. 7. P. 149503–149514. doi: 10.1109/ACCESS.2019.2947031.
 9. 3GPP Technical Specification 38.211: Physical channels and modulation (Release 16), 2021. https://www.3gpp.org/ftp/Specs/archive/38_series/38.211/38211-g50.zip.
 10. Хеллман О. Введение в теорию оптимального поиска / Пер. с англ. Е. М. Столяровой. — М.: Наука, 1985. 246 с.
 11. Gapeyenko M., Samuylov A., Gerasimenko M., Moltchanov D., Singh S., Akdeniz M. R., Aryafar E., Himayat N., Andreev S., Koucheryavy Y. On the temporal effects of mobile blockers in urban millimeter-wave cellular scenarios // IEEE T. Veh. Technol., 2017. Vol. 66. No. 11. P. 10124–10138. doi: 10.1109/TVT.2017.2754543.
 12. Samuylov A., Beschastnyi V., Moltchanov D., Ostrikova D., Gaidamaka Y., Shorgin V. Modeling coexistence of unicast and multicast communications in 5G New Radio systems // 30th Annual Symposium (International) on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2019. Art. 8904350. 6 p. doi: 10.1109/PIMRC.2019.8904350.
 13. Begishev V., Moltchanov D., Sopin E., Samuylov A., Andreev S., Koucheryavy Y., Samouylov K. Quantifying the impact of guard capacity on session continuity in 3GPP new radio systems // IEEE T. Veh. Technol., 2019. Vol. 68. No. 12. P. 12345–12359. doi: 10.1109/TVT.2019.2948702.
 14. Горбунова А. В., Наумов В. А., Гайдамака Ю. В., Самуйлов К. Е. Ресурсные системы массового обслуживания как модели беспроводных систем связи // Информатика и её применения, 2018. Т. 12. Вып. 3. С. 48–55. doi: 10.14357/19922264180307.

Поступила в редакцию 30.01.22

DENSITY ANALYSIS OF mmWave NR DEPLOYMENTS FOR DELIVERING SCALABLE AR/VR VIDEO SERVICES

V. A. Beschastnyi¹, D. Yu. Ostrikova¹, S. Ya. Shorgin², D. A. Moltchanov³, and Yu. V. Gaidamaka^{1,2}

¹Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation

²Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation

³Tampere University, 7 Korkeakoulunkatu, Tampere 33720, Finland

Abstract: The 5G New Radio (NR) technology operating in millimeter-wave (mmWave) frequency band is designed to support bandwidth-greedy applications requiring extraordinary rates at the access interface. In NR systems, the use of antenna arrays that form directional radiation patterns allows to avoid high propagation losses and interference but at the same time reduces the coverage area of a single beam and, hence, the number of multicast users that can be served by the beam. As a result, efficient algorithms are required to support such services in both terrestrial systems and drone-assisted systems that utilize unmanned aerial vehicles as access points. The present authors consider the streaming data delivery of virtual reality services using scalable video coding technology which utilizes multicast capabilities for baseline layer and unicast transmissions for delivering an enhanced experience. By utilizing the tools of stochastic geometry and queuing theory, the authors develop a simple method allowing one to estimate the deployment density of mmWave NR base stations to provide a given performance of multilayer multicast services depending on their various requirements and structure as well as on the density of users.

Keywords: 5G; New Radio; mmWave; multi-layer VR; multicasting; scalable video coding; clustering

DOI: 10.14357/19922264220213

Acknowledgments

The publication has been funded by the Russian Science Foundation, project 22-29-00694.

References

1. Holma, H., A. Toskala, and T. Nakamura. 2020. *5G technology: 3GPP New Radio*. New York, NY: John Wiley & Sons. 536 p.
2. Lin, X., J. Li, R. Baldemair, et al. 2019. 5G New Radio: Unveiling the essentials of the next generation wireless access technology. *IEEE Communications Standards Magazine* 3(3):30–37. doi: 10.1109/MCOMSTD.001.1800036.
3. Le, T. K., U. Salim, and F. Kaltenberger. 2020. An overview of physical layer design for ultra-reliable low-latency communications in 3GPP Releases 15, 16, and 17. *IEEE Access* 9:433–444. doi: 10.1109/ACCESS.2020.3046773.
4. Karembai, A. K., J. Thompson, and P. Seeling. 2018. Towards prediction of immersive virtual reality image quality of experience and quality of service. *Future Internet* 10(7):63. 12 p. doi: 10.3390/fi10070063.
5. Nasrabadi, A. T., A. Mahzari, J. D. Beshay, and R. Prakash. 2017. Adaptive 360-degree video streaming using layered video coding. *Virtual Reality Conference Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 347–348. doi: 10.1109/VR.2017.7892319.
6. Park, J., J. Hwang, and H. Wei. 2018. Cross-layer optimization for VR video multicast systems. *Global Communications Conference Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 206–212. doi: 10.1109/GLOCOM.2018.8647389.
7. Long, K., Y. Cui, C. Ye, and Z. Liu. 2019. Optimal transmission of multi-quality tiled 360 VR video by exploiting multicast opportunities. *Global Communications Conference Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. Art. 9014280. 6 p. doi: 10.1109/GLOBECOM38437.2019.9014280.
8. Tang N., H. Tang, B. Li, and X. Yuan. 2019. Joint maneuver and beamwidth optimization for UAV-enabled multicasting. *IEEE Access* 7:149503–149514. doi: 10.1109/ACCESS.2019.2947031.
9. 3GPP Technical Specification 38.211: Physical channels and modulation. 2021. Available at: https://www.3gpp.org/ftp/Specs/archive/38_series/38.211/38211-g90.zip (accessed April 20, 2022).
10. Hellman, O. 1985. *Vvedenie v teoriyu optimal'nogo poiska* [Introduction to the optimal search theory]. Moscow: Nauka. 246 p.
11. Gapeyenko, M., A. Samuylov, M. Gerasimenko, D. Moltchanov, S. Singh, M. R. Akdeniz, E. Aryafar, N. Himayat, S. Andreev, and Y. Koucheryavy. 2017. On the temporal effects of mobile blockers in urban millimeter-wave cellular scenarios. *IEEE T. Veh. Technol.* 66(11):10124–10138. doi: 10.1109/TVT.2017.2754543.
12. Samuylov, A., V. Beschastnyi, D. Moltchanov, D. Ostrikova, Y. Gaidamaka, and V. Shorgin. 2019. Modeling coexistence of unicast and multicast communications in 5G New Radio systems. *30th Annual Symposium (International) on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. Art. 8904350. 6 p. doi: 10.1109/PIMRC.2019.8904350.
13. Begishev, V., D. Moltchanov, E. Sopin, A. Samuylov, S. Andreev, Y. Koucheryavy, and K. Samouylov. 2019. Quantifying the impact of guard capacity on session continuity in 3GPP new radio systems. *IEEE T. Veh. Technol.* 68(12):12345–12359. doi: 10.1109/TVT.2019.2948702.
14. Gorbunova, A. V., V. A. Naumov, Y. V. Gaidamaka, and K. E. Samouylov. 2018. Resursnye sistemy massovogo obsluzhivaniya kak modeli besprovodnykh sistem svyazi [Resource queuing systems as models of wireless communication systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 12(3):48–55. doi: 10.14357/19922264180307.

Received January 30, 2022

Contributors

Beschastnyi Vitalii A. (b. 1992) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, assistant professor, Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; beschastnyy-va@rudn.ru

Ostrikova Daria Yu. (b. 1988) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; ostrikova-dyu@rudn.ru

Shorgin Sergey Ya. (b. 1952) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, principal scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; sshorgin@ipiran.ru

Moltchanov Dmitri A. (b. 1978) — Doctor of Science in technology, associate professor, Department of Electronics and Communications Engineering, Tampere University, 7 Korkeakoulunkatu, Tampere 33720, Finland; dmitri.moltchanov@tuni.fi

Gaidamaka Yuliya V. (b. 1971) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; gaydamaka-yuv@rudn.ru

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ДВУМЕРНЫМ СЛУЧАЙНЫМ БЛУЖДЕНИЕМ С ЭТАЛОННЫМ СТАЦИОНАРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ*

М. Г. Коновалов¹, Р. В. Разумчик²

Аннотация: Описан конструктивный метод решения новой «обратной» задачи управления случайным блужданием (цепью Маркова) с непрерывным ограниченным и замкнутым двумерным множеством состояний, вероятности перехода которой зависят от текущего значения цепи. Цель управления — отыскание такой стратегии, при которой стационарное распределение цепи наиболее приближено в определенном смысле к эталонному. Реализация метода осуществляется с помощью квазиградиентного алгоритма определения оптимальных значений параметров стратегии, основанного на оценках частных производных целевой функции по наблюдениям за фазовой траекторией. Приведены численные результаты работы алгоритма в примерах с простейшими эталонными плотностями. Внедрение полученных результатов в подвижных объектах (например, беспилотных летательных аппаратах) позволяет наделять их способностью стохастического автономного движения.

Ключевые слова: управление марковской цепью; непрерывное множество состояний; квазиградиентные алгоритмы; беспилотные летательные аппараты

DOI: 10.14357/19922264220214

1 Введение

Статья посвящена изложению избранных результатов численных экспериментов с моделью одного особого и хорошо известного класса управляемых случайных блужданий по ограниченному замкнутому множеству. Одномерный случай описан, например, в [1, разд. 2], двумерный случай — в [2].

Пусть $n = 0, 1, 2, \dots$ и пусть $x_n \in [0, 1]$ — положение блуждающего объекта в момент n на отрезке $[0, 1]$. В этом положении выбирается направление движения, т.е. один из двух доступных отрезков $[0, x_n]$ или $[x_n, 1]$ с вероятностями соответственно $s(x_n)$ и $1 - s(x_n)$. Затем, если был выбран отрезок $[0, x_n]$, объект переходит в точку $f(x_n) \in [0, x_n]$, иначе в точку $g(x_n) \in [x_n, 1]$. Функции $f(x_n)$ и $g(x_n)$ могут быть как детерминированными, так и рандомизированными. Несмотря на простоту, эта модель находит применение в ряде важных приложений (см., например, [1, разд. 1]).

С теоретической точки зрения основные вопросы, которые поднимаются в научной литературе про марковские цепи, подобные $\{x_n, n \geq 0\}$, касаются условий существования стационарных распределений (и их единственности), нахождения численных

алгоритмов их расчета или замкнутых формул. Судя по публикациям в научной периодической печати, они изучены если не исчерпывающе, то достаточно хорошо.

Значительно меньше информации по «обратным» задачам управления или, по-другому, задачам синтеза. Пример ее типичной формулировки можно дать на приведенном выше примере: найти $s(x_n)$, $f(x_n)$ и $g(x_n)$, которые приводят к заданному стационарному распределению цепи $\{x_n, n \geq 0\}$.

Внимание к «обратным» задачам привлекается проблемами, с которыми приходится сталкиваться в настоящее время на практике при применении, в частности, автономных (беспилотных, безэкипажных) летательных аппаратов (далее — БЛА). Один из вариантов полетного задания БЛА — патрулирование территории³, т.е. такое движение, при котором каждая точка территории оказывается в итоге под наблюдением (см., например, [3, 4]). Алгоритмы патрулирования находят применение во многих приложениях робототехники, из которых отметим: задачи продолжительного картирования, когда необходимо посещать все точки местности, чтобы обнаруживать ее изменения [5]; задачи обследования территории (обнаружения несанкционированного доступа/размещения), в которых важ-

* Исследование выполнено с использованием ЦКП «Информатика» ФИЦ ИУ РАН при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 20-07-00804).

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, mkonovalov@ipiran.ru

²Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, rrazumchik@ipiran.ru

³Всюду в статье, если речь идет об «обратных» задачах, подразумевается, что территория является закрытой.

но не оставлять необследованными какие-либо ее участки [6, 7]; задачи содействия спасательным операциям [8].

В контексте приложений робототехники словосочетание «патрулирование территории» (наблюдение, исследование, разведка и т. п.) в научной и технической литературе трактуется по-разному (см. обсуждение, например, в [9, разд. 1]). Здесь всюду под ним будет подразумеваться движение одного или нескольких БЛА, обеспечивающее посещение ими время от времени каждой точки территории. В зарубежной литературе для соответствующих задач есть устоявшееся название — Repeated Coverage Problems, и к настоящему времени для них предложено большое число решений с привлечением методов всевозможных научных дисциплин (см., например, обзор в [9, разд. 2]). Работы [10–19] позволяют составить представление об основных научных соображениях, занимающихся этой проблематикой¹.

Если не вдаваться в (порой очень сложные и составляющие основную ценность решений) подробности, наиболее употребительные подходы к организации периодического покрытия территории одним или группой БЛА могут быть отнесены к одному из двух типов. В одних движения БЛА частично или полностью спланированы заранее (см., например, [3, 21]). Другие подходы отличает непредсказуемость движения БЛА: решение о направлении движения выбирается случайным образом и/или исходя из текущей ситуации/положения (см., например, [22–24]). К последнему типу относится и подход, основанный на решениях «обратных» задач. Судя по публикациям в открытой периодической печати, он пока не получил большого распространения. Связано это, главным образом, с тем, что эффективность разрабатываемых на его основе алгоритмов невозможно контролировать так, как это принято в мировой практике. Действительно, уже по приведенному выше примеру можно понять, что при поиске решений «обратной» задачи не требуется учитывать ограничения, например на среднее время возвращения (в точку), среднюю длину пройденного пути за один период патрулирования,

наибольшее время возвращения по всем точкам территории и т. п. Но, несмотря на это обстоятельство, решения «обратных» задач обладают важными достоинствами, когда на первом плане стоят такие понятия, как надежность и устойчивость². Получающиеся алгоритмы оказываются полностью автономными³ и, при наличии соответствующих технических возможностей⁴, адаптивными.

В следующем разделе дается описание модели⁵ случайного блуждания по двумерному ограниченному замкнутому множеству, которая и представляет собой предмет внимания данной статьи. Легко видеть, что, фиксируя ее параметры (т. е. стратегию управления) по произволу, из нее можно получать для БЛА различные стохастические автономные алгоритмы движения⁶. Однако остается совершенно неясным то, как осуществлять выбор параметров (т. е. решать «обратную» задачу) таким образом, чтобы БЛА время от времени посещал каждую точку территории. Для внесения ясности в этот вопрос предполагается, что в полетном задании БЛА должна быть указана целевая относительная частота (далее — эталонная плотность) посещения любого ее участка. Тогда искомой стратегией следует считать ту, что минимизирует (какое-либо) отклонение плотности стационарного распределения случайного блуждания от эталонной плотности. Если ограничиться множеством стратегий, параметризованных конечномерными наборами числовых параметров, то искомую стратегию можно найти приближенно.

В разд. 3 кратко описывается обобщающий результаты [1] подход к решению, который, по сути, заключается в использовании градиентного метода минимизации функции нескольких переменных. Теоретический анализ сходимости соответствующего алгоритма требует отдельной статьи и здесь не рассматривается.

В разд. 4 приводятся результаты вычислительных экспериментов с несколькими эталонными плотностями.

Заключительный раздел посвящен краткому обсуждению результатов и перспектив дальнейшей разработки темы.

¹ Отдельно отметим, что в некоторых возникающих здесь задачах больших успехов удастся достичь на основе методов идентификации и синтеза систем управления [20].

² Например, к выходу из строя одного или нескольких БЛА или каналов связи.

³ В частности, не требуют наличия обратной связи. Отметим, что проблема автономности БЛА многогранна и не ограничивается теми аспектами, которые обсуждаются в данной статье; некоторое представление о ней позволяет составить введение к статье [25].

⁴ То есть при наличии в БЛА средств сбора и обработки информации с использованием технического зрения и эхолокации.

⁵ Эта модель не нова, в тех или иных терминах она уже встречалась в мировой литературе (см., например, [26, section 5]).

⁶ Поскольку в рассматриваемой постановке БЛА отождествляются с точками на плоскости, то известная проблема обеспечения отсутствия столкновений (коллизий) (см., например, [27]) не требует внимания. Но при этом необходимо предполагать, что при реализации предлагаемого решения на практике в каждый БЛА должен быть встроен локальный механизм по разрешению коллизий. Интуитивно понятно, что, поскольку в результате коллизии новые положения БЛА непредсказуемы, их наличие не мешает достижению той цели, которая рассматривается в статье.

2 Постановка задачи

Рассматривается управляемая случайная последовательность, элементы которой принимают значения (состояния) из множества

$$X = \{x = (x_1, x_2) : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2\}.$$

Множество управления содержит 4 элемента:

$$U = \{u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)}\}.$$

Сама последовательность обозначается $x(n) = (x_1(n), x_2(n))$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а последовательность управлений — $u(n)$, $n = 1, 2, \dots$. Состояние $x(0)$ в начальный момент произвольно. Переход из состояния $x(n-1)$ в состояние $x(n)$ зависит от управления $u(n)$ и подчиняется следующим правилам.

Пусть θ_n , $n = 1, 2, \dots$, — последовательность независимых случайных величин, распределенных равномерно на отрезке $[0, \Theta]$, $0 < \Theta \leq 1$. Тогда

- если $u(n) = u^{(1)}$ (сдвиг по оси X_1 в положительном направлении), то $x_1(n) = x_1(n-1) + \theta(1 - x_1(n-1))$; $x_2(n) = x_2(n-1)$;
- если $u(n) = u^{(2)}$ (сдвиг по оси X_1 в отрицательном направлении), то $x_1(n) = x_1(n-1) - \theta x_1(n-1)$; $x_2(n) = x_2(n-1)$;
- если $u(n) = u^{(3)}$ (сдвиг по оси X_2 в положительном направлении), то $x_1(n) = x_1(n-1)$; $x_2(n) = x_2(n-1) + \theta(1 - x_2(n-1))$;
- если $u(n) = u^{(4)}$ (сдвиг по оси X_1 в отрицательном направлении), то $x_1(n) = x_1(n-1)$; $x_2(n) = x_2(n-1) - \theta x_1(n-1)$.

Зададим множество S четырехкомпонентных функций вида $s = (s^{(1)}, \dots, s^{(4)}) : X \rightarrow [0, 1]$, причем каждая компонента определена на всем множестве X и для всех x выполняется соотношение

$$\sum_{k=1}^4 s^{(k)}(x) = 1. \quad (1)$$

Функцию $s \in S$ можно использовать для выбора управления из множества U : если процесс находится в состоянии x , то управление $u^{(k)}$ выбирается с вероятностью $s^{(k)}(x)$.

Если в процессе управления применяется одна и та же функция s , то будем говорить об использовании одноименной стратегии s . Получаем множество (однородных марковских) стратегий, за которым оставим также обозначение S .

При фиксированной стратегии $s \in S$ процесс $x(n)$ представляет собой марковскую цепь. Легко

понять, что переходные плотности $q^{(k)}$ при переходе из состояния x и при условии, что выбрано управление u^k , имеют следующий вид:

$$q^{(1)}(x, y) = \begin{cases} \Theta^{-1}(1 - x_1)^{-1}, & \text{если} \\ 0 \leq x_1 \leq y_1 \leq x_1(1 + \Theta) + \Theta, & \\ & 0 \leq y_2 \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$q^{(2)}(x, y) = \begin{cases} (\Theta x_1)^{-1}, & \text{если } x_1(1 - \Theta) \leq y_1 \leq x_1, \\ & 0 \leq y_2 \leq 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$q^{(3)}(x, y) = \begin{cases} \Theta^{-1}(1 - x_2)^{-1}, & \text{если } 0 \leq y_1 \leq 1, \\ 0 \leq x_2 \leq y_2 \leq x_2(1 + \Theta) + \Theta; & \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$q^{(4)}(x, y) = \begin{cases} (\Theta x_2)^{-1}, & \text{если } 0 \leq y_1 \leq 1, \\ x_2(1 - \Theta) \leq y_2 \leq x_2; & \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

Безусловная переходная плотность $p(x, y)$ вероятности перехода из состояния x в y равна

$$p(x, y) = \sum_{k=1}^4 s^{(k)}(x) q^{(k)}(x, y),$$

а переходная плотность за n шагов задается соотношениями

$$p^1(x, y) = p(x, y);$$

$$p^{n+1}(x, y) = \int_X p^n(x, z) p(z, y) dz, \quad n > 1.$$

Заметим, что переходные вероятности $p(x, y)$ и $p^{n+1}(x, y)$ зависят от выбора стратегии.

Разобьем множество X состояний цепи на непересекающиеся подмножества:

$$X = \bigcup_{m=1}^M X_m; \quad X_l \cap X_m = \emptyset, \quad l \neq m,$$

и обозначим через S_M множество кусочно-постоянных функций вида

$$s(x) = \sum_{m=1}^M s_m(x) \mathbf{1}_m(x),$$

где $s_m = (s_m^{(1)}, \dots, s_m^{(4)})$, $0 \leq s_m^k \leq 1$; $\mathbf{1}_m$ — индикаторная функция множества X_m . Применение неизменной функции $s \in S_M$ в течение всего процесса управления означает, что в любом состоянии $x \in X_m$ с вероятностью $s_m^{(k)}$ выбирается управление $u^{(k)}$. Таким образом, можно говорить о множестве (однородных марковских) стратегий S_M . Очевидно, $S_M \subset S$.

Предположим, что для любой стратегии $s \in S_M$ переходная плотность имеет стационарную плотность π , так что выполняется равенство

$$\pi(y) = \int_X \pi(x)p(x, y) dx.$$

Пусть задана некоторая «эталонная» плотность $\hat{\pi}$. Цель управления заключается в нахождении такой стратегии $s \in S_M$, которой соответствует стационарное распределение π , «близкое» к распределению $\hat{\pi}$. В качестве «меры близости» плотностей выберем величину

$$w = \int_X (\pi(x) - \hat{\pi}(x))^2 dx.$$

Таким образом, требуется отыскать стратегию s из заданного параметризованного множества, которая минимизирует функцию w .

3 Метод решения

С учетом соотношения (1) из вектора s можно удалить одну из компонент, например компоненту $s^{(4)}$. Таким образом, плотность π и функция w зависят от $3M$ независимых переменных и речь идет фактически о минимизации функции

$$\begin{aligned} \tilde{w} & \left(s_1^{(1)}, s_1^{(2)}, s_1^{(3)}; \dots; s_M^{(1)}, s_M^{(2)}, s_M^{(3)} \right) = \\ & = w \left(s_1^{(1)}, s_1^{(2)}, s_1^{(3)}, 1 - s_1^{(1)} - s_1^{(2)} - s_1^{(3)}; \dots \right. \\ & \quad \left. \dots, s_M^{(1)}, s_M^{(2)}, s_M^{(3)}, 1 - s_M^{(1)} - s_M^{(2)} - s_M^{(3)} \right) \end{aligned}$$

на множестве

$$\tilde{S}_M = \left\{ s = \left((s_1^1, s_1^2, s_1^3), \dots, (s_M^1, s_M^2, s_M^3) \right) : s_m^1 + s_m^2 + s_m^3 \leq 1, 0 \leq s_m^l \leq 1 \right\}.$$

Пусть процесс $x(n)$ управляется согласно некоторой стратегии $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n), \dots)$ следующего вида. Элемент $\sigma(n)$ последовательности σ является функцией со значениями в множестве \tilde{S}_M и представляет собой правило выбора управления $u(n)$ в момент n . Это означает, что если $\sigma(n) = s \in \tilde{S}_M$ и $x(n) \in X_m$, то вероятность события $\{u(n) = u^{(l)}\}$ равна $s_m^{(k)}(x(n))$ для $l = 1, 2, 3$, а вероятность события $\{u(n) = u^{(4)}\}$ равна $1 - \sum_{k=1}^3 s_m^{(k)}(x(n))$. Функции $\sigma(n)$ зависят, вообще говоря, от всей предыстории, и, следовательно, стратегия σ не является ни марковской, ни однородной. Она представляет собой алгоритм, который осуществляет

такую трансформацию элементов $\sigma(n)$, что с увеличением n их значения приближаются к точке минимума функции \tilde{w} на множестве \tilde{S}_M . Механизм трансформации основан на методе проекции градиента, и ключевое значение имеет формула для частных производных функции \tilde{w} .

Пусть процесс $x(n)$ управляется согласно стратегии $s \in \tilde{S}_M$ и пусть m и l — фиксированные натуральные числа, $1 \leq m \leq M$, $1 \leq l \leq 3$. Имеет место равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial s_m^l} & = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{X_m} \pi(x) \int_X \left(q^{(l)}(x, y) - g^{(4)}(x, y) \right) \times \\ & \quad \times \int_X p^n(y, z) (\pi(z) - \hat{\pi}(z)) dz dy dx. \quad (2) \end{aligned}$$

Аналог формулы (2) для одномерного управляемого случайного блуждания приведен в [1]. Стоит отметить, что формула (2) очень «похожа» на формулу для частных производных предельного среднего дохода в задаче об управлении марковской цепью с непрерывным множеством состояний [28]; та, в свою очередь, аналогична представлению градиента целевой функции в той же задаче, но со счетным множеством состояний. В то же время рассматриваемая задача отличается от классической схемы марковского процесса принятия решений (хотя бы по причине отсутствия одношагового дохода). Тем не менее вывод формулы (2), который здесь не приводится, во многом повторяет аналогичное доказательство для классической задачи со счетным множеством состояний [29].

Прямые вычисления по формуле (2) невозможны, поскольку, несмотря на относительно простой вид переходной плотности, аналитическое представление для стационарной плотности π и, соответственно, для функции \tilde{w} и ее частных производных неизвестно. Приходится поэтому строить оценки частных производных по наблюдениям за траекторией управляемой последовательности. Для этого используется следующая интерпретация формулы (2). Рассмотрим процесс $x(n)$, для которого начальное состояние есть $x(0) = x \in X_m$, первое управление — $u(1) = u^{(k)}$, $k = 1, \dots, 4$, а затем неизменно применяются правила стратегии s . Обозначим через $M_m^{(k)}(x)[\cdot]$ математическое ожидание, порождаемое таким процессом, и положим $\gamma(x) = 2(\pi(x) - \hat{\pi}(x))$. Тогда, как легко видеть,

$$\begin{aligned} M_m^{(k)}(x)[\gamma(x(n))] & = \\ & = \int_X q^{(k)}(x, y) \int_X p^n(y, z) \gamma(z) dz dy, \quad (3) \end{aligned}$$

а формула (2) приобретает вид:

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial s_m^l} = \sum_{n=0}^{\infty} (g_m^{(l)}(n) - g_m^{(4)}(n)),$$

где

$$g_m^{(k)}(n) = \int_{X_m} \pi(x) M_m^{(k)}(x) [\gamma(x(n))] dx, \quad k = 1, \dots, 4.$$

Заметим, что если интерпретировать величину $\gamma(x(n))$ как «одношаговый доход», то величина $g_m^{(k)}(n)$ будет означать усредненный по предельному распределению средний доход спустя n тактов после того, как в момент нахождения во множестве состояний X_m было применено управление $u^{(k)}$.

Оценки величин $g_m^{(k)}(n)$ строятся с помощью техники скользящих средних (оценки с забыванием). Такой подход позволяет одновременно оценивать предельное распределение, соответствующее фиксированной точке $s \in S_M$, и осуществлять поиск на множестве S_M .

4 Численные примеры

Предположим, что эталонная плотность $\hat{\pi}$ равномерна в полосе $0,4 \leq x + y \leq 0,8$ (рис. 1, а), т. е. $\hat{\pi}(x, y) = 4,165 I_{\{0,4 \leq x+y \leq 0,8\}}$. Стационарная плотность π , полученная в результате применения предложенного в предыдущем разделе метода, изображена на рис. 1, б.

Наблюдаемое на рис. 1, а и 1, б совпадение плотностей иллюстрирует достижение поставленной цели управления. Допуская некоторую вольность речи, можно сказать, что такова типичная картина при любой (хорошей) эталонной плотности. Например, оценка π неравномерной в полосе эталонной плотности $\hat{\pi}(x, y) = 13,709(0,25x - y + 0,25)^+$ по предложенному методу изображена на рис. 2, б.

Полноценный трехмерный образ оценки π для нормальной эталонной плотности $\hat{\pi}(x, y) = 4,41 e^{-(x-0,4)^2/0,16 - (y-0,6)^2/0,04}$ дан на рис. 3, б. Вместе с линиями уровня на рис. 3, в и 3, г он дает возможность визуально оценить степень близости поверхности π к эталонной.

Как стационарным плотностям на рис. 1, б и 2, б, так и любой плотности π соответствуют вполне

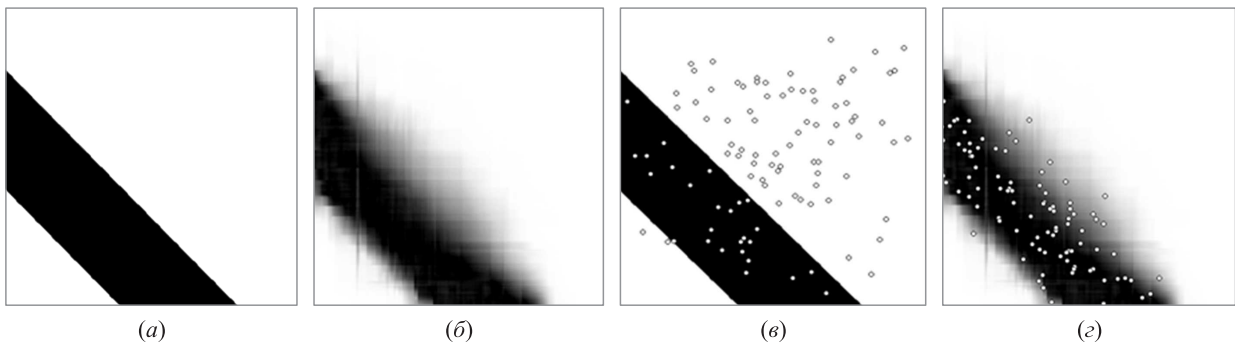


Рис. 1 Равномерная в полосе эталонная плотность (а), ее оценка (б), мгновенное положение 100 еще не обучившихся БЛА (в) и мгновенное положение 100 обучившихся БЛА (г)

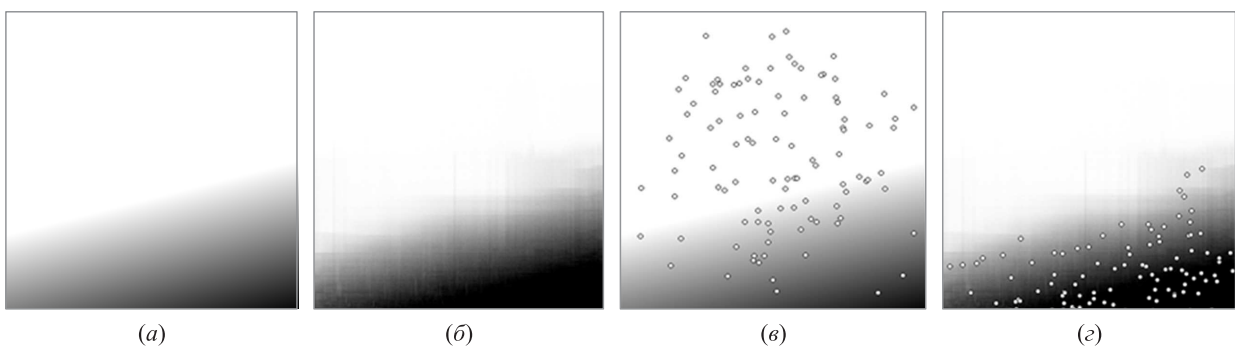


Рис. 2 Неравномерная в полосе эталонная плотность (а), ее оценка (б), мгновенное положение 100 еще не обучившихся БЛА (в) и мгновенное положение 100 обучившихся БЛА (г). Более насыщенный цвет соответствует большему значению плотности

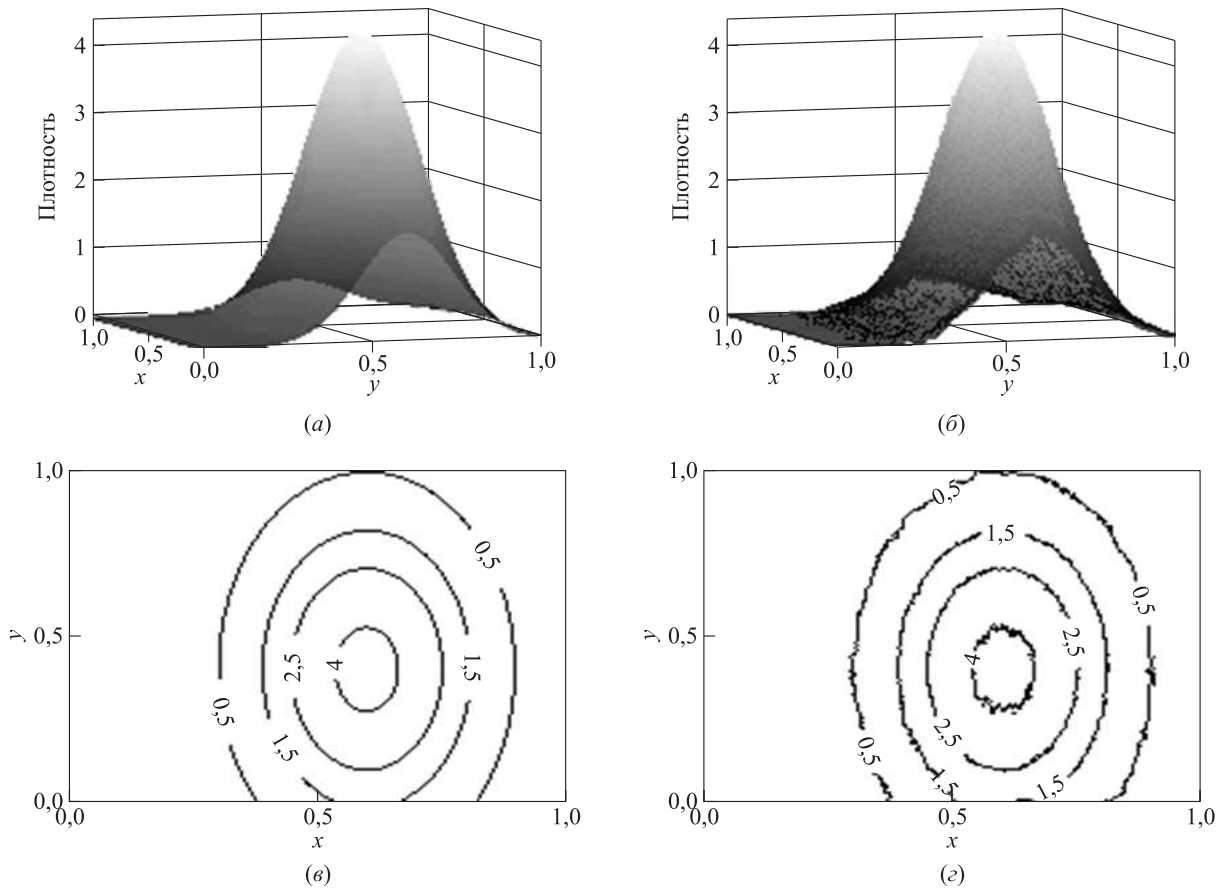


Рис. 3 Нормальная эталонная плотность (а), ее оценка (б) и линии уровня (в, з)

определенные стратегии $s = (s^{(1)}, \dots, s^{(4)})$. Вернемся к содержательной постановке задачи, в соответствии с которой значение цепи в каждый момент времени — это координаты БЛА. Реализовав в нем на аппаратном уровне либо предложенное в разд. 3 решение, либо уже «готовую» стратегию s , его можно отправить в автономный полет (по правилам, изложенным в начале разд. 2) на заданной заранее высоте. Тогда его стохастическое поведение будет «следовать» плотности π . На рис. 1, в и 1, з (аналогично рис. 2, в, 2, з) можно видеть сделанные в случайные моменты времени мгновенные снимки соответственно 100 единиц еще не обучившихся и уже обучившихся БЛА на фоне эталонных плотностей.

5 Заключение

Рассмотренная в статье задача относится к теории управления многомерными марковскими цепями с непрерывным множеством состояний. Предложенное решение представляет собой градиентный алгоритм коррекции параметров стратегии, причем оценки производных целевой функции

строятся по результатам наблюдений. Его внедрение в БЛА дает полностью автономный аппарат, совершающий выходящие случайными движения, но в итоге приводящие к заранее обозначенной (см. разд. 1) цели.

Выявленная в [1] и подтвержденная представленными здесь результатами эффективность градиентного подхода к созданию автономных алгоритмов движения дает основание продолжать исследования в этом направлении. В теоретическом плане, безусловно, важен вопрос сходимости алгоритмов, а также вопрос обоснования метода на произвольные распределения без предположения о существовании плотностей. В практическом же отношении интерес представляет разработка такой модели случайного блуждания, которая учитывает возможное наличие каналов связи между БЛА, и соответствующего алгоритма оценки параметров общей стратегии.

Литература

1. Коновалов М. Г., Разумчик Р. В. Управление случайным блужданием с эталонным стационарным рас-

- пределением // Информатика и её применения, 2018. Т. 12. Вып. 3. С. 2–13.
2. Коновалов М. Г., Коновалова И. Н., Разумчик Р. В. Управление двумерной марковской цепью с непрерывным ограниченным множеством состояний, приводящее к заданному стационарному распределению // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем. — М.: РУДН, 2020. С. 276–279.
 3. Elmaliach Y., Noa A., Kaminka G. Multi-robot area patrol under frequency constraints // Ann. Math. Artif. Intel., 2009. Vol. 57. No. 3-4. P. 293–320.
 4. Elor Y., Bruckstein A. Autonomous multi-agent cycle based patrolling // Swarm intelligence / Eds. M. Dorigo, M. Birattari, G. A. Di Caro, et al. — Lecture notes in computer science ser. — Springer, 2010. Vol. 6234. P. 119–130.
 5. LaValle S., Hinrichsen J. Visibility-based pursuit-evasion: The case of curved environments // IEEE T. Robot. Autom., 2001. Vol. 17. No. 2. P. 196–202.
 6. Gerkey B. P., Thrun S., Gordon G. Visibility-based pursuit-evasion with limited field of view // Int. J. Robot. Res., 2006. Vol. 25. No. 4. P. 299–315.
 7. Fazli P., Davoodi A., Pasquier P., Mackworth A. K. Complete and robust cooperative robot area coverage with limited range // Conference (International) on Intelligent Robots and Systems Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2010. P. 5577–5582.
 8. Jennings J., Whelan G., Evans W. Cooperative search and rescue with a team of mobile robots // 8th Conference (International) on Advanced Robotics Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 1997. P. 193–200.
 9. Fazli P., Davoodi A., Mackworth A. K. Multi-robot repeated area coverage: Performance optimization under various visual ranges // 9th Conference on Computer and Robot Vision Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2012. P. 298–305.
 10. Carlsson S., Nilsson B. J., Ntafos S. C. Optimum guard covers and m-watchmen routes for restricted polygons // Int. J. Comput. Geom. Ap., 1993. Vol. 3. No. 1. P. 85–105.
 11. Toth P., Vigo D. The vehicle routing problem. — Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial Mathematics, 2002. 358 p.
 12. Machado A., Ramalho G., Zucker J. D., Drogoul A. Multiagent patrolling: An empirical analysis of alternative architectures // Multi-agent-based simulation II / Eds. J. Simão Sichman, F. Bousquet, P. Davidsson. — Lecture notes in computer science ser. — Springer, 2003. Vol. 2158. P. 155–170.
 13. Gasparri A., Krishnamachari B., Sukhatme G. A framework for multi-robot node coverage in sensor networks // Ann. Math. Artif. Intel., 2008. Vol. 52. No. 2. P. 281–305.
 14. Калыев И. А., Гайдук А. Р., Капустян С. Г. Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. — М.: Физматлит, 2009. 280 с.
 15. Birk A., Wiggerich B., Bulow H., Pfingsthorn M., Schwertfeger S. Safety, security, and rescue missions with an unmanned aerial vehicle (UAV) // J. Intell. Robot. Syst., 2011. Vol. 64. No. 1. P. 57–76.
 16. Дивеев А. И., Шмалько Е. Ю., Рындин Д. А. Решение задачи оптимального управления группой роботов эволюционными алгоритмами // Информационные и математические технологии в науке и управлении, 2017. Вып. 3(7). С. 109–126.
 17. Пилюхов В. Х., Медведев М. Ю. Групповое управление движением мобильных роботов в неопределенной среде с использованием неустойчивых режимов // Труды СПИИРАН, 2018. № 60. С. 39–63.
 18. Arbanas B., Ivanovic A., Car M., Orsag M., Petrovic T., Bogdan S. Decentralized planning and control for UAV–UGV cooperative teams // Auton. Robot., 2018. Vol. 42. No. 8. P. 1601–1618.
 19. Сенотов В. Д., Алисейчик А. П., Павловский Е. В., Подпросветов А. В., Орлов И. А. Алгоритмы стайного децентрализованного управления движением группы роботов с дифференциальным приводом // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2020. Вып. 123. 39 с.
 20. Кибзун А. И., Сеницын И. Н. Современные проблемы теории оптимизации стохастических систем // Автоматика и телемеханика, 2020. Вып. 11. С. 3–10.
 21. Portugal D., Rocha R. MSP algorithm: Multirobot patrolling based on territory allocation using balanced graph partitioning // Symposium on Applied Computing Proceedings. — New York, NY, USA: ACM, 2010. P. 1271–1276.
 22. Reif J., Wang H. Social potential fields: A distributed behavioral control for autonomous robots // Robot. Auton. Syst., 1999. Vol. 27. No. 3. P. 171–194.
 23. Chu H. N., Glad A., Simonin O., Sempe F., Drogoul A., Charpillet F. Swarm approaches for the patrolling problem, information propagation vs. pheromone evaporation // 19th Conference (International) on Tools with Artificial Intelligence Proceedings. — Los Alamitos, CA, USA: IEEE, 2007. Vol. 1. P. 442–449.
 24. Shvets E. A., Nikolaev D. P. Complex approach to long-term multi-agent mapping in low dynamic environments // Proc. SPIE, 2015. Vol. 9875. Art. 98752A. 10 p. doi: 10.1117/12.2228708.
 25. Миллер Б. М., Степанян К. В., Попов А. К., Миллер А. Б. Навигация БПЛА на основе последовательностей изображений, регистрируемых бортовой видеокамерой // Автоматика и телемеханика, 2017. Вып. 12. С. 141–154.
 26. Ramli M. A., Leng G. The stationary probability density of a class of bounded Markov processes // Adv. Appl. Probab., 2010. Vol. 42. P. 986–993.
 27. Dotsenko A., Diveev A., Cevallos J. P. C. Collision avoidance at swarm regrouping using modified network operator method with various number of arguments // 14th Conference on Industrial Electronics and Applications Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2019. P. 768–773.
 28. Коновалов М. Г., Разумчик Р. В. Диспетчеризация в системе с параллельным обслуживанием с по-

мощью распределенного градиентного управления марковской цепью // Информатика и её применения, 2021. Т. 15. Вып. 3. С. 41–50.

29. Конавалов М. Г. Методы адаптивной обработки информации и их приложения. — М.: ИПИ РАН, 2007. 212 с.

Поступила в редакцию 17.04.22

CONTROLLING A BOUNDED TWO-DIMENSIONAL MARKOV CHAIN WITH A GIVEN INVARIANT MEASURE

M. G. Konovalov and R. V. Razumchik

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: Consideration is given to the two-dimensional discrete-time Markov chain (random walk) with the bounded continuous state space (rectangle). Upon each transition, depending on its current position and if not on the boundary, the chain moves in one of four possible directions (north, south, east, or west). Having selected a direction, the length of the jump within the admissible interval is determined by the random variable. Assuming that some (reference) distribution on the state space is given, one seeks to solve the inverse control problem, i. e., to find such a control strategy (probabilities of choosing either direction) which brings the stationary distribution of the chain close (in a certain sense) to the reference distribution. The solution based on the policy gradient method is proposed. Illustrative examples are provided.

Keywords: Markov chain control; continuous state space; policy gradient; unmanned air vehicles

DOI: 10.14357/19922264220214

Acknowledgments

The research was carried out using the infrastructure of the shared research facilities CKP “Informatics” of FRC CSC RAS. The research was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 20-07-00804).

References

1. Konovalov, M., and R. Razumchik. 2018. Upravlenie sluchaynym bluzhdaniem s etalonnym statsionarnym raspredeleniem [Finding control policy for one discrete-time Markov chain on $[0, 1]$ with a given invariant measure]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 12(3):2–13.
2. Konovalov, M. G., I. N. Konovalova, and R. V. Razumchik. 2020. Upravlenie dvumernoy markovskoy tsep'yu s nepreryvnym ogranichennym mnozhestvom sostoyaniy, privodyashchee k zadannomu statsionarnomu raspredeleniyu [Control of a two-dimensional Markov chain with a continuous bounded set of states leading to a given stationary distribution]. *Informatsionno-telekommunikatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie vysokotekhnologichnykh sistem* [Information and telecommunication technologies and mathematical modeling of high-tech systems]. Moscow: RUDN University Publ. 276–279.
3. Elmaliach, Y., A. Noa, and G. Kaminka. 2009. Multi-robot area patrol under frequency constraints. *Ann. Math. Artif. Intel.* 57(3-4):293–320.
4. Elor, Y., and A. Bruckstein. 2010. Autonomous multi-agent cycle based patrolling. *Swarm intelligence*. Eds. M. Dorigo, M. Birattari, G. A. Di Caro, *et al.* Lecture notes in computer science ser. Springer. 6234:119–130.
5. LaValle, S., and J. Hinrichsen. 2001. Visibility-based pursuit-evasion: The case of curved environments. *IEEE T. Robot. Autom.* 17(2):196–202.
6. Gerkey, B. P., S. Thrun, and G. Gordon. 2006. Visibility-based pursuit-evasion with limited field of view. *Int. J. Robot. Res.* 25(4):299–315.
7. Fazli, P., A. Davoodi, P. Pasquier, and A. K. Mackworth. 2010. Complete and robust cooperative robot area coverage with limited range. *Conference (International) on Intelligent Robots and Systems Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 5577–5582.
8. Jennings, J., G. Whelan, and W. Evans. 1997. Cooperative search and rescue with a team of mobile robots. *8th Conference (International) on Advanced Robotics Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 193–200.
9. Fazli, P., A. Davoodi, and A. K. Mackworth. 2012. Multi-robot repeated area coverage: Performance optimization under various visual ranges. *9th Conference on Computer and Robot Vision Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 298–305.

10. Carlsson, S., B. J. Nilsson, and S. C. Ntafos. 1993. Optimum guard covers and m-watchmen routes for restricted polygons. *Int. J. Comput. Geom. Ap.* 3(1):85–105.
11. Toth, P., and D. Vigo. 2002. *The vehicle routing problem*. Philadelphia, PA: Society for Industrial Mathematics. 358 p.
12. Machado, A., G. Ramalho, J. D. Zucker, and A. Drogoul. 2003. Multiagent patrolling: An empirical analysis of alternative architectures. *Multi-agent-based simulation II*. Eds. J. Simão Sichman, F. Bousquet, and P. Davidsson. Lecture notes in computer science ser. Springer. 2158:155–170.
13. Gasparri, A., B. Krishnamachari, and G. Sukhatme. 2008. A framework for multi-robot node coverage in sensor networks. *Ann. Math. Artif. Intel.* 52(2):281–305.
14. Kalyaev, I. A., A. R. Gayduk, and S. G. Kapustyan. 2009. *Modeli i algoritmy kollektivnogo upravleniya v gruppakh robotov* [Models and algorithms of collective control in groups of robots]. Moscow: Fizmatlit. 280 p.
15. Birk, A., B. Wiggerich, H. Bulow, M. Pfingsthorn, and S. Schwertfeger. 2011. Safety, security, and rescue missions with an unmanned aerial vehicle (UAV). *J. Intell. Robot. Syst.* 64(1):57–76.
16. Diveev, A. I., E. Yu. Shmalko, and D. A. Ryndin. 2017. Reshenie zadachi optimal'nogo upravleniya gruppy robotov evolyutsionnymi algoritmami [Solution of optimal control problem for group of robots by evolutionary algorithms]. *Informatsionnye i matematicheskie tekhnologii v nauke i upravlenii* [Information and Mathematical Technologies in Science and Management] 3(7):109–126.
17. Pshikhopov, V. Kh., and M. Yu. Medvedev. 2018. Gruppovoe upravlenie dvizheniem mobil'nykh robotov v nepredelennoy srede s ispol'zovaniem neustoychivyykh rezhimov [Group control of autonomous robots motion in uncertain environment via unstable modes]. *Trudy SPIIRAN* [SPIIRAS Proceedings] 60:39–63.
18. Arbanas, B., A. Ivanovic, M. Car, M. Orsag, T. Petrovic, and S. Bogdan. 2018. Decentralized planning and control for UAV–UGV cooperative teams. *Auton. Robot.* 42(8):1601–1618.
19. Senotov, V. D., A. P. Aliseychik, E. V. Pavlovsky, A. V. Podoprosvetov, and I. A. Orlov. 2020. Algoritmy staynogo detsentralizovannogo upravleniya dvizheniem gruppy robotov s differentsial'nym privodom [Algorithms for swarm decentralized motion control of group of robots with a differential drive]. *Keldysh Institute Preprints* 123. 39 p.
20. Kibzun, A. I., and I. N. Sinitsyn. 2020. Sovremennye problemy teorii optimizatsii stokhasticheskikh sistem [Modern problems of optimization theory stochastic systems]. *Automat. Rem. Contr.* 11:3–10.
21. Portugal, D., and R. Rocha. 2010. MSP algorithm: Multi-robot patrolling based on territory allocation using balanced graph partitioning. *Symposium on Applied Computing Proceedings*. New York, NY: ACM. 1271–1276.
22. Reif, J., and H. Wang. 1999. Social potential fields: A distributed behavioral control for autonomous robots. *Robot. Auton. Syst.* 27(3):171–194.
23. Chu, H. N., A. Glad, O. Simonin, F. Sempe, A. Drogoul, and F. Charpillet. 2007. Swarm approaches for the patrolling problem, information propagation vs. pheromone evaporation. *19th Conference (International) on Tools with Artificial Intelligence Proceedings*. Alamitos, CA: IEEE. 1:442–449.
24. Shvets, E. A., and D. P. Nikolaev. 2015. Complex approach to long-term multi-agent mapping in low dynamic environments. *Proc. SPIE* 9875:98752A. 10 p. doi: 10.1117/12.2228708.
25. Miller, B. M., K. V. Stepanyan, A. K. Popov, and A. B. Miller. 2017. UAV navigation based on videosequences captured by the onboard video camera. *Automat. Rem. Contr.* 17:2211–2221.
26. Ramli, M. A., and G. Leng. 2010. The stationary probability density of a class of bounded Markov processes. *Adv. Appl. Probab.* 42:986–993.
27. Dotsenko, A., A. Diveev, and J. P. C. Cevallos. 2019. Collision avoidance at swarm regrouping using modified network operator method with various number of arguments. *14th Conference on Industrial Electronics and Applications Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 768–773.
28. Konovalov, M., and R. Razumchik. 2021. Dispetcherizatsiya v sisteme s parallel'nym obsluzhivaniem s pomoshch'yu raspredelennogo gradientnogo upravleniya markovskoy tsep'yu [Routing jobs to heterogeneous parallel queues using distributed policy gradient algorithm]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 15(3):41–50.
29. Konovalov, M. G. 2007. *Metody adaptivnoy obrabotki informatsii i ikh prilozheniya* [Methods of adaptive information processing and their applications]. Moscow: IPI RAN. 212 p.

Received April 17, 2022

Contributors

Konovalov Mikhail G. (b. 1950) — Doctor of Science in technology, principal scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; mkonvalov@ipiran.ru

Razumchik Rostislav V. (b. 1984) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, leading scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; rrazumchik@ipiran.ru

Агасандян Геннадий Аршавинович (р. 1941) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Вычислительного центра им. А. А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Бесчастный Виталий Александрович (р. 1992) — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей Российского университета дружбы народов

Босов Алексей Вячеславович (р. 1969) — доктор технических наук, главный научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Гайдамака Юлия Васильевна (р. 1971) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей Российского университета дружбы народов; старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Грушо Александр Александрович (р. 1946) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Грушо Николай Александрович (р. 1982) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Дурново Александр Адрианович (р. 1949) — ведущий программист Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Забейхайло Михаил Иванович (р. 1956) — доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник Вычислительного центра им. А. А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Зацаринный Александр Алексеевич (р. 1951) — доктор технических наук, профессор, главный науч-

ный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Зацман Игорь Моисеевич (р. 1952) — доктор технических наук, заведующий отделом Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Зейфман Александр Израилевич (р. 1954) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Вологодского государственного университета; старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; главный научный сотрудник Вологодского научного центра Российской академии наук; ведущий научный сотрудник Московского центра фундаментальной и прикладной математики

Золотарев Олег Васильевич (р. 1959) — кандидат технических наук, заведующий кафедрой информационных систем в экономике и управлении Института информационных систем и инженерно-компьютерных технологий Российского нового университета

Инькова Ольга Юрьевна (р. 1965) — доктор филологических наук, старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; сотрудник Университета Женевы

Кириков Игорь Александрович (р. 1955) — кандидат технических наук, директор Калининградского филиала Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Коновалов Михаил Григорьевич (р. 1950) — доктор технических наук, главный научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Кравцова Ольга Анатольевна (р. 1996) — аспирант факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Крюкова Анастасия Леонидовна (р. 1980) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Вологодского государственного университета

Молчанов Дмитрий Александрович (р. 1978) — доктор физико-математических наук, доцент Департамента электроники и телекоммуникаций Университета Тампере (Финляндия, Тампере)

Острикова Дарья Юрьевна (р. 1988) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей Российского университета дружбы народов

Ошушкова Виктория Сергеевна (р. 1996) — программист ООО «Инновейтив пипл»

Палионная Софья Игоревна (р. 1995) — аспирант кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; младший научный сотрудник Московского центра фундаментальной и прикладной математики

Попкова Наталия Александровна (р. 1992) — младший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Разумчик Ростислав Валерьевич (р. 1984) — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Румовская София Борисовна (р. 1985) — кандидат технических наук, научный сотрудник Калининградского филиала Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Сатин Яков Александрович (р. 1978) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Вологодского государственного университета

Синицын Игорь Николаевич (р. 1940) — доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, главный научный сотрудник Институ-

та проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; профессор кафедры «Мехатроника и теоретическая механика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Тимонина Елена Евгеньевна (р. 1952) — доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Торшин Иван Юрьевич (р. 1972) — кандидат физико-математических наук, кандидат химических наук, старший научный сотрудник Вычислительного центра им. А. А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Хакимова Аида Хатифовна (р. 1963) — кандидат биологических наук, ведущий научный сотрудник Института информационных систем и инженерно-компьютерных технологий Российского нового университета

Шестаков Олег Владимирович (р. 1976) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; ведущий научный сотрудник Московского центра фундаментальной и прикладной математики

Шнурков Петр Викторович (р. 1953) — кандидат физико-математических наук, доцент Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»

Шоргин Сергей Яковлевич (р. 1952) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Правила подготовки рукописей для публикации в журнале «Информатика и её применения»

Журнал «Информатика и её применения» публикует теоретические, обзорные и дискуссионные статьи, посвященные научным исследованиям и разработкам в области информатики и ее приложений.

Журнал издается на русском языке. По специальному решению редколлегии отдельные статьи могут печататься на английском языке.

Тематика журнала охватывает следующие направления:

- теоретические основы информатики;
- математические методы исследования сложных систем и процессов;
- информационные системы и сети;
- информационные технологии;
- архитектура и программное обеспечение вычислительных комплексов и сетей.

1. В журнале печатаются статьи, содержащие результаты, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях.

Публикация предоставленной автором(ами) рукописи не должна нарушать положений глав 69, 70 раздела VII части IV Гражданского кодекса, которые определяют права на результаты интеллектуальной деятельности и средства индивидуализации, в том числе авторские права, в РФ.

Ответственность за нарушение авторских прав, в случае предъявления претензий к редакции журнала, несут авторы статей.

Направляя рукопись в редакцию, авторы сохраняют свои права на данную рукопись и при этом передают учредителям и редколлегии журнала неисключительные права на издание статьи на русском языке (или на языке статьи, если он отличен от русского) и на перевод ее на английский язык, а также на ее распространение в России и за рубежом. Каждый автор должен представить в редакцию подписанный с его стороны «Лицензионный договор о передаче неисключительных прав на использование произведения», текст которого размещен по адресу <http://www.ipiran.ru/publications/licence.doc>. Этот договор может быть представлен в бумажном (в 2-х экз.) или в электронном виде (отсканированная копия заполненного и подписанного документа).

Редколлегия вправе запросить у авторов экспертное заключение о возможности публикации предоставленной статьи в открытой печати.

2. К статье прилагаются данные автора (авторов) (см. п. 8). При наличии нескольких авторов указывается фамилия автора, ответственного за переписку с редакцией.
3. Редакция журнала осуществляет экспертизу присланных статей в соответствии с принятой в журнале процедурой рецензирования.

Возвращение рукописи на доработку не означает ее принятия к печати.

Доработанный вариант с ответом на замечания рецензента необходимо прислать в редакцию.

4. Решение редколлегии о публикации статьи или ее отклонении сообщается авторам. Редколлегия может также направить авторам текст рецензии на их статью. Дискуссия по поводу отклоненных статей не ведется.
5. Редактура статей высылается авторам для просмотра. Замечания к редакции должны быть присланы авторами в кратчайшие сроки.
6. Рукопись предоставляется в электронном виде в форматах MS WORD (.doc или .docx) или ЛАТЭК (.tex), дополнительно — в формате .pdf, на дискете, лазерном диске или электронной почтой. Предоставление бумажной рукописи необязательно.

7. При подготовке рукописи в MS Word рекомендуется использовать следующие настройки.

Параметры страницы: формат — А4; ориентация — книжная; поля (см): внутри — 2,5, снаружи — 1,5, сверху — 2, снизу — 2, от края до нижнего колонтитула — 1,3.

Основной текст: стиль — «Обычный», шрифт — Times New Roman, размер — 14 пунктов, абзацный отступ — 0,5 см, 1,5 интервала, выравнивание — по ширине.

Рекомендуемый объем рукописи — не свыше 10 страниц указанного формата. При превышении указанного объема редколлегия вправе потребовать от автора сокращения объема рукописи.

Сокращения слов, помимо стандартных, не допускаются. Допускается минимальное количество аббревиатур.

Все страницы рукописи нумеруются.

Шаблоны примеров оформления представлены в Интернете: <http://www.ipiran.ru/journal/template.doc>

8. Статья должна содержать следующую информацию на **русском и английском языках**:

- название статьи;
- Ф.И.О. авторов, на английском можно только имя и фамилию;
- место работы, с указанием почтового адреса организации и электронного адреса каждого автора;
- сведения об авторах, в соответствии с форматом, образцы которого представлены на страницах:
http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp и
http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp;
- аннотация (не менее 100 слов на каждом из языков). Аннотация — это краткое резюме работы, которое может публиковаться отдельно. Она является основным источником информации в информационных системах и базах данных. Английская аннотация должна быть оригинальной, может не быть дословным переводом русского текста и должна быть написана хорошим английским языком. В аннотации не должно быть ссылок на литературу и, по возможности, формул;
- ключевые слова — желательно из принятых в мировой научно-технической литературе тематических тезаурусов. Предложения не могут быть ключевыми словами;
- источники финансирования работы (ссылки на гранты, проекты, поддерживающие организации и т. п.).

9. Требования к спискам литературы.

Ссылки на литературу в тексте статьи нумеруются (в квадратных скобках) и располагаются в каждом из списков литературы в порядке первых упоминаний.

Списки литературы представляются в двух вариантах:

- (1) **Список литературы к русскоязычной части.** Русские и английские работы — на языке и в алфавите оригинала;
- (2) **References.** Русские работы и работы на других языках — в латинской транслитерации с переводом на английский язык; английские работы и работы на других языках — на языке оригинала.

Необходимо для составления списка “References” пользоваться размещенной на сайте <http://www.translit.net/ru/bgn/> бесплатной программой транслитерации русского текста в латиницу.

Список литературы “References” приводится полностью отдельным блоком, повторяя все позиции из списка литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке литературы к русскоязычной части есть ссылки на иностранные публикации, набранные латиницей, они полностью повторяются в списке “References”.

Ниже приведены примеры ссылок на различные виды публикаций в списке “References”.

Описание статьи из журнала:

Zagurenko, A. G., V. A. Korotovskikh, A. A. Kolesnikov, A. V. Timonov, and D. V. Kardymon. 2008. Tekhniko-ekonomicheskaya optimizatsiya dizayna gidrorazryva plasta [Technical and economic optimization of the design of hydraulic fracturing]. *Neftyanoe hozyaystvo [Oil Industry]* 11:54–57.

Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.

Описание статьи из электронного журнала:

Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).

Описание статьи из продолжающегося издания (сборника трудов):

Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedineniy “stal’–kompozit” [Experimental study of the strength of joints “steel–composite”]. *Trudy MGTU “Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem” [Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems” Proceedings]*. 593:125–130.

Описание материалов конференций:

Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi"* [6th Symposium (International) "New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact" Proceedings]. Moscow. 267–272.

Описание книги (монографии, сборники):

Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publs. 352 p.

Latyshev, V. N. 2009. *Tribologiya rezaniya. Kn. 1: Friksionnye protsessy pri rezanii metallov* [Tribology of cutting. Vol. 1: Frictional processes in metal cutting]. Ivanovo: Ivanovskii State Univ. 108 p.

Описание переводной книги (в списке литературы к русскоязычной части необходимо указать: / Пер. с англ. — после названия книги, а в конце ссылки указать оригинал книги в круглых скобках):

1. В русскоязычной части:

Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1985. 472 с. (*Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver W. Vibration problems in engineering. — 4th ed. — New York, NY, USA: Wiley, 1974. 521 p.*)

2. В англоязычной части:

Timoshenko, S. P., D. H. Young, and W. Weaver. 1974. *Vibration problems in engineering*. 4th ed. New York: Wiley. 521 p.

Описание неопубликованного документа:

Laturov, A. R., M. M. Khasanov, and V. A. Baikov. 2004 (unpubl.). *Geologiya i dobycha (NGT GiD)* [Geology and production (NGT GiD)]. Certificate on official registration of the computer program No. 2004611198.

Описание интернет-ресурса:

Pravila tsitirovaniya istochnikov [Rules for the citing of sources]. Available at: <http://www.scribd.com/doc/1034528/> (accessed February 7, 2011).

Описание диссертации или автореферата диссертации:

Semenov, V. I. 2003. *Matematicheskoe modelirovanie plazmy v sisteme kompaktnyy tor* [Mathematical modeling of the plasma in the compact torus]. Moscow. D.Sc. Diss. 272 p.

Kozhunova, O. S. 2009. *Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovarya informatsionnogo monitoringa* [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.

Описание ГОСТа:

GOST 8.586.5-2005. 2007. *Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv* [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. Moscow: Standardinform Publs. 10 p.

Описание патента:

Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. *Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya* [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.

10. Присланные в редакцию материалы авторам не возвращаются.

11. При отправке файлов по электронной почте просим придерживаться следующих правил:

- указывать в поле subject (тема) название журнала и фамилию автора;
- использовать attach (присоединение);
- в состав электронной версии статьи должны входить: файл, содержащий текст статьи, и файл(ы), содержащий(е) иллюстрации.

12. Журнал «Информатика и её применения» является некоммерческим изданием. Плата за публикацию не взимается, гонорар авторам не выплачивается.

Адрес редакции журнала «Информатика и её применения»:
Москва 119333, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН
Тел.: +7 (499) 135-86-92 Факс: +7 (495) 930-45-05
e-mail: ieep@frccsc.ru (Стригина Светлана Николаевна)
<http://www.ipiran.ru/journal/issues/>

Requirements for manuscripts submitted to Journal “Informatics and Applications”

Journal “Informatics and Applications” (Inform. Appl.) publishes theoretical, review, and discussion articles on the research and development in the field of informatics and its applications.

The journal is published in Russian. By a special decision of the editorial board, some articles can be published in English.

The topics covered include the following areas:

- theoretical fundamentals of informatics;
- mathematical methods for studying complex systems and processes;
- information systems and networks;
- information technologies; and
- architecture and software of computational complexes and networks.

1. The Journal publishes original articles which have not been published before and are not intended for simultaneous publication in other editions. An article submitted to the Journal must not violate the Copyright law. Sending the manuscript to the Editorial Board, the authors retain all rights of the owners of the manuscript and transfer the nonexclusive rights to publish the article in Russian (or the language of the article, if not Russian) and its distribution in Russia and abroad to the Founders and the Editorial Board. Authors should submit a letter to the Editorial Board in the following form:

Agreement on the transfer of rights to publish:

“We, the undersigned authors of the manuscript “. . .”, pass to the Founder and the Editorial Board of the Journal “Informatics and Applications” the nonexclusive right to publish the manuscript of the article in Russian (or in English) in both print and electronic versions of the Journal. We affirm that this publication does not violate the Copyright of other persons or organizations.

Author(s) signature(s): (name(s), address(es), date).

This agreement should be submitted in paper form or in the form of a scanned copy (signed by the authors).

2. A submitted article should be attached with **the data on the author(s)** (see item 8). If there are several authors, the contact person should be indicated who is responsible for correspondence with the Editorial Board and other authors about revisions and final approval of the proofs.
3. The Editorial Board of the Journal examines the article according to the established reviewing procedure. If the authors receive their article for correction after reviewing, it does not mean that the article is approved for publication. The corrected article should be sent to the Editorial Board for the subsequent review and approval.
4. The decision on the article publication or its rejection is communicated to the authors. The Editorial Board may also send the reviews on the submitted articles to the authors. Any discussion upon the rejected articles is not possible.
5. The edited articles will be sent to the authors for proofread. The comments of the authors to the edited text of the article should be sent to the Editorial Board as soon as possible.
6. The manuscript of the article should be presented electronically in the MS WORD (.doc or .docx) or L^AT_EX (.tex) formats, and additionally in the .pdf format. All documents may be sent by e-mail or provided on a CD or diskette. A hard copy submission is not necessary.
7. The recommended typesetting instructions for manuscript.

Pages parameters: format A4, portrait orientation, document margins (cm): left — 2.5, right — 1.5, above — 2.0, below — 2.0, footer 1.3.

Text: font — Times New Roman, font size — 14, paragraph indent — 0.5, line spacing — 1.5, justified alignment.

The recommended manuscript size: not more than 10 pages of the specified format. If the specified size exceeded, the editorial board is entitled to require the author to reduce the manuscript.

Use only standard abbreviations. Avoid abbreviations in the title and abstract. The full term for which an abbreviation stands should precede its first use in the text unless it is a standard unit of measurement.

All pages of the manuscript should be numbered.

The templates for the manuscript typesetting are presented on site: <http://www.ipiran.ru/journal/template.doc>.

8. The articles should enclose data both in **Russian and English**:

- title;
- author’s name and surname;
- affiliation — organization, its address with ZIP code, city, country, and official e-mail address;
- data on authors according to the format: (see site)

http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp and

http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp;

- abstract (not less than 100 words) both in Russian and in English. Abstract is a short summary of the article that can be published separately. The abstract is the main source of information on the article and it could be included in leading information systems and data bases. The abstract in English has to be an original text and should not be an exact translation of the Russian one. Good English is required. In abstracts, avoid references and formulae;
 - indexing is performed on the basis of keywords. The use of keywords from the internationally accepted thematic Thesauri is recommended.
Important! Keywords must not be sentences;
 - Acknowledgments.
9. References. Russian references have to be presented both in English translation and Latin transliteration (refer <http://www.translit.net/ru/bgn/>).
- Please take into account the following examples of Russian references appearance:
- Article in journal:**
Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.
- Journal article in electronic format:**
Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).
- Article from the continuing publication (collection of works, proceedings):**
Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedineniy "stal'-kompozit" [Experimental study of the strength of joints "steel-composite"]. *Trudy MGTU "Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem"* [Bauman MSTU "Mathematical Modeling of Complex Technical Systems" Proceedings]. 593:125–130.
- Conference proceedings:**
Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazooitdachi"* [6th Symposium (International) "New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact" Proceedings]. Moscow. 267–272.
- Books and other monographs:**
Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publs. 352 p.
- Dissertation and Thesis:**
Kozhunova, O. S. 2009. Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovarya informatsionnogo monitoringa [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.
- State standards and patents:**
GOST 8.586.5-2005. 2007. Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. M.: Standardinform Publs. 10 p.
Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.
- References in Latin transcription are presented in the original language.
References in the text are numbered according to the order of their first appearance; the number is placed in square brackets.
All items from the reference list should be cited.
10. Manuscripts and additional materials are not returned to Authors by the Editorial Board.
11. Submissions of files by e-mail must include:
- the journal title and author's name in the "Subject" field;
 - an article and additional materials have to be attached using the "attach" function;
 - an electronic version of the article should contain the file with the text and a separate file with figures.
12. "Informatics and Applications" journal is not a profit publication. There are no charges for the authors as well as there are no royalties.

Editorial Board address:

FRC CSC RAS, 44, block 2, Vavilov Str., Moscow 119333, Russia
Ph.: +7 (499) 135 86 92, Fax: +7 (495) 930 45 05
e-mail: iiep@frccsc.ru (to Svetlana Strigina)
<http://www.ipiran.ru/english/journal.asp>