

# Информатика и её применения

Том 11 Выпуск 4 Год 2017

## СОДЕРЖАНИЕ

Метод моделирования характеристик интерференции при прямом взаимодействии перемещающихся устройств в гетерогенной беспроводной сети пятого поколения <b>Ю. В. Гайдамака, К. Е. Самуйлов, С. Я. Шоргин</b>	<b>2</b>
Стационарные характеристики системы обслуживания с инверсионным порядком обслуживания, вероятностным приоритетом и групповым поступлением разнородных заявок <b>Р. В. Разумчик</b>	<b>10</b>
Stationary sojourn times in MAP/PH/1/ $r$ queue with bi-level hysteretic control of arrivals <b>R. V. Razumchik</b>	<b>19</b>
Некоторые свойства распределения Миттаг-Леффлера и связанных с ним процессов <b>В. Ю. Королев</b>	<b>26</b>
Анализ вероятностно-статистических характеристик осадков на основе паттернов <b>А. К. Горшенин</b>	<b>38</b>
Метод анализа функциональной уязвимости потоковых сетевых систем <b>Ю. Е. Малашенко, И. А. Назарова, Н. М. Новикова</b>	<b>47</b>
Об одной задаче максимизации дохода системы массового обслуживания типа $G/M/1$ с пороговым управлением очередью <b>Я. М. Агаларов, В. С. Шоргин</b>	<b>55</b>
Модель множества информационных пространств в задаче поиска инсайдера <b>А. А. Грушо, М. И. Забежайло, Д. В. Смирнов, Е. Е. Тимонина</b>	<b>65</b>
Анализ времени переключения сеанса связи в гетерогенных беспроводных сетях при вертикальном хэндовере <b>А. Ю. Гребешков, Ю. В. Гайдамака, О. Г. Вихрова, Э. Р. Зарипова</b>	<b>70</b>
Анализ временных характеристик процесса передачи данных подвижным пользователям в соте сети LTE <b>В. А. Наумов, Е. В. Мокров, К. Е. Самуйлов</b>	<b>79</b>
Развитие математической модели управления грузоперевозками на участке железнодорожной сети с учетом случайных факторов <b>М. В. Буянов, С. В. Иванов, А. И. Кибзун, А. В. Наумов</b>	<b>85</b>
Применение вейвлетов для расчета линейных систем управления с сосредоточенными параметрами <b>Ю. И. Битюков, Е. Н. Платонов</b>	<b>94</b>
Гамма-экспоненциальная функция в байесовских моделях массового обслуживания <b>А. А. Кудрявцев, А. И. Титова</b>	<b>104</b>
Study of the MMPP/GI/ $\infty$ queueing system with random customers' capacities <b>E. Lisovskaya, S. Moiseeva, M. Pagano, and V. Potatueva</b>	<b>109</b>
Approaches to annotation of discourse relations in linguistic corpora <b>M. G. Kruzhkov</b>	<b>118</b>
Об авторах	<b>126</b>
Авторский указатель за 2017 г.	<b>128</b>
2017 Author Index	<b>132</b>
Правила подготовки рукописей	<b>136</b>
Requirements for manuscripts	<b>139</b>

# МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ИНТЕРФЕРЕНЦИИ ПРИ ПРЯМОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПЕРЕМЕЩАЮЩИХСЯ УСТРОЙСТВ В ГЕТЕРОГЕННОЙ БЕСПРОВОДНОЙ СЕТИ ПЯТОГО ПОКОЛЕНИЯ\*

Ю. В. Гайдамака<sup>1</sup>, К. Е. Самуйлов<sup>2</sup>, С. Я. Шоргин<sup>3</sup>

**Аннотация:** В общем виде показано построение модели перемещения взаимодействующих устройств в гетерогенных беспроводных сетях пятого поколения с помощью кинетического уравнения с учетом скорости перемещения устройств, их пространственной плотности и максимального допустимого радиуса взаимодействия. Предложен метод моделирования траекторий, когда приемо-передающие устройства движутся случайным образом, причем блуждание в общем случае не является стационарным, что отличает предложенную модель движения мобильных устройств от известных ранее моделей. Характеристики интерференции, в том числе отношение сигнал/интерференция (SIR, signal-to-interference ratio), исследуются в виде непрерывного во времени случайного процесса, задачу расчета этих характеристик предлагается решать методом имитационного моделирования. Показано, что такой анализ дает возможность исследовать вероятностные характеристики взаимодействия устройств, такие как вероятность обрыва связи и длительности периодов наличия и отсутствия связи между устройствами.

**Ключевые слова:** беспроводная гетерогенная сеть; отношение сигнал/интерференция; прямое взаимодействие устройств; перемещение взаимодействующих устройств; модель движения; кинетическое уравнение; генерация траекторий; показатели эффективности сети

**DOI:** 10.14357/19922264170401

## 1 Введение

На производительность современных сетей подвижной связи, работающих в диапазоне дециметровых (300 МГц – 3 ГГц) и сантиметровых (3–30 ГГц) волн (например, GSM [1], 900 МГц, WiMAX [2], 2,5 ГГц, WCDMA [3] и LTE [4], 1,9 ГГц и 2,1 ГГц) существенное влияние оказывает интерференция, т. е. взаимное деструктивное влияние радиосигналов мобильных станций, работающих в одном диапазоне частот [5]. Основным параметром, определяющим качество в таких сетях, является SIR, которое измеряется на приемнике и характеризует качество беспроводного канала связи между приемником и передатчиком в ассоциированной паре «передатчик–приемник» [1–6]. Отношение сигнал/интерференция определяет скорость передачи данных и спектральную эффективность радиоканала и системы в целом, от которых зависит пропускная способность сети, надежность и связность беспроводных соединений.

Результаты работ [7–12] по точному и приближенному анализу SIR могут быть использованы для оценки скорости передачи данных, спектральной эффективности, числа абонентов, которым в определенной географической зоне могут быть предоставлены услуги беспроводной связи, в предположении о постоянном значении SIR, т. е. для случая неподвижных абонентов.

Исследования перемещающихся беспроводных устройств были начаты в [13] и получили развитие в [14], где для случая нестационарного блуждания абонентов был предложен метод расчета SIR, позволивший получить плотности распределения длительности периодов наличия и отсутствия связи. В соответствии с предложенным методом SIR представляет собой функционал расстояний между взаимодействующими устройствами, определяемых моделью движения абонентов, которая описывается кинетическим уравнением. При этом метод моделирования ансамбля траекторий для заданной модели движения в [14] не излагался. Этот

\* Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 16-11-10227).

<sup>1</sup> Российский университет дружбы народов; Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, gaydamaka\_yuv@rudn.university

<sup>2</sup> Российский университет дружбы народов; Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, samuylov\_ke@rudn.university

<sup>3</sup> Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, sshorgin@ipiran.ru

метод изложен ниже в разд. 3 статьи. Авторы используют ту же системную модель и обозначения, что позволило в разд. 4 продолжить численный анализ исследованного в [14] сценария перемещения взаимодействующих устройств. Исследованы вероятность обрыва связи, распределения длительности периодов наличия и отсутствия связи и их средние значения. В заключении приведены выводы и определены задачи дальнейших исследований.

## 2 Модель перемещения устройств

Траектории движения устройств моделируются для ситуации, когда взаимодействующие приемно-передающие устройства движутся случайным образом в ограниченной зоне обслуживания  $V$ , представляющей собой область в  $M$ -мерном пространстве, причем блуждание в общем случае не является стационарным. Считаем, что перемещение устройств сочетает целеполагающее поступательное движение и хаотическое блуждание и определяется кинетическим уравнением типа Фоккера–Планка с заданной скоростью сноса  $v$  и коэффициентом диффузии  $\alpha$ .

Для исследования интерференции на приемнике ассоциированной пары взаимодействующих устройств, создаваемой передатчиками других ассоциированных пар, устройства разбиты на пары, число пар обозначено  $N$ . На рис. 1 схематически показаны два варианта перемещения приемников в ассоциированной паре «передатчик–приемник»: в случае (а) приемник движется вместе с передатчиком, оставаясь на постоянном расстоянии  $d$  от него; в случае (б) приемник движется согласно броуновскому движению с диффузией  $v_{R_x}$  внутри окружности радиуса  $d$  с центром в точке расположения передатчика. Первый вариант соответствует сценарию, когда два абонента не отрываются

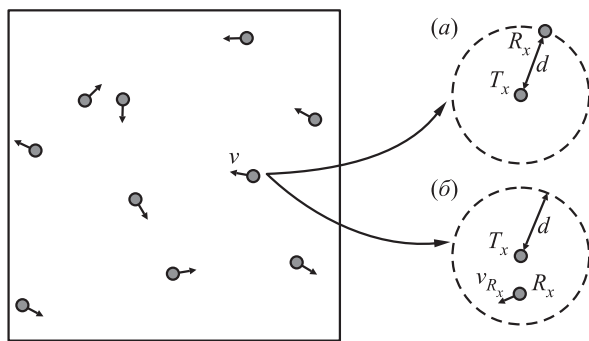


Рис. 1 Сценарии взаимодействия устройств на основе прямых соединений D2D

друг от друга в процессе перемещения, т. е. траектории их движения зависимы, второй — сценарию, когда траектории движения приемника и передатчика взаимно независимы. При этом расстояние  $d$  в первом случае имеет смысл постоянной дистанции между абонентами в движущейся паре, а во втором — максимального расстояния от приемника до передатчика в ассоциированной паре, которое определяется из описанной ниже модели распространения сигнала.

Предложенный в данной статье метод не ограничен выбранными параметрами и может быть применен к другим моделям движения, описываемым уравнением диффузии. Не ограничивая общности метода, предполагается, что мощность сигнала на приемнике задается выражением  $\phi(r) = Ar^{-\gamma}$  и зависит от расстояния  $r$  при заданной константе  $A$ , учитывающей излучаемую мощность и коэффициенты усиления приемной и передающей антенны, и коэффициенте распространения сигнала  $\gamma$ .

Как и в [14], для оценки SIR далее используется формула:

$$SIR = \frac{\phi(r_0)}{\sum_{n=1}^{N-1} \phi(d_n)},$$

где  $r_0$  — расстояние между приемником и передатчиком в исследуемой ассоциированной паре;  $d_n$  — расстояние между приемником из исследуемой пары и передатчиком из  $n$ -й интерферирующей пары,  $n = 1, \dots, N - 1$ . Также задан порог  $SIR^*$ , определяющий минимальное значение SIR, необходимое для поддержания связи в ассоциированной паре.

В описанной модели случайное расстояние между приемником и передатчиком в некоторой ассоциированной паре, а также случайные расстояния между приемником из этой ассоциированной пары и интерферирующими передатчиками из других пар, работающими на близких частотах, исследуются как функции от времени. Эти расстояния определяют суммарную интерференцию и SIR как функционалы на траекториях движения взаимодействующих устройств. При падении SIR на приемнике исследуемой ассоциированной пары ниже порогового значения  $SIR^*$  происходит так называемый «обрыв связи» — передача данных от передатчика к приемнику в этой паре прерывается до момента, когда SIR вновь превысит данный порог. Для случайного процесса с независимыми приращениями, описывающего изменение SIR, представляют интерес такие вероятностно-временные характеристики, как вероятность перехода процесса в одно из состояний ниже порогового значения  $SIR^*$ , а также длительности периодов пребывания процесса в множестве таких состояний. Таким образом, задачей моделирования является нахождение вероят-

ности обрыва связи и распределения длительности периодов наличия и отсутствия связи.

### 3 Метод моделирования траекторий движения устройств

Известно использование случайных процессов с независимыми приращениями в экономике для анализа фондового рынка. При этом подходы, связанные с моделированием траектории случайного процесса – временного ряда, отражающего флуктуации параметров фондового рынка (курсов ценных бумаг или биржевых фондовых индексов), — использованы при разработке метода моделирования траекторий для нестационарного движения устройств. В [15] был предложен метод генерации траектории случайного процесса с нестационарной функцией распределения (ФР) при известном уравнении эволюции этой функции. В [16] этот метод был расширен на генерацию ансамбля траекторий, распределение которых эволюционирует в соответствии с заданным кинетическим уравнением. В [17] представлена структура программного комплекса, реализующего задачу генерации ансамбля случайных нестационарных траекторий и анализа функционалов на них.

Опишем кратко методологию проводимого далее анализа в обозначениях [14], следуя указанным работам.

Пусть плотность ФР  $f(x, t)$  приращений координат  $x$  положений приемо-передающих устройств в момент времени  $t$  удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка ( $M = 1$ ):

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t)f(x, t)) - \frac{\alpha(t)}{2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Это уравнение решается численно при заданных начальном и граничном условиях. Параметры уравнения — скорость сноса  $u(x, t)$  и нестационарный в общем случае неотрицательный коэффициент диффузии  $\alpha(t)$  — определяются по наблюдаемым значениям временного ряда. Для этого строится совместное распределение  $F(x, v, t)$  значений временного ряда  $x(t)$  и его приращений  $v(t) = x(t+1) - x(t)$  по выборке длины, достаточной для конструирования такого распределения на заданном уровне стационарности [17], после чего величины, входящие в (1), определяются по формулам:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \int F(x, v, t) dv; \\ u(x, t)f(x, t) &= \int vF(x, v, t) dv; \\ \alpha(t) &= 2\text{cov}_{x,v}(t) - \frac{d\sigma^2(t)}{dt}, \end{aligned}$$

где  $\text{cov}_{x,v}(t)$  — ковариация приращения координаты  $x(t)$  и скорости сноса  $u(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \text{cov}_{x,v}(t) &= \int xvF(x, v, t) dx dv - \\ &- \int xF(x, v, t) dx dv \cdot \int vF(x, v, t) dx dv, \end{aligned}$$

а дисперсия приращений координат определяется как

$$\sigma^2(t) = \int (x - \bar{x}(t))^2 f(x, t) dx.$$

При двумерном или трехмерном моделировании блуждание по каждой координате считалось независимым. В отсутствие достоверных экспериментальных данных в данной работе параметры сноса и диффузии были построены по моделям типичных нестационарных процессов, описывающих изменение положений случайно блуждающих объектов, обсуждаемым в [17]. Примеры стандартных моделей движения, традиционно использующихся для описания перемещения абонентов беспроводной сети, приведены в заключении статьи при формулировке задач дальнейших исследований.

Величина  $x$  приращения координат для удобства нормирована на 1, т.е. считается, что возможные изменения положений устройств равномерно ограничены по времени. Решение строится на временном горизонте  $t \in [1, T]$  в дискретном времени с единичным шагом по времени. На каждом шаге  $k = 1, 2, \dots, T$  для каждого устройства  $n, n = 1, \dots, N$ , генерируется случайное число с ФР

$$F_n(x, t) = F(x, t) = \int_0^x f(y, t) dy,$$

для чего требуется, чтобы в результате численного расчета была получена непрерывная строго монотонная функция. В частности, если решение уравнения (1) представлено в виде гистограммы  $f_j(t)$ , где  $j$  есть номер классового интервала, на которые разбита область интегрирования, то непрерывная строго монотонная ФР имеет вид:

$$\begin{aligned} F(x, t) &= (Jx - j)f_{j+1}(t) + \sum_{l=1}^j f_l(t), \\ x &\in \left[ \frac{j-1}{J}; \frac{j}{J} \right], j = 1, \dots, J. \quad (2) \end{aligned}$$

Пусть  $\mathbf{R}^n(k) = (R_m^n(k))_{m=1,\dots,M}$  — положение  $n$ -й точки в момент времени  $t = k$ ,  $k = 1, 2, \dots, T$ , в некоторой области  $V$  в  $M$ -мерном пространстве. Здесь нижний индекс  $m$  нумерует координаты в этом пространстве.

Алгоритм генерации случайных чисел, образующих в совокупности точки  $\mathbf{R}^n(k) = \mathbf{R}^n(0) + \sum_{t=1}^k x^n(t)$  одной из возможных траекторий временного ряда на заданном промежутке времени, состоит в следующем. Генерируется стационарный равномерно распределенный на  $[0; 1]$  ряд чисел  $\{y_k\}$  длиной  $T$ . Отвечающий ему ряд приращений координат  $\{x^n(k)\}$  положения передающего устройства  $n$ ,  $m = 1, \dots, N$ , с распределением  $F_n(x, t)$  из (2) строится по формуле обращения соответствующей локальной по времени ФР, движущейся в скользящем окне длины  $T$ :

$$y_k = F_n(x^n(k), k), \quad x^n(k) = F_n^{-1}(y_k, k), \quad k = 1, \dots, T. \quad (3)$$

Генерируя набор равномерно распределенных выборок  $\{y_k\}_{k=1,\dots,T}$ , для каждого  $k = 1, \dots, T$  получаем соответствующий набор из  $N$  приращений координат  $\{x^n(k)\}_{n=1,\dots,N}$ , которые дают набор траекторий  $N$  передающих устройств на временном горизонте  $t \in [1, T]$ . Эти траектории можно рассматривать как выборку из ансамбля решений кинетического уравнения. Полученный набор траекторий представляет движение передатчиков в ассоциированных парах.

Моделирование траекторий в ограниченной области  $V$  при трехмерном блуждании  $M = 3$  осуществлялось следующим образом. В начальный момент задавалось сферически симметричное распределение точек в кубе со стороной  $10d$ , спадающее кусочно-степенным образом по закону  $1/(r + 2)$  от центра к граням куба и равномерное в каждом кольце шириной  $2d$ , где  $d$  есть радиус сферы на рис. 1. Это распределение точек — начальное условие для решения кинетического уравнения (1) и одновременно начальное положение для траекторий устройств. Задавалась скорость изменения ФР в (1), а также коэффициент  $\alpha$ , после чего численно решалось уравнение (1). Затем по описанным выше правилам (2), (3) вычислялись случайные значения последовательных приращений координат для каждой траектории, что позволяло строить сами траектории с учетом граничных условий. При рассмотрении движения в данной работе задавались условия идеального отражения траектории приемника от границы сферы с центром в точке расположения передатчика ассоциированной пары, а также сферы ассоциированной пары от границы куба, определяющего ограниченную область  $V$ , хотя для

области можно рассмотреть и задачу с источником и стоком.

## 4 Пример расчета характеристик интерференции движущихся устройств

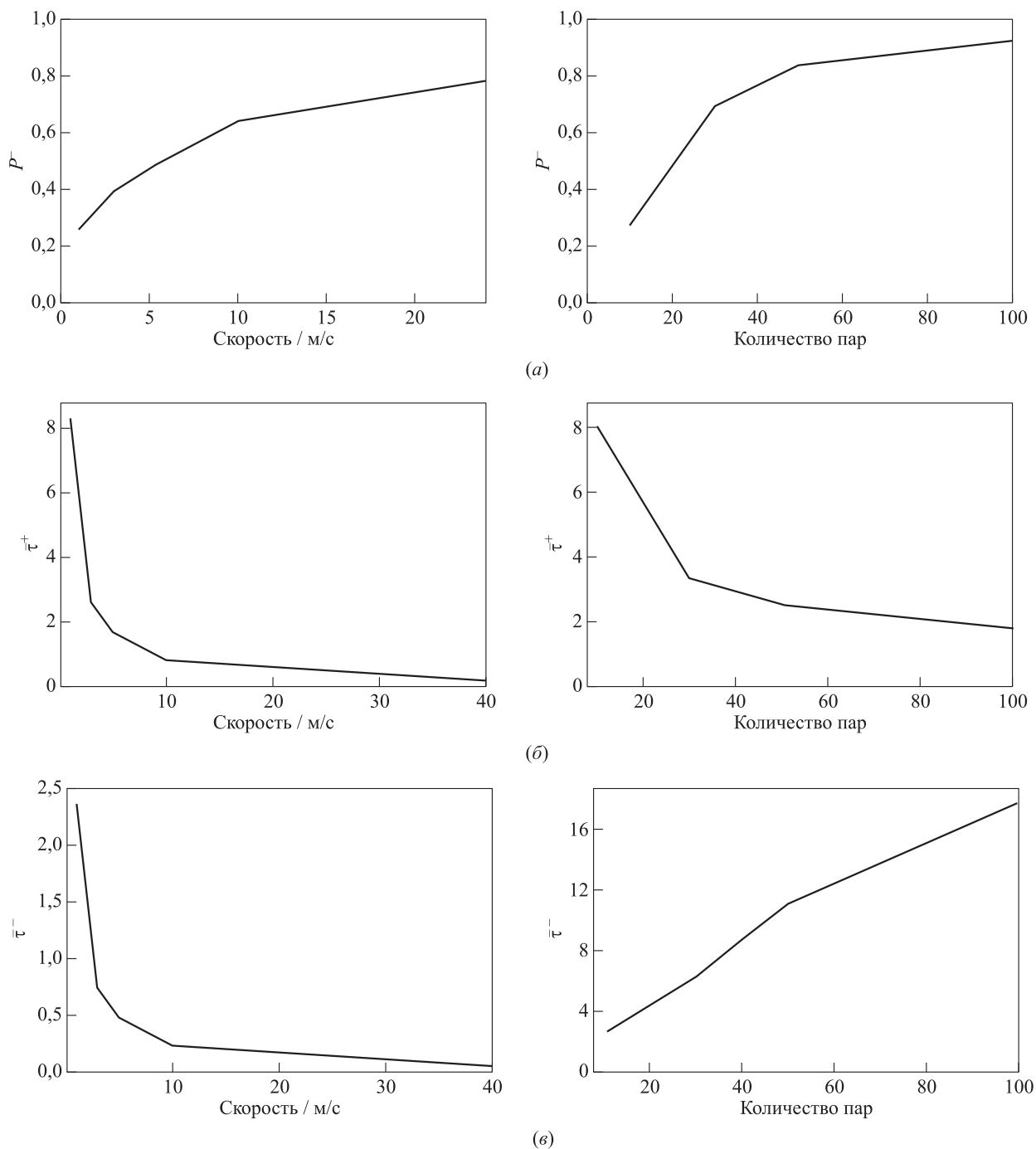
Траектории движения устройств моделируются для сценария [14], соответствующего перемещению внутри торгового центра  $50 \times 50$  м абонентов, использующих прямое D2D (device-to-device) подключение. Моделирование проведено на временном горизонте  $t \in [1, T]$  при  $T = 10^5$  для различной плотности устройств ( $N = 10, 30, 50, 100$ ) и различных средних скоростей сноса ( $v = 1, 3, 5, 10, 40$  м/с). Были выбраны типичные для D2D-соединений параметры системной модели ( $\alpha = 2$ ,  $A = 1$ ,  $\gamma = 3$ ,  $d = 5$  м,  $v_{Rx} = 1$  м/с,  $SIR^* = 0,01$ ), выполнялось усреднение по реализациям. При моделировании рассматривалось число  $C(T)$  обрывов связи и вероятность  $P^-$  обрыва связи между взаимодействующими устройствами:

$$P^- = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{C(T)}{T} \right),$$

т. е. выброса SIR ниже порогового значения  $SIR^*$ .

На рис. 2, а представлены графики вероятности  $P^-$  обрыва связи в зависимости от средней скорости  $v$  передвижения устройств и числа  $N$  пар взаимодействующих устройств. Следует отметить, что увеличение как числа пар устройств, так и средней скорости их перемещения оказывает негативное влияние на устойчивость связи. В обоих случаях можно отметить логарифмический рост вероятности потери связи. Средние значения длительностей  $\bar{\tau}^+$  периода наличия и  $\bar{\tau}^-$  периода отсутствия связи как функции от средней скорости  $v$  устройств и числа  $N$  взаимодействующих пар представлены на рис. 2, б и 2, в.

Анализируя представленные данные для периода наличия связи, следует отметить, что среднее значение  $\bar{\tau}^+$  рассматриваемой метрики демонстрирует экспоненциальное падение с увеличением как средней скорости перемещения устройств, так и числа пар взаимодействующих устройств. Так, при значениях скорости перемещения, соответствующих скорости пешеходов (3–5 м/с), средняя длительность  $\bar{\tau}^+$  периода наличия связи может достигать 9–10 с при 10 одновременных установленных прямых соединениях. Однако при скоростях, соответствующих средней скорости перемещения автомобилей (30–40 м/с), величина  $\bar{\tau}^+$  не превышает 1 с.



**Рис. 2** Вероятность  $P^-$  обрыва связи (а), средняя длительность периодов наличия связи  $\tau^+$  (б) и средняя длительность периодов отсутствия связи  $\tau^-$  (в): левый столбец — функция от скорости  $v$  ( $N = 10$ ); правый столбец — функция от числа пар  $N$  ( $v = 5$  м/с)

Период наличия связи определяет длительность интервала времени до прерывания соединения для приложений в реальном времени. Для таких приложений при условии поступления запроса на установление соединения в случайный момент времени

в период наличия связи этот интервал совпадает с длительностью периода до первого обрыва связи и, как отмечено в [14], имеет показательное распределение со средним значением, представленным на рис. 2, б. Для кэшируемых приложений интер-



вал времени до прерывания соединения определяется длительностью как периодов наличия связи, так и периодов отсутствия связи. Если последняя не превышает некоторого порогового значения  $\tau^*$ , характерного для конкретного приложения, то интервал времени до прерывания соединения складывается из нескольких последовательных периодов наличия и отсутствия связи.

Анализируя графики на рис. 2, в, следует отметить, что зависимость средней длительности периода отсутствия связи демонстрирует разный характер изменения при увеличении скорости перемещения устройств и числа пар взаимодействующих устройств. Так, при увеличении скорости перемещения период отсутствия связи экспоненциально уменьшается. При увеличении числа пар взаимодействующих устройств наблюдается линейный рост средней длительности периода отсутствия связи.

## 5 Заключение

В представленной работе предложен метод моделирования траекторий движения приемо-передающих устройств в беспроводной сети пятого поколения с технологией прямого взаимодействия устройств. С применением предложенного метода проведено имитационное моделирование и исследованы вероятность обрыва связи и средние значения длительности периодов наличия и отсутствия связи. Полученный в работе результат по экспоненциальному уменьшению средней длительности периода отсутствия связи при увеличении скорости перемещения устройств имеет важное практическое значение: это уменьшение компенсируется снижением средней длительности периода отсутствия связи, значительно увеличивая вероятность того, что в течение этого времени не произойдет прерывания соединения.

Задачей дальнейших исследований остается анализ устойчивости соединения в зависимости от размера буфера оборудования пользователя для кэшируемых приложений.

В случае приложений в реальном времени, для которых вероятность прерывания соединения не зависит от буферизации, интерес представляет исследование эволюции старших моментов функционала SIR, определяющих надежность соединения.

Еще одной задачей дальнейших исследований является анализ характеристик интерференции при моделировании ансамбля траекторий для различных моделей движения, применимых для описания перемещения абонентов [18]: броуновское движение (Brownian Motion), движение в случайном на-

правлении (Random Direction Motion) и так называемый «полет Леви» (Lévy Flight).

## Литература

1. *Mouly M., Pautet M. B.* The GSM system for mobile communications. — Washington, DC, USA: Telecom Publishing, 1992. 701 p.
2. *Вишневский В. М., Портной С. Л., Шахнович И. В.* Энциклопедия WiMAX. Путь к 4G. — М.: Техносфера, 2009. 472 с.
3. WCDMA for UMTS: Radio access for third generation mobile communications / Eds. H. Holma, A. Toskala. — Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2005. 478 p.
4. *Sesia S., Baker M., Toufik I.* LTE — the UMTS long term evolution: From theory to practice. — Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2011. 792 p.
5. *Omm Г.* Методы подавления шумов и помех в электронных системах / Пер. с англ. — М.: Мир, 1979. 318 с. (*Ott H. W.* Noise reduction techniques in electronic systems. — New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 1979. 294 p.)
6. *Rong Z., Rappaport T. S.* Wireless communications: Principles and practice. — 1st ed. — Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall. 641 p.
7. *Baccelli F., Blaszczyszyn B.* Stochastic geometry and wireless networks // Found. Trends Netw., 2010. Vol. 3. No. 3-4. P. 249–449 (doi: 10.1561/1300000006); Vol. 4. No. 1-2. P. 1–312 (doi: 10.1561/1300000026).
8. *Haenggi M.* Stochastic geometry for wireless networks. — Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 298 p.
9. *Samuylov A., Ometov A., Begishev V., Kovalchukov R., Moltchanov D., Gaidamaka Yu., Samouylov K., Andreev S., Koucheryavy Y.* Analytical performance estimation of network-assisted D2D communications in urban scenarios with rectangular cells // T. Emerg. Telecommun. T., 2015. Vol. 28. Iss. 2. P. 2999–1–2999–15. doi: 10.1002/ett.2999.
10. *Samuylov A., Gaidamaka Yu., Moltchanov D., Andreev S., Koucheryavy Y.* Random triangle: A baseline model for interference analysis in heterogeneous networks // IEEE T. Veh. Technol., 2015. Vol. 65. Iss. 8. P. 6778–6782. doi: 10.1109/TVT.2016.2596324.
11. *Гайдамака Ю. В., Самуилов А. К.* Метод расчета характеристик интерференции двух взаимодействующих устройств в беспроводной гетерогенной сети // Информатика и её применения, 2015. Т. 9. Вып. 1. С. 9–14. doi: 10.14357/19922264150102.
12. *Гайдамака Ю. В., Андреев С. Д., Сопин Э. С., Самуилов К. Е., Шоргин С. Я.* Анализ характеристик интерференции в модели взаимодействия устройств с учетом среды распространения сигнала // Информатика и её применения, 2016. Т. 10. Вып. 4. С. 2–10. doi: 10.14357/19922264160401.
13. *Orlov Yu. N., Fedorov S. L., Samuylov A. K., Gaidamaka Yu. V., Molchanov D. A.* Simulation of devices mobility to estimate wireless channel quality metrics in 5G net-

- works // AIP Conf. Proc., 2017. Vol. 1863. P. 090005-1–090005-3. doi: 10.1063/1.4992270.
14. Гайдамака Ю. В., Орлов Ю. Н., Молчанов Д. А., Самуйлов А. К. Моделирование отношения сигнал/интерференция в мобильной сети со случайным блужданием взаимодействующих устройств // Информатика и её применения, 2017. Т. 11. Вып. 2. С. 50–58. doi: 10.14357/19922264170206.
  15. Босов А. Д., Кальметьев П. Ш., Орлов Ю. Н. Моделирование нестационарного временного ряда с заданными свойствами выборочного распределения // Математическое моделирование, 2014. Т. 26. № 3. С. 97–107.
  16. Орлов Ю. Н., Федоров С. Л. Генерация нестационарных траекторий временного ряда на основе уравнения Фоккера–Планка // Труды МФТИ, 2016. Т. 8. № 2. С. 126–133.
  17. Орлов Ю. Н., Федоров С. Л. Методы численного моделирования процессов нестационарного случайного блуждания. — М.: МФТИ, 2016. 112 с.
  18. Orsino A., Moltchanov D., Gapeyenko M., Samuylov A., Andreev S., Militano L., Araniti G., Koucheryavy Y. Direct connection on the move: Characterization of user mobility in cellular-assisted D2D systems // IEEE Veh. Technol. Mag., 2016. Vol. 11. Iss. 3. P. 38–48. doi: 10.1109/MVT.2016.2550002.

Поступила в редакцию 07.09.17

---

---

## METHOD OF MODELING INTERFERENCE CHARACTERISTICS IN HETEROGENEOUS FIFTH GENERATION WIRELESS NETWORKS WITH DEVICE-TO-DEVICE COMMUNICATIONS

Yu. Gaidamaka<sup>1,2</sup>, K. Samouylov<sup>1,2</sup>, and S. Shorgin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation

<sup>2</sup>Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** The paper shows the construction of the model of the moving of interacting devices in heterogeneous wireless networks of the fifth generation with the help of the kinetic equation taking into account a given average speed of the devices, their spatial density, and the maximum allowable communication radius. A method for generating trajectories is proposed where the transceivers move randomly and the walk is not stationary in general. This is the feature of the study which distinguishes the proposed model from previously known models. Interference characteristics, including signal–interference ratio (SIR), are studied in the form of a time-continuous random process, the problem of calculating these characteristics is proposed to be solved by simulations. It is shown that such analysis makes it possible to investigate the probabilistic characteristics of the interaction of devices such as signal interruption probability for the receiver–transmitter pair, the random variables for the duration of the availability period, and the period of absence of communication.

**Keywords:** wireless heterogeneous network; signal–interference ratio; device-to-device (D2D); motion model; kinetic equation; trajectories generation; network efficiency indicators

**DOI:** 10.14357/19922264170401

### Acknowledgments

This work was financially supported by the Russian Science Foundation (project No. 16-11-10227).

### References

1. Mouly, M., and M. B. Pautet. 1992. *The GSM system for mobile communications*. Washington, DC: Telecom Publishing. 701 p.
2. Vishnevskiy, V. M., S. L. Portnoy, and I. V. Shakhnovich. 2009. *Entsiklopediya WiMAX. Put' k 4G* [Encyclopedia of WiMAX. The way to 4G]. Moscow: Tekhnosfera. 472 p.
3. Holma, H., and A. Toskala, eds. 2005. *WCDMA for UMTS: Radio access for third generation mobile communications*. Chichester, UK: John Wiley & Sons. 478 p.
4. Sesia, S., M. Baker, and I. Toufik. 2011. *LTE — the UMTS long term evolution: From theory to practice*. Chichester, UK: John Wiley & Sons. 792 p.
5. Ott, H. W. 1979. *Noise reduction techniques in electronic systems*. New York, NY: John Wiley & Sons. 294 p.



6. Rong, Z., and T. S. Rappaport. 1996. *Wireless communications: Principles and practice*. 1st ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall. 641 p.
7. Baccelli, F., and B. Blaszczyszyn. 2010. Stochastic geometry and wireless networks. *Found. Trends Netw.* 3(3-4):249–449 (doi: 10.1561/1300000006); 4(1-2):1–312 (doi: 10.1561/1300000026).
8. Haenggi, M. 2012. *Stochastic geometry for wireless networks*. Cambridge: Cambridge University Press. 298 p.
9. Samuylov, A., A. Ometov, V. Begishev, R. Kovalchukov, D. Moltchanov, Yu. Gaidamaka, K. Samouylov, S. Andreev, and Y. Koucheryavy. 2015. Analytical performance estimation of network-assisted D2D communications in urban scenarios with rectangular cells. *T. Emerg. Telecommun. T.* 28(2):2999–1–2999–15. doi: 10.1002/ett.2999.
10. Samuylov, A., Yu. Gaidamaka, D. Moltchanov, S. Andreev, and Y. Koucheryavy. 2015. Random triangle: A baseline model for interference analysis in heterogeneous networks. *IEEE T. Veh. Technol.* 65(8):6778–6782. doi: 10.1109/TVT.2016.2596324.
11. Gaydamaka, Yu. V., and A. K. Samuylov. 2009. Metod rascheta kharakteristik interferentsii dvukh vzaimodeystvuyushchikh ustroystv v besprovodnoy geterogennoy seti [The method of calculation of the characteristics of the interference of two interacting devices in a wireless heterogeneous network]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(1):9–14. doi: 10.14357/19922264150102.
12. Gaydamaka, Yu. V., S. D. Andreev, E. S. Sopin, K. E. Samuylov, and S. Ya. Shorgin. 2016. Analiz kharakteristik interferentsii v modeli vzaimodeystviya ustroystv s uchetoм sredy rasprostraneniya signala [Analysis of the characteristics of the interference in the model of interaction between devices taking into account the signal propagation environment]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 10(4):2–10. doi: 10.14357/19922264160401.
13. Orlov, Yu. N., S. L. Fedorov, A. K. Samuylov, Yu. V. Gaidamaka, and D. A. Molchanov. 2017. Simulation of devices mobility to estimate wireless channel quality metrics in 5G networks. *AIP Conf. Proc.* 1863:090005–1–090005–3. doi: 10.1063/1.4992270.
14. Gaydamaka, Yu. V., Yu. N. Orlov, D. A. Molchanov, and A. K. Samuylov. 2017. Modelirovanie otnosheniya signal/interferentsiya v mobil'noy seti so sluchaynym bluzhdaniem vzaimodeystvuyushchikh ustroystv [Modeling the signal–interference ratio in a mobile network with moving devices]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 11(2):50–58. doi: 10.14357/19922264170206.
15. Bosov, A. D., R. Sh. Kalmetiev, and Yu. N. Orlov. 2014. Modelirovanie nestatsionarnogo vremennogo ryada s zadannymi svoystvami vyborochnogo raspredeleniya [Sample distribution function construction for non-stationary time-series forecasting]. *Matem. mod. [Mathematical Simulation]*. 26(3):97–107.
16. Orlov, Yu. N. and S. L. Fedorov. 2016. Generatsiya nestatsionarnykh traektoriy vremennogo ryada na osnove uravneniya Fokkera–Planka [Generation of non-stationary trajectories of the time series based on the Fokker–Planck equation]. *Trudy MFTI [MIPT Proc.]* 8(2):126–133.
17. Orlov, Yu. N., and S. L. Fedorov. 2016. *Metody chislenno-go modelirovaniya protsessov nestatsionarnogo sluchaynogo bluzhdaniya* [Methods of a numerical simulation of non-stationary random walk]. Moscow: MIPT. 112 p.
18. Orsino, A., D. Moltchanov, M. Gapeyenko, A. Samuylov, S. Andreev, L. Militano, G. Araniti, and Y. Koucheryavy. 2016. Direct connection on the move: Characterization of user mobility in cellular-assisted D2D systems. *IEEE Veh. Technol. Mag.* 11(3):38–48. doi: 10.1109/MVT.2016.2550002.

Received September 7, 2017

## Contributors

**Gaidamaka Yuliya V.** (b. 1971) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; gaydamaka\_yuv@rudn.university

**Samouylov Konstantin E.** (b. 1955) — Doctor of Science in technology, professor, Head of Department, Director of Institute of Applied Mathematics and Telecommunications, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; samuylov\_ke@rudn.university

**Shorgin Sergey Ya.** (b. 1952) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor; Deputy Director, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences (FRC CRC RAS); principal scientist, Institute of Informatics Problems, FRC CRC RAS; 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; sshorgin@ipiran.ru

# СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ИНВЕРСИОННЫМ ПОРЯДКОМ ОБСЛУЖИВАНИЯ, ВЕРОЯТНОСТНЫМ ПРИОРИТЕТОМ И ГРУППОВЫМ ПОСТУПЛЕНИЕМ РАЗНОРОДНЫХ ЗАЯВОК\*

Р. В. Разумчик<sup>1</sup>

**Аннотация:** Статья посвящена исследованию стационарных характеристик однолинейных систем массового обслуживания (СМО) со специальными дисциплинами обслуживания. Рассматриваемая дисциплина — инверсионный порядок обслуживания с вероятностным приоритетом. Основные результаты для данной дисциплины были получены в предположениях, что в систему поступает пуассоновский поток или поток фазового типа и времена обслуживания имеют произвольное распределение. Существенным также было предположение о независимости процесса поступления заявок от состояния системы. Здесь же показано, что это предположение может быть определенным образом ослаблено. Рассматривается система с одним прибором, очередью неограниченной емкости и неординарным пуассоновским потоком, интенсивность которого может зависеть от общего числа заявок, находящихся в системе в момент поступления группы, причем размер поступающей группы и размеры заявок в ней имеют совместное произвольное распределение. Получены аналитические соотношения, позволяющие рассчитывать совместное стационарное распределение числа заявок в системе и остаточных времен обслуживания. Кроме того, в терминах преобразований Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) находятся стационарные распределения случайных величин, связанных с временем ожидания начала обслуживания и пребывания заявки в системе.

**Ключевые слова:** инверсионный порядок обслуживания; вероятностный приоритет; неординарный входящий поток

**DOI:** 10.14357/19922264170402

## 1 Введение

Эта статья развивает результаты работ [1–6] по исследованию стационарных характеристик однолинейных СМО  $M/G/1$  с инверсионным порядком обслуживания и вероятностным приоритетом. Основные результаты этих работ были получены в предположении, что входящий в систему поток является простейшим.

Как было продемонстрировано в [7], некоторые из этих результатов допускают обобщение на случай потоков фазового типа, которые не являются рекуррентными и, таким образом, могут быть более привлекательными при моделировании процессов в реальных технических системах. Несмотря на свою общность, модель потока фазового типа подразумевает, что процесс поступления заявок в систему не зависит от состояния самой системы. Тем самым в стороне осталась задача обобщения результатов на случай, когда такая зависимость присутствует. Не останавливаясь на возможных практических интерпретациях связей между входящим потоком и состоянием системы (см. [8]), отметим

лишь, что исследованию СМО с такими зависимостями посвящено достаточно много работ (см., например, [9–12] и ссылки в них). Обычно предполагается, что в систему поступает пуассоновский поток второго рода (т. е. интенсивность потока зависит от общего числа заявок, находящихся в системе). Если же допускается поступление групп заявок, то обычно предполагается, что размеры (остаточные времена обслуживания) заявок в группе являются независимыми случайными величинами (не зависящими также и от размера группы).

В данной статье эти предположения ослабляются следующим образом: рассматривается неординарный пуассоновский поток, интенсивность которого может зависеть от общего числа заявок, находящихся в системе в момент поступления группы, причем размер поступающей группы и размеры заявок в ней имеют совместное произвольное распределение. Для однолинейной СМО неограниченной емкости с инверсионным порядком обслуживания и вероятностным приоритетом при таком входящем потоке решена задача отыскания совместного стационарного распределения числа за-

\*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 16-11-10227).

<sup>1</sup>Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; Российский университет дружбы народов, rrazumchik@ipiran.ru

заявок в системе и их остаточного времени обслуживания, а также стационарных распределений (в терминах ПЛС), связанных с временем пребывания заявки в системе.

## 2 Описание системы

Рассмотрим однолинейную СМО с очередью неограниченной емкости, на вход которой поступает групповой пуассоновский поток заявок с переменной интенсивностью  $\lambda_n$ , зависящей от числа заявок  $n$ , находящихся в системе. Через  $B_k(x_1, \dots, x_k)$  будем обозначать вероятность того, что в поступившей группе будет  $k$  заявок, причем первая заявка будет иметь длину меньше  $x_1$ , вторая — меньше  $x_2$  и т.д.; через  $b_k(x_1, \dots, x_k) = \partial^k B_k(x_1, \dots, x_k) / (\partial x_1 \dots \partial x_k)$  — совместную плотность вероятностей. Длины заявок в различных группах независимы между собой.

Определим дисциплину обслуживания следующим образом: в момент прихода очередной группы заявок замеряется остаточное время обслуживания (в дальнейшем будем называть его длиной) первой заявки из группы. Пусть она равна  $x$ . Эта длина сравнивается с остаточной длиной заявки, находящейся на обслуживании. Если оставшееся время обслуживания заявки на приборе равно  $y$ , то с вероятностью  $d(x, y)$  первая заявка из группы становится на обслуживание, за ней (в очередь) становятся остальные заявки группы, затем обслуживавшаяся ранее и остальные заявки, прежде находившиеся в системе. С вероятностью  $\bar{d}(x, y) = 1 - d(x, y)$  обслуживавшаяся ранее заявка продолжает обслуживаться на приборе, вновь поступившие заявки становятся (в очередь) за ней, затем остальные находившиеся прежде в системе заявки. Недообслуженные заявки дообслуживаются.

Поскольку интерес представляют стационарные характеристики этой системы, всюду в дальнейшем будем предполагать, что стационарное распределение существует. Критерий его существования следует из условия конечности среднего времени возвращения в некоторое состояние (см. соотношение (12)). Однако в случае произвольных функций  $B_k(x_1, \dots, x_k)$  выписать его в простом виде не удается.

## 3 Марковский случайный процесс

Обозначим через  $\nu(t)$  число заявок в системе в момент  $t$ , а через  $\vec{\xi}(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_{\nu(t)}(t))$  — вектор, координатой  $\xi_1(t)$  которого является остаточное время обслуживания заявки, находящейся

в этот момент на приборе,  $\xi_2(t)$  — первой заявки в очереди,  $\dots$ ,  $\xi_{\nu(t)-1}(t)$  — последней,  $(\nu(t) - 1)$ -й заявки в очереди. При  $\nu(t) = 0$  вектор  $\vec{\xi}(t)$  не определяется. Тогда  $\eta(t) = (\nu(t), \vec{\xi}(t))$  представляет собой марковский процесс, описывающий поведение числа заявок в рассматриваемой системе.

## 4 Система интегродифференциальных уравнений

Обозначим через  $p_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\nu(t) = 0\}$ ,  $P_n(x_1, \dots, x_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\nu(t) = n, \xi_1(t) < x_1, \dots, \xi_n(t) < x_n\}$ ,  $n \geq 1$ , стационарное распределение процесса  $\eta(t)$ , а через  $p_n(x_1, \dots, x_n)$  — стационарную плотность вероятности того, что в системе  $n$  заявок, причем заявка на приборе имеет длину  $x_1$ , первая в очереди — длину  $x_2$  и т.д.

Выпишем систему интегродифференциальных уравнений, которой удовлетворяют  $p_n(x_1, \dots, x_n)$ . Воспользовавшись методом исключения состояний (см., например, [1–5]), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 -p'_1(x) = & \lambda_0 p_0 \left( b_1(x) + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=2}^{\infty} \int \dots \int_{y_1, \dots, y_{k-1} > 0} b_k(y_1, \dots, y_{k-1}, x) dy_1 \dots dy_{k-1} \right) - \\
 & - \lambda_1 p_1(x) + \lambda_1 p_1(x) \times \\
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} \int \dots \int_{y_1, \dots, y_k > 0} b_k(y_1, \dots, y_k) d(y_1, x) dy_1 \dots dy_k + \\
 & + \lambda_1 \int_0^{\infty} p_1(y) b_1(x) \bar{d}(x, y) dy + \\
 & + \lambda_1 \sum_{k=2}^{\infty} \int \dots \int_{y_1, \dots, y_k > 0} p_1(y_1) b_k(y_2, \dots, y_k, x) \times \\
 & \times \bar{d}(y_2, y_1) dy_1 \dots dy_k; \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -p'_n(x_1, \dots, x_n) = & \lambda_0 p_0 \left( b_n(x_1, \dots, x_n) + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} \int \dots \int_{y_1, \dots, y_{k-n} > 0} b_k(y_1, \dots, y_{k-n}, x_1, \dots \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots, x_n) dy_1 \cdots dy_{k-n} \Big) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k d(x_1, x_{n-k+1}) \times \\
 & \times b_{n-k}(x_1, \dots, x_{n-k}) p_k(x_{n-k+1}, \dots, x_n) + \\
 & + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \bar{d}(x_2, x_1) b_{n-k}(x_2, \dots, x_{n-k+1}) \times \\
 & \times p_k(x_1, x_{n-k+2}, \dots, x_n) - \lambda_n p_n(x_1, \dots, x_n) + \\
 & + \sum_{k=1}^n \int_0^\infty \lambda_k \bar{d}(x_1, y) b_{n-k+1}(x_1, \dots, x_{n-k+1}) \times \\
 & \times p_k(y, x_{n-k+2}, \dots, x_n) dy + \\
 & + \lambda_n p_n(x) \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty b_{k1}(y) d(y, x) dy + \\
 & + \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\infty \lambda_k d(y, x_{n-k+1}) b_{n-k+1}(y, x_1, \dots, x_{n-k}) \times \\
 & \times p_k(x_{n-k+1}, \dots, x_n) dy + \\
 & + \lambda_k \sum_{k=1}^n \sum_{m=2}^\infty \int_{y_1, \dots, y_m > 0} \cdots \int \bar{d}(y_2, y_1) \times \\
 & \times b_{n-k+m}(y_2, \dots, y_m, x_1, \dots, x_{n-k+1}) \times \\
 & \times p_k(y_1, x_{n-k+2}, \dots, x_n) dy_1 \cdots dy_m + \\
 & + \lambda_k \sum_{k=1}^n \sum_{m=2}^\infty \int_{y_1, \dots, y_m > 0} \cdots \int d(y_1, x_{n-k+1}) \times \\
 & \times b_{n-k+m}(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_{n-k}) \times \\
 & \times p_k(x_{n-k+1}, \dots, x_n) dy_1 \cdots dy_m, \quad n \geq 2. \quad (2)
 \end{aligned}$$

К этой системе уравнений нужно добавить граничные условия, которые удобно записать в виде:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_1(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p_n(x, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad n \geq 2.$$

Полученные соотношения позволяют теоретически последовательно по  $n$  вычислять совместное стационарное распределение  $p_n(x_1, \dots, x_n)$  с точностью до вероятности  $p_0$ , которая находится из условия нормировки. Если достаточно знать только маргинальные плотности

$$p_n(x) = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty p_n(x, x_2, \dots, x_n) dx_2 \cdots dx_n, \quad n \geq 2,$$

то полученные соотношения можно упростить. Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 b_{k,m}(x) = & \int_{y_1, \dots, y_{k-1} > 0} \cdots \int b_k(y_1, \dots, y_{m-1}, x, y_m, \dots \\
 & \dots, y_{k-1}) dy_1 \cdots dy_{k-1}, \quad k \geq 2, \quad m = \overline{1, k}; \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$b_{2,1,2}(y, x) = b_2(y, x); \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 b_{k,1,m}(y, x) = & \int_{y_1, \dots, y_{k-2} > 0} \cdots \int b_k(y, y_1, \dots \\
 & \dots, y_{m-2}, x, y_{m-1}, \dots, y_{k-2}) dy_1 \cdots dy_{k-2}, \\
 & k \geq 3, \quad m = \overline{2, k}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Интегрируя (1) и (2) по  $x_2, \dots, x_n$  в пределах от 0 до  $\infty$  и учитывая обозначения (3)–(5), получаем следующую систему интегродифференциальных уравнений для  $p_n(x)$ ,  $n \geq 1$ :

$$\begin{aligned}
 -p_1'(x) = & a_1(x) - \lambda_1 p_1(x) + \\
 & + \lambda_1 \int_0^\infty p_1(y) K(x, y) dy + \lambda_1 p_1(x) g_1(x), \quad (6) \\
 -p_n'(x) = & a_n(x) - \lambda_n p_n(x) + \\
 & + \lambda_n \int_0^\infty p_n(y) K(x, y) dy + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \left( p_k(x) g_{n,k}(x) + \right. \\
 & \left. + \int_0^\infty p_k(y) G_{n,k}(x, y) dy \right), \quad n \geq 2; \quad (7)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_1(x) = & \lambda_0 p_0 \left( b_1(x) + \sum_{k=2}^\infty b_{kk}(x) \right); \\
 a_n(x) = & \lambda_0 p_0 \left( b_{n1}(x) + \sum_{k=n+1}^\infty b_{k, k-n+1}(x) \right); \\
 K(x, y) = & \bar{d}(x, y) b_1(x) + \sum_{k=2}^\infty \int_0^\infty \bar{d}(z, y) b_{k,1,k}(z, x) dz; \\
 g_1(x) = & \int_0^\infty d(y, x) b_1(y) dy, + \sum_{k=2}^\infty \int_0^\infty d(y, x) b_{k1}(y) dy; \\
 g_{n,n-1}(x) = & \int_0^\infty \bar{d}(y, x) b_1(y) dy; \\
 g_{n,k}(x) = & \int_0^\infty \bar{d}(y, x) b_{n-k,1}(y) dy, \quad k = \overline{1, n-2}; \\
 G_{n,n-1}(x, y) = & d(x, y) b_1(x); \\
 G_{n,k}(x, y) = & d(x, y) b_{n-k,1}(x) + \bar{d}(x, y) b_{n-k+1,1}(x) + \\
 & + \int_0^\infty d(z, y) b_{n-k+1,1,2}(z, x) dz + \\
 & + \sum_{m=2}^\infty \int_0^\infty (\bar{d}(z, y) b_{n-k+m,1,m}(z, x) + \\
 & + d(z, y) b_{n-k+m,1,m+1}(z, x)) dz, \quad k = \overline{1, n-2}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что все функции, входящие в интегральные уравнения (6) и (7), являются неотрицательными. Полученная система решается рекуррентным образом. Граничные условия имеют вид:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_n(x) = 0, \quad n \geq 1.$$

Сначала определяем  $p_1(x)$  из (6), затем  $p_2(x)$  через  $p_1(x)$  из (7) при  $n = 2$  и т.д. Предварительно можно выполнить замену  $p_n(x) = e^{\lambda x} q_n(x)$  и проинтегрировать новые уравнения от 0 до  $\infty$  с учетом граничных условий. Численное решение может быть найдено, например, методом итераций, причем в качестве начальной итерации удобно взять нулевое приближение.

В заключение этого раздела отметим, что, если для функции  $d(x, y)$  известна соответствующая сепарабельная аппроксимация (см., например, [3, 13–15]), в некоторых случаях (как, например, при выполнении приводимых ниже условий (8)) уравнения (6) и (7) сводятся к системе линейных алгебраических уравнений.

## 5 Производящая функция

В ряде случаев решение уравнений (6) и (7) может быть найдено в терминах производящих функций (ПФ), что облегчает нахождение моментов числа заявок в системе. Разберем один из них — случай группового пуассоновского потока постоянной интенсивности, в котором длины заявок в поступающей группе не зависят друг от друга и от размера группы, т.е.

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k &= \lambda, & k &\geq 0; \\ B_k(x_1, \dots, x_k) &= c_k B(x_1) \cdots B(x_k), & k &\geq 1, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $B(x)$  — непрерывная функция распределения времени обслуживания одной заявки на приборе,  $c_k \geq 0$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1$ . Необходимым и достаточным условием существования стационарного режима (и это будет дополнительно показано ниже<sup>1</sup>) является  $\lambda \bar{c} < 1$ , где  $\bar{b} = \int_0^{\infty} x dB(x)$  — средняя длина поступающей заявки, а  $\bar{c} = C'(1)$  — средний размер поступающей группы заявок.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} H^*(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = P_0 + H(z); \\ h(z, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) z^n, \quad C(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \end{aligned}$$

где  $P_n = P_n(\infty, \dots, \infty)$ ,  $n \geq 1$ . Умножив уравнение (6) на  $z$ , а (7) — на  $z^n$ , просуммировав и проинтегрировав с учетом граничного условия  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(z, x) = 0$ , получаем уравнение:

$$\begin{aligned} h(z, x) &= \lambda p_0 (1 - B(x)) \frac{z(1 - C(z))}{1 - z} + \\ &+ \lambda (1 - B(x)) H(z) \left( C(z) + c_1 + \frac{z^2 - C(z)}{z(1 - z)} \right) - \\ &- \lambda (1 - C(z)) \left( \int_x^{\infty} \int_0^{\infty} \bar{d}(t, y) h(z, y) dy dB(t) - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \bar{d}(t, y) h(z, y) dy dB(t) \right) + \\ &+ \lambda \frac{C(z) - c_1 z}{z} \int_x^{\infty} \int_0^{\infty} h(z, y) \left( \bar{d}(t, y) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} d(u, y) dB(u) \right) dy dB(t). \quad (9) \end{aligned}$$

В случае ординарного потока ( $c_1 \equiv 1$ ) из этого уравнения немедленно следует ПФ числа заявок в системе, рассмотренной в [1]. Трактую  $z$  как параметр, для решения уравнения (9) можно применить метод, описанный в предыдущем разделе.

Задачу нахождения моментов стационарного распределения числа заявок в системе рассмотрим на примере математического ожидания и ограничимся лишь описанием алгоритма его расчета.

Будем считать, что операции дифференцирования, которые будут применены ниже, законны. Проинтегрируем (9) по  $x$  от 0 до  $\infty$  и найдем  $H(z)$ . Продифференцировав выражение для  $(1 - z)H(z)$  два раза и положив  $z = 1$ , получим формулу для расчета среднего числа заявок  $E\nu$  в системе с двумя неизвестными:  $h(1, x)$  и  $h'(1, x) = \partial h(z, x) / \partial z|_{z=1}$ . Их нахождение осуществляется в два этапа. Сначала выписывается выражение для  $H(1)$ , затем, подставив  $z = 1$  и найденное выражение для  $H(1)$  в (9), получается интегральное уравнение для  $h(1, x)$ , численное решение которого можно найти, например, как и выше, итерационным методом. Таким же образом, но предварительно продифференцировав (9) по  $z$ , находится и уравнение для  $h'(1, x)$ .

Необходимым условием существования  $E\nu$  является условие:

<sup>1</sup>Этот результат также следует из сравнения суммарной работы в рассматриваемой системе и классической системе  $M/G/1$  с групповым входящим потоком и обслуживанием в порядке поступления.



$$\bar{c} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{d}(t, y)(1 - B(y)) dy dB(t) dx < \infty. \quad (10)$$

Показать это можно так же, как и для системы из [1]. Предположим, что  $E\nu < \infty$ . Тогда  $(H^*(1))' = H'(1) < \infty$ . Поскольку

$$h(z, x) \leq h(1, x) \leq \lambda \bar{c}(1 - B(x)), \quad (11)$$

то

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{d}(t, y) h(z, y) dy dB(t) dx \leq \lambda \bar{c} \bar{b}^2 < \infty.$$

Интегрируя теперь (9) по  $x$  от 0 до  $\infty$ , получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda \bar{b}(1 - zH^*(z))}{1 - z} + (z(1 - C(z))(1 - z))^{-1} \times \\ & \times \left\{ H(z)(1 - z)z - \lambda \bar{b}z(1 - C(z)) + \right. \\ & \quad + \lambda(1 - z)(C(z) - c_1z) \times \\ & \quad \times \left[ \int_0^\infty \int_x^\infty \int_0^\infty h(z, y) (\bar{d}(t, y) + \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_0^\infty d(u, y) dB(u)) dy dB(t) dx - \bar{b}H(z) \right] \right\} + \\ & \quad + \lambda \int_0^\infty \int_x^\infty \int_0^\infty \bar{d}(t, y) h(z, y) dy dB(t) dx = \\ & \quad = \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{d}(t, y) h(z, y) dy dB(t) dx. \end{aligned}$$

Поскольку левая часть ограничена и  $h(z, x) \rightarrow h(1, x)$  при  $z \rightarrow 1$ , воспользовавшись теоремой Фату и учитывая (11), приходим к (10).

Достаточность показать сложнее, и ввиду громоздкости выкладок на этом здесь останавливаться не будем. Заметим, что для выполнения (10) достаточно (помимо конечности среднего размера группы) существования у распределения времени обслуживания  $B(x)$  второго момента.

## 6 Время пребывания заявки в системе

Вернемся к основной исследуемой системе. Расчет временных характеристик поступающих в систему заявок начинается с нахождения периода занятости (ПЗ) и его характеристик. Обозначим через

<sup>1</sup>Для основной исследуемой системы ПЛС ПЗ равен  $\sum_{k=1}^\infty \int \dots \int_{y_1, \dots, y_k > 0} \prod_{n=1}^k u_n(s; y_{k-n+1}) B_k(dy_1, \dots, dy_k)$ .

$u_n(s; x)$ ,  $n \geq 1$ , ПЛС функции распределения времени до того момента, когда в системе останется  $(n - 1)$  заявок при условии, что на приборе начала обслуживаться заявка длины  $x$  и в системе находилось  $n$  заявок. Уравнение для  $u_n(s; x)$  получается из следующих рассуждений: за время обслуживания заявки длины  $x$  с вероятностью  $e^{-\lambda_n x}$  не поступит больше ни одной заявки, а с вероятностью  $\lambda_n e^{-\lambda_n t} dt$  на интервале времени  $[t, t + dt]$  может поступить группа размером  $k \geq 1$ . В первом случае ПЛС равно  $e^{-sx}$ , а во втором зависит от размера поступающей группы и того, произошла смена заявки на приборе или нет (и в каждом случае необходимо дождаться окончания обслуживания исходной заявки длины  $(x - t)$  и  $k$  новых заявок). Рассматривая все возможные события и воспользовавшись свойствами ПЛС, получаем:

$$\begin{aligned} u_n(s; x) &= e^{-(\lambda_n + s)x} + \\ & + \sum_{k=1}^\infty \int_0^x \lambda_n e^{-(\lambda_n + s)t} dt \int \dots \int_{y_1, \dots, y_k > 0} d(y_1, x - t) \times \\ & \times u_n(s; x - t) \prod_{j=1}^k u_{n+k+1-j}(s; y_j) B_k(dy_1, \dots, dy_k) + \\ & + \sum_{k=1}^\infty \int_0^x \lambda_n e^{-(\lambda_n + s)t} dt \int \dots \int_{y_1, \dots, y_k > 0} \bar{d}(y_1, x - t) \times \\ & \times u_{n+k}(s; x - t) \prod_{j=1}^k u_{n+k-j}(s; y_j) \times \\ & \times B_k(dy_1, \dots, dy_k). \quad (12) \end{aligned}$$

Решение этого интегрального уравнения в явном виде для произвольных функций  $B_k(x_1, \dots, x_k)$  получить не удастся. Однако в некоторых частных случаях оно разрешимо, как, например, в случае условий (8). Здесь  $u_n(s; x)$  не зависит от  $n$  и, как нетрудно вывести из (12),

$$u_n(s; x) = u(s; x) = e^{-(\lambda + s - \lambda C(u(s)))x},$$

где  $\beta(s)$  — ПЛС функции распределения  $B(x)$ , а  $u(s)$  является корнем уравнения:

$$u(s) = \beta(\lambda + s - \lambda C(u(s))).$$

Кроме того, ПЛС  $u^*(s)$  функции распределения ПЗ<sup>1</sup> удовлетворяет уравнению  $u^*(s) = C(\beta(\lambda + s - \lambda u^*(s)))$ .

Для нахождения распределений времен ожидания начала обслуживания и пребывания в системе введем следующие функции:

$\tilde{B}(k, i, x)$  — вероятность того, что пришла группа из  $k$  заявок и  $i$ -я заявка в группе имеет длину меньше  $x$ :

$$\tilde{B}(k, i, x) = B_k(\infty, \dots, \infty, x, \infty, \dots, \infty),$$

$$k \geq 1, \quad 1 \leq i \leq k;$$

$\bar{B}(x_1, \dots, x_{i-1}; k, i, x)$  — условная вероятность<sup>1</sup> того, что первая заявка имеет длину меньше  $x_1$ , вторая — меньше  $x_2, \dots, (i-1)$ -я — меньше  $x_{i-1}$ , при условии, что пришла группа из  $k$  заявок, причем заявка на  $i$ -м месте имеет длину  $x$ :

$$\bar{B}(x_1, \dots, x_{i-1}; k, i, x) =$$

$$= \frac{d_x B_k(x_1, \dots, x_{i-1}, x, \infty, \dots, \infty)}{d\tilde{B}(k, i, x)};$$

$\hat{B}(x)$  — среднее число заявок длины меньше  $x$  в поступающей группе:

$$\hat{B}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k \tilde{B}(k, i, x);$$

$\hat{B}(k, i; x)$  — условная вероятность того, что поступила группа из  $k$  заявок, среди них есть ровно одна заявка длины  $x$  и она находится на  $i$ -м месте, при условии что поступила группа, в которой имеются заявки длины  $x$ :

$$\hat{B}(k, i; x) = \frac{d_x \tilde{B}(k, i, x)}{\hat{B}(x)}, \quad k \geq 1, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Определим сначала ПЛС  $\omega_{k1}(s; x)$  функции распределения времени ожидания начала обслуживания заявки длины  $x$  при условии, что она поступила в группе размера  $k \geq$  и была на первом месте в группе. Ее время ожидания равно нулю, если она застала систему свободной и если она, застав на приборе заявку длины  $y$ , заняла ее место. Если же она застала в системе  $n, n \geq 1$ , заявок, на приборе — заявку длины  $y$  и не заняла ее место, то время ожидания совпадает с ПЗ, открываемого заявкой длины  $y$ , когда в системе находится  $(n+k)$  заявок, т. е.  $u_{n+k}(s; y)$ . В терминах ПЛС имеем

$$\omega_{k1}(s; x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} p_n(y) (d(x, y) +$$

$$+ \bar{d}(x, y) u_{n+k}(s; y)) dy, \quad k \geq 1.$$

Перейдем к ПЛС времени ожидания начала обслуживания заявки длины  $x$ , поступившей в группе

<sup>1</sup>Здесь производная понимается как производная Радона–Никодима.

из  $k$  заявок ( $k \geq 2$ ) и занимающей в группе  $i$ -е место ( $2 \leq i \leq k$ ). В случае поступления в пустую систему время ожидания совпадает с суммарной длительностью  $(i-1)$ -го ПЗ, первый из которых открывается заявкой длины  $x_1$ , второй —  $x_2$  и т. д., и в терминах ПЛС равно  $u_k(s; x_1) \cdots u_2(s; x_{i-1})$ . Длительности соответствующих ПЗ необходимо добавить к времени ожидания, когда поступающая группа застает систему занятой. В итоге, вводя обозначение

$$\tilde{u}_{nk}(s; x_1, \dots, x_{i-1}) = u_{n+k}(s; x_1) \cdots u_{n+2}(s; x_{i-1}),$$

выражение для ПЛС функции распределения времени ожидания начала обслуживания  $\omega_{ki}(s; x_1, \dots, x_{i-1}, x)$  заявки длины  $x$ , поступившей в группе из  $k$  заявок и занимающей в группе  $i$ -е место, можно записать так:

$$\omega_{ki}(s; x_1, \dots, x_{i-1}, x) = p_0 \tilde{u}_{0k}(s; x_1, \dots, x_{i-1}) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} p_n(y) (d(x_1, y) \tilde{u}_{nk}(s; x_1, \dots, x_{i-1}) +$$

$$+ \bar{d}(x_1, y) u_{n+k}(s; y) \tilde{u}_{n-1, k}(s; x_1, \dots, x_{i-1})) dy,$$

$$k \geq 2, \quad 2 \leq i \leq k.$$

Легко видеть, что если интенсивность входящего потока не зависит от числа заявок в системе, то при фиксированном  $i$  все  $u_n(s; x_i)$  равны между собой и выражение  $\omega_{ki}(s; x_1, \dots, x_{i-1}, x)$  приводится к виду:

$$\omega_{ki}(s; x_1, \dots, x_{i-1}, x) =$$

$$= \omega_{k1}(s; x_1) u(s; x_1) \cdots u(s; x_{i-1}),$$

т. е. не зависит от числа заявок в группе, а только от места выделенной заявки в группе (и, конечно, остаточных длин заявок, стоящих перед ней).

Теперь можно выписать ПЛС распределений, связанных с временем ожидания начала обслуживания и пребывания в системе. Условно стационарное распределение времени ожидания начала обслуживания заявки длины  $x$  при условии, что всего в группе поступило  $k \geq 2$  заявок и заявка длины  $x$  находится на  $i$ -м месте ( $2 \leq i \leq k$ ), имеет ПЛС, задаваемое выражением:

$$\omega_{ki}(s; x) = \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \omega_{ki}(s; x_1, \dots, x_{i-1}, x) \times$$

$$\times \bar{B}(dx_1, \dots, dx_{i-1}; k, i, x). \quad (13)$$

Усредняя  $\omega_{ki}(s; x)$  по распределению  $\hat{B}(k, i; x)$ , получаем формулу для ПЛС  $\omega(s; x)$  функции распре-

деления времени ожидания начала обслуживания заявки длины  $x$ :

$$\omega(s; x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k \omega_{ki}(s; x) \hat{B}(k, i; x). \quad (14)$$

Безусловное ПЛС  $\omega(s)$  функции распределения времени ожидания начала обслуживания определяется путем усреднения по длине заявки:

$$\omega(s) = \int_0^{\infty} \omega(s; x) d\hat{B}(x) (\hat{B}(\infty))^{-1}. \quad (15)$$

В случае условий (8) все упрощается и формулу для  $\omega(s; x)$  можно привести к виду:

$$\omega(s; x) = \frac{1}{c} \left( \omega^*(s; x) + \frac{u(s) - C(u(s))}{u(s)(1 - u(s))} \int_0^{\infty} \omega^*(s; y) u(s, y) b(y) dy \right), \quad (16)$$

где

$$\omega^*(s; x) = p_0 + \int_0^{\infty} h(1, y) (d(x, y) + \bar{d}(x, y) u(s; y)) dy.$$

Аналогичным образом находится и ПЛС  $\phi(s; x)$  функции распределения времени пребывания заявки длины  $x$  в системе и безусловное ПЛС  $\phi(s)$ . Обозначим через  $\phi_{ki}(s; x_1, \dots, x_{i-1}, x)$ ,  $k \geq 1$ ,  $1 \leq i \leq k$ , ПЛС функции распределения времени пребывания в системе заявки длины  $x$ , поступившей в группе из  $k$  заявок и занимающей в группе  $i$ -е место. При  $i = 1$  аргумент  $x_0$  опускается, т.е.  $\phi_{k1}(s; x_0, x) = \phi_{k1}(s; x)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \phi_{ki}(s; x_1, \dots, x_{i-1}, x) &= \\ &= p_0 \tilde{u}_{0k}(s; x_1, \dots, x_{i-1}) u_1(s; x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} p_n(y) \times \\ &\quad \times (d(x_1, y) \tilde{u}_{nk}(s; x_1, \dots, x_{i-1}) u_{n+1}(s; x) + \\ &\quad + \bar{d}(x_1, y) u_{n+k}(s; y) \tilde{u}_{n-1, k}(s; x_1, \dots, x_{i-1}) \times \\ &\quad \times u_n(s; x)) dy, \quad k \geq 1, \quad 1 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

Переход к ПЛС  $\phi(s; x)$  и  $\phi(s)$  осуществляется по формулам (13)–(15). Если выполняются условия (8), то, вспоминая, что время пребывания заявки в системе складывается из времени ожидания начала обслуживания и времени пребывания на приборе, получаем  $\phi(s; x) = \omega(s; x) u(s; x)$ . Дифференцируя эту формулу с учетом (16) необходимое число раз, нетрудно получить моменты времени пребывания в системе заявки длины  $x$ .

## 7 Заключение

Используя результаты предыдущего раздела, можно также найти совместные распределения ПЗ и числа обслуженных на приборе заявок, или интервала времени, когда в системе находилось не менее  $n$  заявок, или этих обеих случайных величин и т. п.

В практическом плане интерес в дальнейшем представляет разбор частных случаев, т.е. анализ стационарных характеристик системы в различных предположениях о зависимости размеров заявок внутри группы; в теоретическом — обобщение полученных результатов на случай более общего группового входящего потока, когда в каждой поступающей группе могут находиться подгруппы заявок одинаковой или различной длины.

## Литература

1. *Нагоненко В. А.* О характеристиках одной нестандартной системы массового обслуживания. I, II // Изв. АН СССР. Технич. кибернет., 1981. № 1. С. 187–195; № 3. С. 91–99.
2. *Печинкин А. В.* Об одной инвариантной системе массового обслуживания // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization, 1983. Vol. 14. No. 3. P. 433–444.
3. *Милованова Т. А., Печинкин А. В.* Стационарные характеристики системы обслуживания с инверсионным порядком обслуживания, вероятностным приоритетом и гистерезисной политикой // Информатика и её применения, 2013. Т. 7. Вып. 1. С. 22–36.
4. *Мейханаджян Л. А., Милованова Т. А., Печинкин А. В., Разумчик Р. В.* Стационарные вероятности состояний в системе обслуживания с инверсионным порядком обслуживания и обобщенным вероятностным приоритетом // Информатика и её применения, 2014. Т. 8. Вып. 3. С. 16–26.
5. *Мейханаджян Л. А., Милованова Т. А., Разумчик Р. В.* Время ожидания в системе обслуживания с инверсионным порядком обслуживания и обобщенным вероятностным приоритетом // Информатика и её применения, 2015. Т. 9. Вып. 2. С. 14–22.
6. *Razumchik R.* On  $M/G/1$  queue with state-dependent heterogeneous batch arrivals, inverse service order and probabilistic priority // AIP Conf. Proc., 2017. Vol. 1863. No. 1. P. 090006-1–090006-3.
7. *Милованова Т. А.* Система  $VMAP/G/1/\infty$  с инверсионным порядком обслуживания и вероятностным приоритетом // Автомат. телемех., 2009. № 5. С. 155–168.
8. *Bent N.* On a queuing model where potential customers are discouraged by queue length // Scand. J. Stat., 1975. Vol. 2. Iss. 1. P. 34–42.

9. Печинкин А. В. Система  $M_k/G/1$  с ненадежным прибором // Автомат. телемех., 1996. № 9. С. 100–110.
10. Gupta U. C., Srinivasa Rao T. S. S. On the analysis of single server finite queue with state dependent arrival and service processes:  $M_n/G_n/1/K$  // OR Spektrum, 1998. Vol. 20. Iss. 2. P. 83–89.
11. Kerner Y. The conditional distribution of the residual service time in the  $M_n/G/1$  queue // Stoch. Models, 2008. Vol. 24. Iss. 3. P. 364–375.
12. Abouee-Mehrizi H., Baron O. State-dependent  $M/G/1$  queueing systems // Queueing Sy., 2016. Vol. 82. Iss. 1-2. P. 121–148.
13. Поспелов В. В. О погрешности приближения функции двух переменных суммами произведений функций одного переменного // Ж. вычисл. матем. матем. физ., 1978. Т. 18. Вып. 5. С. 1307–1308.
14. Uschmajew A. Regularity of tensor product approximations to square integrable functions // Constr. Approx., 2011. Vol. 34. Iss. 3. P. 371–391.
15. Townsend A., Trefethen L. N. An extension of Chebfun to two dimensions // SIAM J. Sci. Comput., 2013. Vol. 35. Iss. 6. P. 495–518.

Поступила в редакцию 19.09.17

## $M/G/1$ QUEUE WITH STATE-DEPENDENT HETEROGENEOUS BATCH ARRIVALS, INVERSE SERVICE ORDER, AND PROBABILISTIC PRIORITY

R. V. Razumchik<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

<sup>2</sup>Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation

**Abstract:** Consideration is given to the stationary characteristics of single-server queues with the queue of infinite capacity, independent and identically-distributed service times, LCFS (last-come-first-served) service order, and probabilistic priority discipline. Most of the results for such type of queueing systems have been obtained under the assumption of either Poisson arrivals or phase-type arrivals. Another important assumption made was that the arrival process is independent from the system state. The author shows that the latter assumption can be relaxed to some, quite large extent. The author considers an  $M/G/1/\infty$  queue with batch Poisson arrival flow in which (i) the arrival rate depends on the total number of customers present in the system at the arrival instant; and (ii) the size of the arriving batch  $k$  and the remaining service times  $x_1, \dots, x_k$  of the customers in the batch have the arbitrary continuous joint probability distribution  $B_k(x_1, \dots, x_k)$ . The author obtains analytic expressions for the computation of the joint stationary distribution of the total number of customers in the system and their remaining service times. Busy period, waiting and sojourn time distributions are also given in terms of the Laplace–Stieltjes transforms.

**Keywords:** queueing system; LIFO; probabilistic priority; batch arrival; state-dependent Poisson flow

**DOI:** 10.14357/19922264170402

## Acknowledgments

This work was supported by the Russian Science Foundation (grant 16-11-10227).

## References

1. Nagonenko, V.A. 1981. O kharakteristikakh odnoy nestandartnoy sistemy massovogo obsluzhivaniya [On the characteristics of one nonstandard queueing system]. I, II. *Izv. AN SSSR. Tekhnich. kibernet* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Technical Cybernetics] 1:187–195; 3:91–99.
2. Pechinkin, A.V. 1983. Ob odnoy invariantnoy sisteme massovogo obsluzhivaniya [On an invariant queueing system]. *Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization* 14(3):433–444.
3. Milovanova, T.A., and A.V. Pechinkin. 2013. Statsionarnye kharakteristiki sistemy obsluzhivaniya s inversionnym poryadkom obsluzhivaniya, veroyatnostnym prioritetom i gistereznoy politikoy [Stationary characteristics of queueing system with an inversion procedure service probabilistic priority and hysteresis policy]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 7(1): 22–35.

4. Meykhanadzhyan, L. A., T. A. Milovanova, A. V. Pechinkin, and R. V. Razumchik. 2014. Statsionarnye veroyatnosti sostoyaniy v sisteme obsluzhivaniya s inversionnym poryadkom obsluzhivaniya i obobshchennym veroyatnostnym prioritetom [Stationary distribution in a queueing system with inverse service order and generalized probabilistic priority]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 8(3):16–26.
5. Meykhanadzhyan, L. A., T. A. Milovanova, and R. V. Razumchik. 2015. Vremya ozhidaniya v sisteme obsluzhivaniya s inversionnym poryadkom obsluzhivaniya i obobshchennym veroyatnostnym prioritetom [Stationary waiting time in a queueing system with inverse service order and generalized probabilistic priority]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(2):14–22.
6. Razumchik, R. 2017. On  $M/G/1$  queue with state-dependent heterogeneous batch arrivals, inverse service order and probabilistic priority. *AIP Conf. Proc.* 1863(1):090006-1–090006-3.
7. Milovanova, T. A. 2009. BMAP/ $G/1/\infty$  system with last come first served probabilistic priority. *Automat. Rem. Contr.* 70(5):885–896.
8. Bent, N. On a queueing model where potential customers are discouraged by queue length. *Scand. J. Stat.* 2(1):34–42.
9. Pechinkin, A. V. 1996. Sistema  $M_k/G/1$  s nenadezhnym priborom [An  $M_k/G/1$  system with an unreliable device]. *Avtomat. telemekh.* [Autom. Rem. Contr.] 9:100–110.
10. Gupta, U. C., and T. S. S. Srinivasa Rao. 1998. On the analysis of single server finite queue with state dependent arrival and service processes:  $M_n/G_n/1/K$ . *OR Spektrum* 20(2):83–89.
11. Kerner, Y. 2008. The conditional distribution of the residual service time in the  $M_n/G/1$  queue. *Stoch. Models* 24(3):364–375.
12. Abouee-Mehrizi, H., and O. Baron. 2016. State-dependent  $M/G/1$  queueing systems. *Queueing Sy.* 82(1-2):121–148.
13. Pospelov, V. V. 1978. O pogreshnosti priblizheniya funktsii dvukh peremennykh summami proizvedeniy funktsiy odnogo peremennogo [The error of approximation of a function of two variables by sums of the products of functions of one variable] *Zh. vichisl. matem. matem. fiz.* [USSR Comput. Math. Math. Phys.] 18(5):1307–1308.
14. Uschmajew, A. 2011. Regularity of tensor product approximations to square integrable functions. *Constr. Approx.* 34(3):371–391.
15. Townsend, A., and L. N. Trefethen. 2013. An extension of Chebfun to two dimensions. *SIAM J. Sci. Comput.* 35(6):495–518.

*Received September 19, 2017*

## Contributor

**Razumchik Rostislav V.** (b. 1984) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, leading scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; associate professor, Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; rrazumchik@ipiran.ru



# STATIONARY SOJOURN TIMES IN MAP/PH/1/ $r$ QUEUE WITH BI-LEVEL HYSTERETIC CONTROL OF ARRIVALS

R. V. Razumchik<sup>1,2</sup>

**Abstract:** This paper reports some new results concerning the analysis of the time-related stationary characteristics of a finite-capacity queueing system operating in a random environment with the bi-level hysteretic control of arrivals. The topic of the paper is motivated by the overload problem in networks of SIP (session initiation protocol) servers and the viewpoint that multilevel hysteretic control of arrivals in SIP servers can be used to mitigate signalling network congestion. The considered mathematical model of SIP server is the single server queueing system with Markovian arrival processes (MAP), PH (phase-type) service, and bi-level hysteretic control policy. According to this policy, a system may be in one of the three operation modes: normal, overload, or blocking. The switching between modes occurs at instants whenever the total number of customers in the system changes. The analytical method for the computation of the stationary sojourn times in different operation modes (in terms of Laplace–Stieltjes transforms (LST)), which utilizes the knowledge about the presence of hysteretic loops, is given. It is also applicable in the case when, in addition to the sojourn times, one needs to account for the number of lost customers.

**Keywords:** queueing system; random environment; first passage times; hysteretic control

**DOI:** 10.14357/19922264170403

## 1 Introduction

This paper continues the analysis of the stationary finite-capacity queueing system operating in a random environment with hysteretic control of arrivals, which was started in [1]. Specifically, we deal with the MAP/PH/1/ $r$  queue with two-level hysteretic control of arrival rates with nonoverlapping hysteretic loops. For this system, the authors of [1] proposed the new analytic method for the computation of the steady-state distribution, which is different from the known general approaches for QBDs (quasi-birth-deaths). It exploits the knowledge about the hysteretic loops which are present in the system, has a probabilistic interpretation and leads to easy-to-implement computational procedures. We will not dwell on the motivation behind the analysis of this system (for details, refer [1] and references therein) and just mention that the various aspects of the topic of hysteretic control in queueing models still gains attention from the research community (see [2–4]).

In order to make the picture clearer, let us assume that the control is only bi-level with nonoverlapping loops although all the results presented here (and in [1]) can be generalized in a straightforward manner for hysteretic control of arrivals with arbitrary number of nonoverlapping loops. Following the bi-level hysteretic control, the

system changes its status (or mode) between “normal,” “overload,” and “blocking” (this will be made more precise in the next section). In each mode except for a “normal” one, server discards a certain percentage of arriving customers. From a practical point of view (at least the one mentioned in [5]), it may be beneficial when the system spends as little time as possible in “overload”/“blocking” modes. This brings one to the analysis of time-related stationary characteristics of the system, which was not carried out in [1].

In what follows, we are interested in the two performance characteristics of the hysteretic policy. The first one is the stationary distribution of the time system spends in “normal” mode. The second one is the distribution of the time it takes the system to get back to “normal” mode<sup>3</sup>.

After giving the detailed system description in the next section, in section 3, the analytical method for the sequential computation of these (sojourn time) distributions will be presented in terms of LST. The LST of the sojourn times are obtained as solutions to certain matrix difference equations and are expressed in terms of recurrence relations. They can be used for direct numerical implementation and numerical inversion with well-known methods (Fourier-series method with Euler summation, Talbot, etc.).

<sup>1</sup>Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

<sup>2</sup>Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation

<sup>3</sup>Waiting and system sojourn time distributions are of little interest since hysteretic loops have no influence on them in case of FIFO service policy (which is assumed).

## 2 System Description and Preliminaries

The system consists of a single server and a queue of finite capacity  $r$ . The arrival process is a MAP with representation  $(\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1)$  of order  $N$ . Let us assume that an arrival, whenever it occurs, can be of one of the two types, either a priority arrival or a nonpriority. Thus, the matrix  $\mathbf{D}_1$  is assumed to have the form  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_{1,1} + \mathbf{D}_{1,2}$  where  $\mathbf{D}_{1,1}$  ( $\mathbf{D}_{1,2}$ ) describes state transitions with an arrival of priority (nonpriority) customer. Bi-level hysteretic control of arrivals is assumed to be implemented in the system. It operates as follows (see figure). There are three operation modes for the system: “normal,” “overload,” and “blocking.” Let  $L$  and  $H$  be arbitrary integers, such that  $0 < L < H < r + 1$ . Assume the system starts empty. As long as the total number of customers in the system remains below  $H$ , the system is considered to be in “normal” mode and accepts all arrivals (both priority and nonpriority). When the total number of customers reaches  $H$  for the first time, the system changes its mode to “overload” and stays in it as long as the total number of customers remains between  $L$  and  $r$ . When overloaded, the system accepts only priority customers (nonpriority customers are lost) till the total number of customers either drops down below  $L$  after which it changes its mode back to “normal,” or exceeds  $r$  after which it changes its state to “blocking.” In the “blocking” mode the system does not accept newly arriving customers until the total number of customers drops down below  $(H + 1)$ , after which the system changes mode back to “overload” and the process goes on. The service time of both priority and nonpriority customers is PH distributed with representation  $(\vec{f}, \mathbf{G})$  of order  $M$  and  $\vec{g} = -\mathbf{G}\vec{1}$ , and the service policy is FIFO (first in, first out).

The operation of the considered queueing system can be completely described by continuous-time Markov

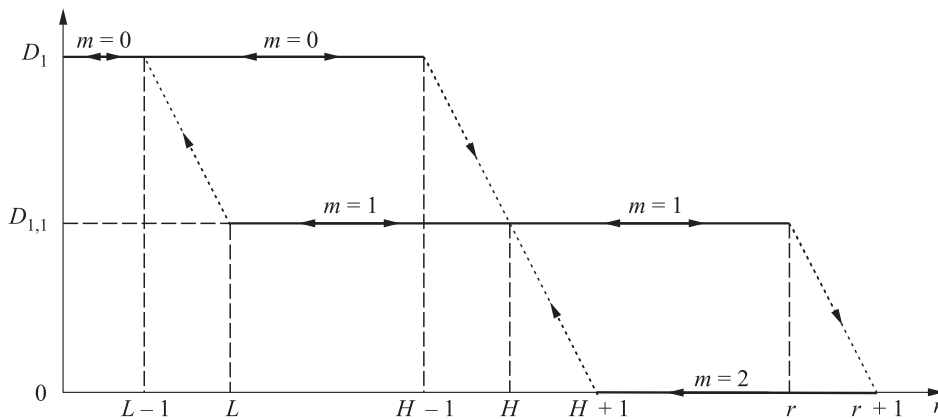
chain  $\mathbf{X}(t) = (\xi(t); \eta(t); \mu(t); \nu(t))$  with four components:  $\xi(t)$  — MAP generation phase at time  $t$ ;  $\eta(t)$  — PH service phase at time  $t$ ;  $\mu(t)$  — system’s mode at time  $t$ ; and  $\nu(t)$  — number of customers in the system at time  $t$ . When  $\nu(t) = 0$ , the second component  $\eta(t)$  is omitted. It is convenient to represent the state space of  $\mathbf{X}(t)$  as  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \cup \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$  where  $\mathcal{X}_0$  is the set of states of “normal” mode,  $\mathcal{X}_1$  is the set of states of “overload” mode, and  $\mathcal{X}_2$  is the set of states of “blocking” mode, i. e.,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_0 &= \{(k, 0, 0) : 1 \leq k \leq N\} \cup \\ &\quad \cup \{(k, 0, n) : 1 \leq k \leq NM, 1 \leq n \leq H - 1\}; \\ \mathcal{X}_1 &= \{(k, 1, n) : 1 \leq k \leq NM, L \leq n \leq r\}; \\ \mathcal{X}_2 &= \{(k, 2, n) : 1 \leq k \leq NM, H + 1 \leq n \leq r + 1\}. \end{aligned}$$

Here,  $k$  represents the state of the background (arrival and service) processes. Indeed, the state  $(k, m, n)$ ,  $n > 0$ , means that there are  $n$  customers in the system, system’s mode is  $m$ , and arrival and service phases are  $i$  and  $j$ , but such that  $(i - 1)M + j = k$ ; the state  $(k, 0, 0)$  means that the system is empty and the arrival phase is  $k$ .

Let us denote by  $\mathbf{E}$  the identity matrix (its size each time will be clear from the context) and let introduce the following transition rate matrices:

- service of a customer after which the system becomes empty:  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{E} \otimes \vec{g}$ ;
- service of a customer after which the system remains busy:  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^* = \mathbf{P}^\# = \mathbf{E} \otimes \vec{g}\vec{f}$ ;
- phase change when system is empty:  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{D}_0$ ;
- phase change when system is in the “normal” mode:  $\mathbf{Q} = \mathbf{D}_0 \otimes \mathbf{E} + \mathbf{E} \otimes \mathbf{G}$ ;
- phase change when system is in the “overload” mode:  $\mathbf{Q}^* = (\mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_{12}) \otimes \mathbf{E} + \mathbf{E} \otimes \mathbf{G}$ ;
- arrival phase change when system is in the “blocking” mode:  $\mathbf{Q}^\# = (\mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1) \otimes \mathbf{E} + \mathbf{E} \otimes \mathbf{G}$ ;



Sketch of the bi-level hysteretic control of arrivals in the MAP/PH/1/r system

- arrival of a customer to an empty system:  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{D}_1 \otimes \bar{\mathbf{f}}$ ,
- arrival of a customer to the system in the “normal” mode:  $\mathbf{R} = \mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{E}$ ; and
- arrival of a customer to the system in the “overload” mode:  $\mathbf{R}^* = \mathbf{D}_{11} \otimes \mathbf{E}$ .

In order to be able to compute time-related characteristics, in addition to transition rate matrices, one needs transition probability matrices, which contain probabilities of possible state change of the background process. Thus, let  $\alpha$ ,  $\beta$ , and  $\gamma$  denote the matrices of service, phase change, and arrival transition probabilities when the system is in the “normal” mode, i. e.,

$$\begin{aligned} [\alpha]_{ij} &= \frac{[\mathbf{P}]_{ij}}{-[\mathbf{Q}]_{ii}}, & 1 \leq i, j \leq NM; \\ [\beta]_{ij} &= \begin{cases} \frac{[\mathbf{Q}]_{ij}}{-[\mathbf{Q}]_{ii}}, & i \neq j; \\ 0, & i = j, \end{cases} & 1 \leq i, j \leq NM; \\ [\gamma]_{ij} &= \frac{[\mathbf{R}]_{ij}}{-[\mathbf{Q}]_{ii}}, & 1 \leq i, j \leq NM. \end{aligned}$$

Here and henceforth, by  $[\cdot]_{ij}$  we denote the  $(i, j)$ th entry of any matrix. By analogy, let us denote by  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ , and  $\gamma^*$  transition probabilities matrices in the “overload” mode, by  $\alpha^\#$  and  $\beta^\#$  transition probability matrices in the “blocking” mode, and by  $\alpha^e$ ,  $\beta^e$ , and  $\gamma^e$  transition probability matrices when the system becomes or is empty.

### 3 Sojourn Time Distributions

As it was mentioned in section 1, we are interested in the two stationary characteristics: distribution of the time system spends in “normal” mode and the distribution of the time it takes the system to get back to “normal” mode. These distributions are computed by conditioning on the number of customers in the system and the state of the background process and can be expressed in terms of the following three quantities:

- $\mathbf{V}_n(s)$ ,  $n = \overline{0, H-1}$ , — matrix of size  $NM \times NM$ , which the  $(i, j)$ th entry is the LST of the first passage time to the “overload” mode and state of the background process  $j$ , given that initially, the system was in the “normal” mode, there where  $n$  customers in it, and the state of the background process was  $i$ ;
- $\mathbf{V}_n^\#(s)$ ,  $n = \overline{H+1, R}$ , — matrix of size  $NM \times NM$ , which the  $(i, j)$ th entry is the LST of the first passage time to the “normal” mode and state of the background process  $j$ , given that initially, the system was in the “blocking” mode, there where  $n$  customers in it, and the state of the background process was  $i$ ; and

$\mathbf{V}_n^*(s)$ ,  $n = \overline{L, R-1}$ , — matrix of size  $NM \times NM$ , which the  $(i, j)$ th entry is the LST of the first passage time to the “normal” mode and state of the background process  $j$ , given that initially, the system was in the “overload” mode, there where  $n$  customers in it, and the state of the background process was  $i$ .

The rest of the section is devoted to obtaining the relations for  $\mathbf{V}_n(s)$ ,  $\mathbf{V}_n^*(s)$ , and  $\mathbf{V}_n^\#(s)$ . Let us begin with the calculation of  $\mathbf{V}_n(s)$ ,  $n = \overline{1, H-1}$ . Denote by  $\mathbf{T}_k(s)$ ,  $k = -1, 0, 1$ , the matrix of size  $NM \times NM$  which the  $(i, j)$ th entry is LST of the first passage time from the state  $(i, 0, n)$  to the state  $(j, 0, n-k)$ . Here,  $n$  may take any value from the set  $\{2, 3, \dots, H-2\}$ . Remembering that the sojourn time in the state  $(i, 0, n)$  is exponential with rate  $-[\mathbf{Q}]_{ii}$ , one has for  $1 \leq i, j \leq NM$ :

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_{-1}(s)]_{ij} &= \frac{[\mathbf{Q}]_{ii}}{[\mathbf{Q}]_{ii} - s} [\gamma]_{ij}; \\ [\mathbf{T}_0(s)]_{ij} &= \frac{[\mathbf{Q}]_{ii}}{[\mathbf{Q}]_{ii} - s} [\beta]_{ij}; \\ [\mathbf{T}_1(s)]_{ij} &= \frac{[\mathbf{Q}]_{ii}}{[\mathbf{Q}]_{ii} - s} [\alpha]_{ij}. \end{aligned}$$

From the first-step analysis, let us find that the LST  $\mathbf{V}_n(s)$  satisfies the system of matrix difference equations:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_n(s) &= \mathbf{T}_1(s)\mathbf{V}_{n-1}(s) + \mathbf{T}_0(s)\mathbf{V}_n(s) \\ &\quad + \mathbf{T}_{-1}(s)\mathbf{V}_{n+1}(s), \quad n = \overline{2, H-1}; \\ \mathbf{V}_1(s) &= \mathbf{T}_1^e(s)\mathbf{V}_0(s) + \mathbf{T}_0(s)\mathbf{V}_1(s) \\ &\quad + \mathbf{T}_{-1}(s)\mathbf{V}_2(s). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

The boundary conditions for the system (1) have the form:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_0(s) &= \mathbf{T}_0^e(s)\mathbf{V}_0(s) + \mathbf{T}_{-1}^e(s)\mathbf{V}_1(s); \\ \mathbf{V}_H(s) &= \mathbf{E}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

where the  $(i, j)$ th entries of the matrices  $\mathbf{T}_1^e(s)$ ,  $\mathbf{T}_0^e(s)$ , and  $\mathbf{T}_{-1}^e(s)$  are equal to

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_1^e(s)]_{ij} &= \frac{[\mathbf{Q}]_{ii}}{[\mathbf{Q}]_{ii} - s} [\alpha^e]_{ij}; \\ [\mathbf{T}_0^e(s)]_{i,j} &= \frac{[\mathbf{Q}_0]_{ii}}{[\mathbf{Q}_0]_{ii} - s} [\beta^e]_{ij}; \\ [\mathbf{T}_{-1}^e(s)]_{i,j} &= \frac{[\mathbf{Q}_0]_{ii}}{[\mathbf{Q}_0]_{ii} - s} [\gamma^e]_{ij}. \end{aligned}$$

Note that here,  $\mathbf{T}_0^e(s)$  is the square matrix of size  $N$  and  $\mathbf{T}_1^e(s)$  and  $\mathbf{T}_{-1}^e(s)$  are the rectangular matrices of size  $NM \times N$  and  $N \times NM$ , correspondingly. The solution of the system (1)–(2) can be written as

$$\mathbf{V}_n(s) = \mathbf{X}_n(s)\mathbf{V}_{n-1}(s) + \mathbf{Y}_n(s), \quad n = \overline{1, H-1},$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{H-1}(s) &= (\mathbf{E} - \mathbf{T}_0(s))\mathbf{T}_1(s); \\ \mathbf{Y}_{H-1}(s) &= (\mathbf{E} - \mathbf{T}_0(s))\mathbf{T}_{-1}(s); \\ \mathbf{X}_1(s) &= (\mathbf{E} - \mathbf{T}_0(s) - \mathbf{T}_{-1}(s)\mathbf{X}_2(s))^{-1}\mathbf{T}_1^e(s); \\ \mathbf{X}_n(s) &= (\mathbf{E} - \mathbf{T}_0(s) - \mathbf{T}_{-1}(s)\mathbf{X}_{n+1}(s))^{-1}\mathbf{T}_1(s), \\ & \quad n = \overline{2, H-2}; \\ \mathbf{Y}_n(s) &= (\mathbf{E} - \mathbf{T}_0(s) \\ & \quad - \mathbf{T}_{-1}(s)\mathbf{X}_{n+1}(s))^{-1}\mathbf{T}_{-1}(s)\mathbf{Y}_{n+1}(s), \\ & \quad n = \overline{1, H-2}; \\ \mathbf{V}_0(s) &= (\mathbf{E} - \mathbf{T}_0^e(s) - \mathbf{T}_{-1}^e(s)\mathbf{X}_1(s))^{-1}\mathbf{T}_{-1}^e(s)\mathbf{Y}_1(s). \end{aligned}$$

If the inverse of the matrix  $\mathbf{T}_{-1}(s)$  exists, then it is possible to write out the solution of the system (1)–(2) using the Kronecker expansion technique (see [6–8]), which is based on the identity  $\text{vec}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{E} \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{B})$ . In this identity,  $\text{vec}$  denotes the column stacking vector operator which transforms a matrix of size  $n \times m$  into a vector of size  $nm \times 1$ . We are going to utilize the property of the  $\text{vec}$  operator that  $\text{vec}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$  for matrix  $\mathbf{A}$  of size  $n \times 1$ . Firstly by applying  $\text{vec}$  operator to (1)–(2), we get the new system of vector-matrix difference equations:

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathbf{V}_{H-1}(s)) &= \mathbf{X}^*(s)\text{vec}(\mathbf{V}_{H-2}(s)) + \text{vec}(\mathbf{Y}^*(s)); \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathbf{V}_{n+1}(s)) &= \mathbf{X}(s)\text{vec}(\mathbf{V}_n(s)) \\ & \quad + \mathbf{Y}(s)\text{vec}(\mathbf{V}_{n-1}(s)), \quad n = \overline{2, H-2}; \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathbf{V}_2(s)) &= \mathbf{X}(s)\text{vec}(\mathbf{V}_1(s)) + \mathbf{Y}^e(s)\text{vec}(\mathbf{V}_0(s)); \quad (5) \end{aligned}$$

$$\text{vec}(\mathbf{V}_1(s)) = \mathbf{X}^e(s)\text{vec}(\mathbf{V}_0(s)) \quad (6)$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) &= \mathbf{E} \otimes (\mathbf{T}_{-1}(s))^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{T}_0(s)); \\ \mathbf{Y}(s) &= -(\mathbf{E} \otimes (\mathbf{T}_{-1}(s))^{-1}\mathbf{T}_1(s)); \\ \mathbf{X}^e(s) &= \mathbf{E} \otimes (\mathbf{T}_{-1}^e(s))^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{T}_0^e(s)); \\ \mathbf{Y}^e(s) &= -(\mathbf{E} \otimes (\mathbf{T}_{-1}^e(s))^{-1}\mathbf{T}_1^e(s)); \\ \mathbf{X}^*(s) &= \mathbf{E} \otimes (\mathbf{E} - \mathbf{T}_0(s))^{-1}\mathbf{T}_1(s); \\ \mathbf{Y}^*(s) &= (\mathbf{E} - \mathbf{T}_0(s))^{-1}\mathbf{T}_{-1}(s). \end{aligned}$$

Secondly, notice that the new system (3)–(6) consists of pairs of simultaneous equations and thus, its solution can be rewritten as

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \text{vec}(\mathbf{V}_n(s)) \\ \text{vec}(\mathbf{V}_{n-1}(s)) \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} \mathbf{X}(s) & \mathbf{Y}(s) \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X}(s) & \mathbf{Y}^e(s) \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{vec}(\mathbf{V}_1(s)) \\ \text{vec}(\mathbf{V}_0(s)) \end{pmatrix}, \\ & \quad n = \overline{2, H-1}. \quad (7) \end{aligned}$$

Finally, (7) for  $n = H - 1$ , (6) and (3) make up the system of four matrix equations, which solution yields the values of  $\text{vec}(\mathbf{V}_{H-1}(s))$ ,  $\text{vec}(\mathbf{V}_{H-2}(s))$ ,  $\text{vec}(\mathbf{V}_1(s))$ , and  $\text{vec}(\mathbf{V}_0(s))$ . By virtue of (4) and (5), the rest of  $\mathbf{V}_n(s)$  can be computed.

Now, let us proceed to the derivation of the equations for  $\mathbf{V}_n^*(s)$ ,  $n = \overline{L, r}$ , and  $\mathbf{V}_n^\#(s)$ ,  $n = \overline{H+1, r+1}$ . In order to do this, let us introduce the following auxiliary square matrices (each of size  $NM$ ):

$\mathbf{T}^\#(s)$  — matrix with the  $(i, j)$ th entry equal to the LST of the first passage time (of the Markov chain  $\mathbf{X}(t)$ ) from the state  $(i, 2, r+1)$  to the state  $(j, 2, r)$ ;

$\mathbf{W}_n^\#(s)$ ,  $n = \overline{H+1, r+1}$ , — matrix with the  $(i, j)$ th entry equal to the LST of the first passage time from the state  $(i, 2, n)$  to the state  $(j, 1, H)$ ;

$\mathbf{w}_n^*(s)$ ,  $n = \overline{H+1, r}$ , — matrix with the  $(i, j)$ th entry equal to the LST of the first passage time from the state  $(i, 1, n)$  to the state  $(j, 1, H)$  without visiting the states  $(\cdot, 2, r+1)$ ;

$\overline{\mathbf{w}}_n^*$ ,  $n = \overline{H+1, r}$ , — matrix with the  $(i, j)$ th entry equal to the LST of the first passage time from the state  $(i, 1, n)$  to the state  $(j, 2, r+1)$  without visiting the states  $(\cdot, 1, H)$ ; and

$\mathbf{W}_n^*(s)$ ,  $n = \overline{H+1, r}$ , — matrix with the  $(i, j)$ th entry equal to the LST of the first passage time from the state  $(i, 1, n)$  to the state  $(j, 1, H)$ .

Let us begin with the relation for  $\mathbf{T}^\#(s)$ . Let  $\mathbf{T}_k^\#(s)$ ,  $k = 0, 1$ , denote the square matrix of size  $NM$  with the  $(i, j)$ th entry equal to the LST of the first passage time from the state  $(i, 2, r+1)$  to the state  $(j, 2, r+k)$ . Since the sojourn time in the state  $(i, 2, r+1)$  is distributed exponentially with the rate  $-[\mathbf{Q}^\#]_{ii}$ , one has for  $1 \leq i, j \leq NM$ :

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_0^\#(s)]_{ij} &= \frac{[\mathbf{Q}^\#]_{ii}}{[\mathbf{Q}^\#]_{ii} - s} [\beta^\#]_{ij}; \\ [\mathbf{T}_1^\#(s)]_{ij} &= \frac{[\mathbf{Q}^\#]_{ii}}{[\mathbf{Q}^\#]_{ii} - s} [\alpha^\#]_{ij}. \end{aligned}$$

The first-step analysis yields the following equation for  $\mathbf{T}^\#(s)$ :

$$\mathbf{T}^\#(s) = \mathbf{T}_1^\#(s) + \mathbf{T}_0^\#(s)\mathbf{T}^\#(s),$$

which solution is

$$\mathbf{T}^\#(s) = (\mathbf{E} - \mathbf{T}_0^\#(s))^{-1}\mathbf{T}_1^\#(s).$$

Since in the “blocking” mode any arrival is lost, then the sojourn time in it is equal to the time needed for  $(n - H)$  service completions, given that initially, there were  $n$  customers in the system, i. e.,

$$\mathbf{W}_n^\#(s) = (\mathbf{T}^\#(s))^{n-H}, \quad n = \overline{H+1, r+1}.$$

Equations for  $\mathbf{w}_n^*(s)$  and  $\overline{\mathbf{w}}_n^*(s)$  can be derived by following the same arguments given above for  $\mathbf{V}_n(s)$ . Denote by  $\mathbf{T}_k^*(s)$ ,  $k = -1, 0, 1$ , the square matrix of size  $NM$  with the  $(i, j)$ th entry equal to the LST of the first passage time from the state  $(i, 1, n)$  to the state  $(j, 1, n - k)$ . Then, using the fact that the sojourn time in the state  $(i, 1, n)$  is distributed exponentially with the rate  $-[\mathbf{Q}^*]_{ii}$ , one obtains for  $1 \leq i, j \leq NM$ :

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_{-1}^*(s)]_{ij} &= \frac{[\mathbf{Q}^*]_{ii}}{[\mathbf{Q}^*]_{ii} - s} [\gamma^*]_{ij}; \\ [\mathbf{T}_0^*(s)]_{ij} &= \frac{[\mathbf{Q}^*]_{ii}}{[\mathbf{Q}^*]_{ii} - s} [\beta^*]_{ij}; \\ [\mathbf{T}_1^*(s)]_{ij} &= \frac{[\mathbf{Q}^*]_{ii}}{[\mathbf{Q}^*]_{ii} - s} [\alpha^*]_{ij}. \end{aligned}$$

Again, by applying the first-step analysis, one gets the following system of matrix difference equations for  $\mathbf{w}_n^*(s)$ ,  $n = \overline{H+1, r}$ :

$$\mathbf{w}_n^*(s) = \mathbf{T}_1^*(s)\mathbf{w}_{n-1}^*(s) + \mathbf{T}_0^*(s)\mathbf{w}_n^*(s) + \mathbf{T}_{-1}^*(s)\mathbf{w}_{n+1}^*(s), \quad (8)$$

with the boundary conditions

$$\mathbf{w}_H^*(s) = \mathbf{E}; \quad \mathbf{w}_{r+1}^*(s) = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Clearly, the matrices  $\overline{\mathbf{w}}_n^*(s)$ ,  $n = \overline{H+1, r}$ , satisfy the system of equations, which is identical to (8), i. e.,

$$\overline{\mathbf{w}}_n^*(s) = \mathbf{T}_1^*(s)\overline{\mathbf{w}}_{n-1}^*(s) + \mathbf{T}_0^*(s)\overline{\mathbf{w}}_n^*(s) + \mathbf{T}_{-1}^*(s)\overline{\mathbf{w}}_{n+1}^*(s), \quad (10)$$

but with the “reversed” boundary conditions:

$$\overline{\mathbf{w}}_H^*(s) = \mathbf{0}; \quad \overline{\mathbf{w}}_{r+1}^*(s) = \mathbf{E}. \quad (11)$$

The structure of the systems (8), (9) and (10), (11) is similar to the (1)–(2) (except for the boundary conditions). Thus, its solutions can be found completely in the same way and, therefore, are omitted. Once  $\mathbf{w}_n^*(s)$  and  $\overline{\mathbf{w}}_n^*(s)$  are found, the matrices  $\mathbf{W}_n^*(s)$  can be computed. Noticing that from the state  $(i, 1, n)$ ,  $n = \overline{H+1, r}$ , the Markov chain can enter the state  $(j, H, 1)$  either from the set of “overload” states or from the set of “blocking” states (see figure), one has:

$$\mathbf{W}_n^*(s) = \mathbf{w}_n^*(s) + \overline{\mathbf{w}}_n^*(s)\mathbf{W}_{r+1}^\#(s), \quad n = \overline{H+1, r}.$$

Now, everything is prepared for the derivation of the relations for the unknown quantities  $\mathbf{V}_n^*(s)$  and  $\mathbf{V}_n^\#(s)$ . If  $n = \overline{L, H}$ , then  $\mathbf{V}_n^*(s)$  satisfy the following system of matrix difference equations:

$$\mathbf{V}_n^*(s) = \mathbf{T}_1^*(s)\mathbf{V}_{n-1}^*(s) + \mathbf{T}_0^*(s)\mathbf{V}_n^*(s) + \mathbf{T}_{-1}^*(s)\mathbf{V}_{n+1}^*(s), \quad (12)$$

with the boundary conditions

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{L-1}^*(s) &= \mathbf{E}; \\ \mathbf{V}_H^*(s) &= \mathbf{T}_1^*(s)\mathbf{V}_{H-1}^*(s) \\ &\quad + \mathbf{T}_0^*(s)\mathbf{V}_H^*(s) + \mathbf{T}_{-1}^*(s)\mathbf{W}_{H+1}^*(s)\mathbf{V}_H^*(s). \end{aligned}$$

The final expressions for the matrices  $\mathbf{V}_n^*(s)$ ,  $n = \overline{H+1, r}$  and  $\mathbf{V}_n^\#(s)$ ,  $n = \overline{H+1, r+1}$ , have the form:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_n^\#(s) &= \mathbf{W}_n^\#(s)\mathbf{V}_H^*(s), \quad n = \overline{H+1, r+1}; \\ \mathbf{V}_n^*(s) &= \mathbf{W}_n^*(s)\mathbf{V}_H^*(s), \quad n = \overline{H+1, r}. \end{aligned}$$

The last two relations, together with (1) and (12), give the complete solution of the considered problem. The matrices  $\mathbf{V}_n(s)$ ,  $\mathbf{V}_n^*(s)$ , and  $\mathbf{V}_n^\#(s)$  allow one to calculate various performance characteristics of the hysteretic policy such as (conditional)<sup>1</sup> mean duration of overload period (equal to  $-[\mathbf{V}_H^*(s)]'_{s=0}$ ), (conditional) mean return time to the “overload” mode (equal to  $-[\mathbf{V}_{L-1}(s)]'_{s=0} - [\mathbf{V}_H^*(s)]'_{s=0}$ ), higher moments, etc.

No principal difficulties show up if in addition to the sojourn times one needs to count the number of lost customers. The same argumentation applies. For example, let us assume that customers arrived during the period of time when the system is in the “blocking” mode are considered as lost. Then, the LST and the generating function  $\mathbf{W}_n^\#(s, z)$  of the joint stationary distribution of the sojourn time in the “blocking” mode and the number of lost customers provided that the system is in the “blocking” mode and there are  $n$  customers in it is equal to

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_n^\#(s, z) &= \left\{ [\mathbf{E} - z(\mathbf{E} - \mathbf{T}_0^*(s))^{-1}\mathbf{T}_{-1}^*(s)]^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times (\mathbf{E} - \mathbf{T}_0^*(s))^{-1}\mathbf{T}_1^*(s) \right\}^{H+1-n} \times \\ &\quad \times \left\{ \mathbf{E} + z \left[ \mathbf{E} - z(\mathbf{E} - \mathbf{T}_0^*(s))^{-1}\mathbf{T}_{-1}^*(s) \right]^{-1} \right\} \\ &\quad \times (\mathbf{E} - \mathbf{T}_0^*(s))^{-1}\mathbf{T}_1^*(s). \end{aligned}$$

Thus, the substitution of  $\mathbf{W}_n^\#(s, z)$  instead of  $\mathbf{W}_n^\#(s)$  in the above expressions will account not only for the sojourn time but for losses (during the sojourn time).

<sup>1</sup>The corresponding unconditional characteristics are obtained by weighting according to the joint stationary distribution found in [1].



## 4 Concluding Remarks

The approach proposed in the paper allows one to calculate the system's sojourn time in various modes in terms of LST by exploiting the knowledge about the presence of hysteretic loops. Minor changes are needed to adapt it to the case of overlapping loops. Of course, due to MAP arrivals and PH service times, it utilizes matrix analytic techniques and, thus, possesses the disadvantages inherent to matrix algebra. Despite the fact there is large body of research results available in this topic, there is still a number of open questions. Is there any analytic approach to find the steady-state behavior of several interconnected systems each with hysteretic policy, which exploits the knowledge of the presence of hysteretic loops? What is the gain of hysteretic control of arrivals with respect to other types of control? Just to name a few.

## Acknowledgments

This work was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 16-11-10227).

## References

1. Razumchik, R. 2016. Analysis of finite MAP/PH/1 queue with hysteretic control of arrivals. *Congress (International) on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops Proceedings*. Lisbon. 288–293.
2. Chesoong, K., A. Dudin, S. Dudin, and O. Dudina. 2016. Hysteresis control by the number of active servers in queueing system MMAP/PH/ $N$  with priority service. *Perform. Evaluation* 101:20–33.
3. Chan, C. W., M. Armony, and N. Bambos. 2016. Maximum weight matching with hysteresis in overloaded queues with setups. *Queueing Sy.* 82(3-4):315–351.
4. Rumyantsev, A. S., K. A. Kalinina, and T. E. Morozova. 2017. Stokhasticheskioe modelirovanie vycheslitel'nogo klastera s gisterezisnym upravleniem skorost'yu obsluzhivaniya [Stochastic modeling of a high-performance cluster with hysteretic control of service rate]. *Trudy Karelskogo nauchnogo tsentra RAN [Transactions of KarRC RAS]* 8:76–85.
5. Abaev, P., Y. Gaidamaka, K. Samouylov, A. Pechinkin, R. Razumchik, and S. Shorgin. 2014. Hysteretic control technique for overload problem solution in network of SIP servers. *Comput. Inform.* 33(1):1–18.
6. Graham, A. 1982. *Kronecker products and matrix calculus: With applications*. New York, NY: John Wiley & Sons. 130 p.
7. Steeb, W. H., and Y. Hardy. 2011. *Matrix calculus and Kronecker product: A practical approach to linear and multilinear algebra*. 2nd ed. River Edge, NJ: World Scientific. 324 p.
8. Razumchik, R., and M. Telek. 2016. Delay analysis of a queue with re-sequencing buffer and Markov environment. *Queueing Sy.* 82(1-2):7–28.

Received September 19, 2017

## Contributor

**Razumchik Rostislav V.** (b. 1984) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, leading scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; associate professor, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; rrazumchik@ipiran.ru

## СТАЦИОНАРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ СО ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЯ В СОСТОЯНИИ ПЕРЕГРУЗКИ СИСТЕМЫ MАР/PH/1/r С ГИСТЕРЕЗИСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ НАГРУЗКОЙ\*

Р. В. Разумчик

Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление»  
Российской академии наук; Российский университет дружбы народов, rrazumchik@ipiran.ru

**Аннотация:** Как известно, одним из решений проблемы перегрузок в сетях SIP (session initiation protocol) сигнализации является применение в узлах сети (SIP-серверах) многоуровневого гистерезисного управления нагрузкой. В данной работе представлены некоторые новые результаты анализа системы MАР/PH/1/r конечной емкости с двумя петлями гистерезисного управления, функционирующей в случайной среде и являющейся моделью SIP-сервера с двухуровневым гистерезисным управлением нагрузкой. Получен метод вычисления преобразования Лапласа–Стилтьеса функций распределения времени возврата системы из множества состояний перегрузки в множество состояний нормальной нагрузки и времени выхода системы из множества состояний нормальной нагрузки. Метод основан на решении матричных рекуррентных уравнений и применим в случае, когда помимо расчета времени выхода из состояния перегрузки необходимо также учитывать и число потерянных за это время заявок.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания; случайная среда; гистерезисное управление; время пребывания

**DOI:** 10.14357/19922264170403

### Литература

1. Razumchik R. Analysis of finite MАР/PH/1 queue with hysteretic control of arrivals // Congress (International) on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops Proceedings. — Lisbon, 2016. P. 288–293.
2. Chesong K., Dudin A., Dudin S., Dudina O. Hysteresis control by the number of active servers in queueing system MMAP/PH/N with priority service // Perform. Evaluation, 2016. Vol. 101. P. 20–33.
3. Chan C. W., Armony M., Bambos N. Maximum weight matching with hysteresis in overloaded queues with setups // Queueing Sy., 2016. Vol. 82. No. 3–4. P. 315–351.
4. Румянцев А. С., Калинина К. А., Морозова Т. Е. Стохастическое моделирование вычислительного кластера с гистерезисным управлением скоростью обслуживания // Труды Карельского научного центра РАН, 2017. Вып. 8. С. 76–85.
5. Abaev P., Gaidamaka Y., Samouylov K., Pechinkin A., Razumchik R., Shorgin S. Hysteretic control technique for overload problem solution in network of SIP servers // Comput. Inform., 2014. Vol. 33. No. 1. P. 1–18.
6. Graham A. Kronecker products and matrix calculus: With applications. — New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 1982. 130 p.
7. Steeb W. H., Hardy Y. Matrix calculus and Kronecker product: A practical approach to linear and multilinear algebra. — 2nd ed. — River Edge, NJ, USA: World Scientific, 2011. 324 p.
8. Razumchik R., Telek M. Delay analysis of a queue with resequencing buffer and Markov environment // Queueing Sy., 2016. Vol. 82. No. 1–2. P. 7–28.

Поступила в редакцию 19.09.2017

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-11-10227).

# НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА И СВЯЗАННЫХ С НИМ ПРОЦЕССОВ\*

В. Ю. Королев<sup>1</sup>

**Аннотация:** Данная статья содержит обзор некоторых свойств распределения Миттаг-Леффлера. Основное внимание уделено возможности представления этого распределения в виде смешанного показательного закона. Также обсуждается возможность представления распределения Миттаг-Леффлера в виде масштабных смесей полунормальных или равномерных распределений. Обсуждается возможность использования распределения Миттаг-Леффлера в качестве асимптотической аппроксимации для распределений некоторых статистик, построенных по выборкам случайного объема. Описан новый двухэтапный сеточный метод оценивания параметра распределения Миттаг-Леффлера, использующий представление этого распределения в виде смешанного показательного закона. Рассмотрены два возможных способа распространения понятия распределения Миттаг-Леффлера на случайные процессы пуассоновского типа. Первый из этих способов приводит к специальному смешанному пуассоновскому процессу, другой способ ведет к специальному процессу восстановления — дважды стохастическому пуассоновскому процессу (процессу Кокса). В предельных теоремах для случайно остановленных случайных блужданий в обоих этих случаях в качестве предельных конечномерных распределений возникают дробно-устойчивые распределения, представимые в виде масштабных смесей нормальных законов с разными смешивающими распределениями.

**Ключевые слова:** распределение Миттаг-Леффлера; распределение Линника; устойчивое распределение; распределение Вейбулла; показательное распределение; смешанный пуассоновский процесс; процесс восстановления; асимптотическая аппроксимация

DOI: 10.14357/19922264170404

## 1 Введение

Данная статья содержит обзор некоторых свойств распределения Миттаг-Леффлера. Это распределение часто применяется как «тяжелохвостая» модель статистических закономерностей, наблюдаемых во многих физических явлениях, описываемых в терминах редящих процессов восстановления, в частности аномальной диффузии и релаксации [1–3], а также в астрофизике [4], экономике и финансовой математике [5, 6].

Основное внимание уделено возможности представления распределения Миттаг-Леффлера в виде смешанного показательного закона. Это представление позволяет существенно облегчить исследование аналитических свойств распределения Миттаг-Леффлера, в частности заметно упрощает вычисление его моментов.

Также будет показано, что распределение Миттаг-Леффлера может быть представлено в виде масштабных смесей полунормальных или равномер-

ных распределений. Разнообразие таких представлений помогает выбрать подходящие «основное» и априорное распределения при использовании распределения Миттаг-Леффлера в качестве байесовской модели.

Обычно в вероятностных источниках распределение Миттаг-Леффлера упоминается в качестве примера геометрически устойчивого закона, т.е. предельного для геометрических случайных сумм независимых одинаково распределенных (о.р.) слагаемых с бесконечной дисперсией. Однако схема геометрического суммирования является далеко не единственной предельной схемой, в которой распределение Миттаг-Леффлера может быть предельным.

Как правило, распределение Миттаг-Леффлера рассматривается «в тандеме» с распределением Линника, поскольку вид характеристической функции (х.ф.) последнего формально аналогичен виду преобразования Лапласа–Стилтьеса (п. Л.–С.) распределения Миттаг-Леффлера. На самом деле связь

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 17-07-00717).

<sup>1</sup> Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова; Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; Университет Дианьзи города Ханчжоу, Китай, vkorolev@cs.msu.ru

этих двух законов оказывается очень глубокой. Ниже будут приведены некоторые результаты, связывающие эти распределения между собой, а также с устойчивыми законами. В частности, недавно показано, что распределение Миттаг-Леффлера играет роль смешивающего закона в представлении распределения Линника в виде масштабной смеси нормальных законов. Такое представление позволило доказать аналог центральной предельной теоремы для сумм случайного числа независимых случайных величин (с.в.) с конечными дисперсиями, в котором предельным является распределение Линника [7]. При этом сходимость распределений нормированных индексов к распределению Миттаг-Леффлера является *необходимым и достаточным условием* сходимости распределений упомянутых случайных сумм к распределению Линника.

В данной статье обсуждается возможность использования распределения Миттаг-Леффлера в качестве асимптотической аппроксимации для распределений некоторых статистик, построенных по выборкам случайного объема, в частности экстремальных порядковых статистик, максимальных случайных сумм независимых с.в. с *конечными дисперсиями*, удовлетворяющих условию Линдеберга, и абсолютных величин таких сумм.

В связи с тем, что плотность распределения Миттаг-Леффлера не допускает явного представления в терминах элементарных функций, метод максимального правдоподобия оказывается мало пригодным для статистического оценивания параметра распределения Миттаг-Леффлера. С этой целью в некоторых работах предлагается использовать специальные модификации метода моментов. В данной работе будет описан альтернативный двухэтапный сеточный метод, использующий представление распределения Миттаг-Леффлера в виде смешанного показательного закона.

Ниже также будут рассмотрены два возможных способа распространения понятия распределения Миттаг-Леффлера на случайные процессы пуассоновского типа. Первый из этих способов приводит к специальному смешанному пуассоновскому процессу (со скалярным случайным преобразованием времени), другой способ ведет к специальному процессу восстановления — дважды стохастическому пуассоновскому процессу (процессу Кокса). В предельных теоремах для случайно остановленных случайных блужданий в обоих этих случаях в качестве предельных возникают подчиненные винеровские процессы с разными субординаторами. В обоих случаях конечномерные распределения оказываются дробно-устойчивыми [8], но с разными параметрами.

## 2 Распределения Миттаг-Леффлера и Линника

### 2.1 Распределение Миттаг-Леффлера

Распределение Миттаг-Леффлера — это распределение неотрицательной с.в.  $M_\nu$ , соответствующее п. Л.–С.:

$$\psi_\nu(s) \equiv \mathbb{E}e^{-sM_\nu} = \frac{1}{1 + \lambda s^\nu}, \quad s \geq 0, \quad (1)$$

где  $\lambda > 0$ ,  $0 < \nu \leq 1$ . Для краткости ниже будет рассматриваться стандартный случай  $\lambda = 1$ .

Происхождение термина *распределение Миттаг-Леффлера* связано с тем, что плотность распределения, соответствующая п. Л.–С. (1), имеет вид:

$$f_\nu^M(x) = \frac{1}{x^{1-\nu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{\nu n}}{\Gamma(\nu n + 1)} = -\frac{d}{dx} E_\nu(-x^\nu), \quad x \geq 0, \quad (2)$$

где  $E_\nu(z)$  — функция Миттаг-Леффлера индекса  $\nu$ , определяемая как степенной ряд

$$E_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\nu n + 1)}, \quad \nu > 0, \quad z \in \mathbb{Z}.$$

Здесь  $\Gamma(s)$  — эйлерова гамма-функция,  $\Gamma(s) = \int_0^\infty z^{s-1} e^{-z} dz$ ,  $s > 0$ . Функция распределения (ф.р.), соответствующая плотности (2), будет обозначаться  $F_\nu^M(x)$ .

При  $\nu = 1$  распределение Миттаг-Леффлера превращается в стандартное показательное распределение, т.е.  $F_1^M(x) = [1 - e^{-x}] \mathbf{1}(x \geq 0)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (здесь и далее символ  $\mathbf{1}(C)$  обозначает индикатор множества  $C$ ). Но при  $0 < \nu < 1$  плотность распределения Миттаг-Леффлера имеет тяжелый хвост, убывающий степенным образом:

$$f_\nu^M(x) \sim \frac{\sin(\nu\pi)\Gamma(\nu + 1)}{\pi x^{\nu+1}}$$

при  $x \rightarrow \infty$  (см., например, [3]).

Хорошо известно, что распределение Миттаг-Леффлера является геометрически устойчивым. Это означает, что если  $X_1, X_2, \dots$  — независимые о.р. с.в., а  $V_p$  — с.в., независимая от  $X_1, X_2, \dots$  и имеющая геометрическое распределение

$$P(V_p = n) = p(1 - p)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad p \in (0, 1), \quad (3)$$

то для каждого  $p \in (0, 1)$  существует число  $a_p > 0$  такое, что  $a_p(X_1 + \dots + X_{V_p}) \implies M_\nu$  при  $p \rightarrow 0$  (см., например, [9] или [10]). Здесь и далее символ  $\implies$  обозначает сходимость по распределению.

Более того, еще в 1965 г. И. Н. Коваленко [11] показал, что распределения с п. Л.–С. (1) и только они могут быть предельными для нормированных геометрических случайных сумм вида  $a_p(X_1 + \dots + X_{V_p})$  при  $p \rightarrow 0$ , где  $X_1, X_2, \dots$  — независимые о.р. с.в., а  $V_p$  — с.в. с геометрическим распределением (3), при каждом  $p \in (0, 1)$  независимая от  $X_1, X_2, \dots$ . Доказательство этого результата затем было воспроизведено в книгах [12–14], изданных на английском языке. В этих книгах распределения с п. Л.–С. (1) названы *распределениями класса К* в честь И. Н. Коваленко.

Двадцать пять лет спустя указанное предельное свойство распределений с п. Л.–С. (1) было переоткрыто А. Пиллаи [15, 16], который и предложил для них термин *распределение Миттаг-Леффлера*. Возможно, из-за того, что работы [11–13] были мало известны на Западе, термин *распределения класса К* не прижился, тогда как термин *распределение Миттаг-Леффлера* стал общепринятым.

## 2.2 Распределение Линника

В 1953 г. Ю. В. Линник [17] ввел класс симметричных распределений, определяемых х.ф.:

$$f_\alpha^L(t) = \frac{1}{1 + |t|^\alpha}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где  $\alpha \in (0, 2]$ . Позднее распределения этого класса стали называть *распределениями Линника* [18] или  $\alpha$ -*распределениями Лапласа* [19]. В данной работе используется первый термин, ставший общепринятым. При  $\alpha = 2$  распределение Линника превращается в распределение Лапласа, соответствующее плотности  $f^\Lambda(x) = (1/2)e^{-|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Распределения Линника обладают многими интересными аналитическими свойствами. В частности, они унимодальны [20], безгранично делимы [21], обладают плотностями с бесконечным пиком при  $\alpha \leq 1$  [21] и т.п. В работах [22, 23] можно найти детальное исследование асимптотических свойств плотности распределения Линника. Тем не менее чаще всего распределения Линника упоминаются в качестве примеров геометрически устойчивых распределений.

Случайная величина с распределением Линника с параметром  $\alpha \in (0, 2]$  будет обозначаться  $L_\alpha$ .

## 3 Предварительные сведения

Хотя в данной статье рассматриваются свойства *распределений* вероятности, соответствующие результаты будут сформулированы в терминах соответствующих с.в. в предположении, что все они заданы на одном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ .

Символ  $\stackrel{d}{=}$  будет обозначать совпадение распределений связанных им с.в.

Случайная величина со стандартной нормальной ф.р.  $\Phi(x)$  будет обозначаться  $X$ :

$$P(X < x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пусть  $\Psi(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , — ф.р. максимума стандартного винеровского процесса на единичном отрезке,  $\Psi(x) = 2\Phi(\max\{0, x\}) - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Легко видеть, что  $\Psi(x) = P(|X| < x)$ . Поэтому иногда говорят, что ф.р.  $\Psi(x)$  определяет *полунормальное* или *сложенное (folded) нормальное* распределение.

Для  $r > 0$ ,  $\mu > 0$  пусть  $\Gamma_{r,\mu}$  — с.в. с гамма-распределением, определяемым плотностью

$$f_{r,\mu}(x) = \frac{\mu^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\mu x}, \quad x \geq 0.$$

Пусть  $-\infty < a < b < \infty$ . Случайная величина с равномерным распределением на  $[a, b]$  будет обозначаться  $U_{[a,b]}$ .

Пусть  $\gamma > 0$ . Распределение с.в.  $W_\gamma$ :  $P(W_\gamma < x) = [1 - e^{-x^\gamma}] \mathbf{1}(x \geq 0)$  называется *распределением Вейбулла* с параметром формы  $\gamma$ . Очевидно, что  $W_1$  — с.в. со стандартным показательным распределением:  $P(W_1 < x) = [1 - e^{-x}] \mathbf{1}(x \geq 0)$ .

Функция распределения и плотность строго устойчивого распределения с характеристическим показателем  $\alpha$  и параметром формы  $\theta$ , определяемого х.ф.

$$g_{\alpha,\theta}(t) = \exp \left\{ -|t|^\alpha \exp \left\{ -\frac{1}{2} i \pi \theta \alpha \operatorname{sign} t \right\} \right\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

с  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $|\theta| \leq \min\{1, (2/\alpha) - 1\}$ , будут соответственно обозначаться  $G_{\alpha,\theta}(x)$  и  $g_{\alpha,\theta}(x)$  (см., например, [24]). Случайная величина с ф.р.  $G_{\alpha,\theta}(x)$  будет обозначаться  $S_{\alpha,\theta}$ .

**Лемма 1** [25]. При  $\delta \in (0, \alpha)$  имеет место соотношение

$$ES_{\alpha,1}^\delta = \frac{\Gamma(1 - \delta/\alpha)}{\Gamma(1 - \delta)}.$$

Пусть  $S_{\nu,1}$  и  $S'_{\nu,1}$  — независимые неотрицательные с.в. с одним и тем же односторонним строго



устойчивым распределением с характеристическим показателем  $\nu \in (0, 1]$ . Обозначим  $R_\nu = S_{\nu,1}/S'_{\nu,1}$ . Свойства с.в.  $R_\nu$  приведены в следующем утверждении.

- Лемма 2.** 1. При  $\nu \in (0, 1]$  имеет место соотношение  $R_\nu \stackrel{d}{=} R_\nu^{-1}$ .  
 2. Если  $\nu = 1$ , то  $P(R_\nu = 1) = 1$ .  
 3. При  $\nu \in (0, 1)$  с.в.  $R_\nu$  абсолютно непрерывна, ее плотность  $p_\nu(x)$  имеет вид:

$$p_\nu(x) = \frac{\sin(\pi\nu)x^{\nu-1}}{\pi[1+x^{2\nu}+2x^\nu\cos(\pi\nu)]} = \frac{\sin(\pi\nu)x^{\nu-1}}{\pi[(x^\nu+\cos(\pi\nu))^2+\sin^2(\pi\nu)]}, \quad x > 0.$$

4. Если  $0 < \nu < 1$ , то моменты с.в.  $R_\nu$  порядков  $\delta \geq \nu$  бесконечны. Для  $0 < \delta < \nu \leq 1$  моменты с.в.  $R_\nu$  порядка  $\delta$  имеют вид:

$$ER_\nu^\delta = \frac{\Gamma(1-\delta/\nu)\Gamma(1+\delta/\nu)}{\Gamma(1-\delta)\Gamma(1+\delta)} = \frac{\sin(\pi\delta)}{\nu^2 \sin(\pi\delta/\nu)}.$$

Свойства 1 и 2 очевидны. Свойство 3 доказано в работе [7]. Свойство 4 вытекает из следствия 2, приведенного ниже.

## 4 Представления распределений Миттаг-Леффлера и Линника в виде смесей

### 4.1 Распределение Миттаг-Леффлера как смешанное показательное

**Теорема 1** (фольклор). При любом  $\nu \in (0, 1]$  распределение Миттаг-Леффлера с параметром  $\nu$  является масштабной смесью одностороннего строго устойчивого распределения, причем смешивающим является распределение Вейбулла с параметром  $\nu/2$ , т. е.

$$M_\nu \stackrel{d}{=} S_{\nu,1}W_\nu \stackrel{d}{=} S_{\nu,1}\sqrt{W_{\nu/2}},$$

где с.в. в правой части независимы.

**Теорема 2** [7, 26]. Распределение Миттаг-Леффлера с параметром  $\nu \in (0, 1]$  является смешанным показательным, причем смешивающим является распределение с.в.  $R_\nu$ :

$$M_\nu \stackrel{d}{=} W_1R_\nu,$$

где с.в. в правой части независимы. Более того, если  $0 < \nu < 1$ , то для плотности  $f_\nu^M(x)$  распределения

Миттаг-Леффлера справедливо интегральное представление

$$f_\nu^M(x) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^\nu e^{-zx} dz}{1+z^{2\nu}+2z^\nu\cos(\pi\nu)}, \quad x > 0.$$

Представление распределения Миттаг-Леффлера в виде смешанного показательного было получено в работе [26]. Там же приведен и вид смешивающей плотности  $p_\nu(x)$ . В работе [7] было замечено, что плотность  $p_\nu(x)$  соответствует с.в.  $R_\nu$  — отношению двух независимых о.р. неотрицательных строго устойчивых с.в.

Из теоремы 2 вытекает представление ф.р. Миттаг-Леффлера  $F_\nu^M(x)$  для  $x > 0$  в виде

$$F_\nu^M(x) = 1 - \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^{\nu-1}e^{-zx} dz}{1+z^{2\nu}+2z^\nu\cos(\pi\nu)}.$$

С помощью теоремы 2 легко сделать следующие выводы о моментах распределения Миттаг-Леффлера.

**Следствие 1.** Первый логарифмический момент распределения Миттаг-Леффлера не зависит от параметра  $\nu$ : для любого  $\nu \in (0, 1]$

$$E \ln M_\nu = \int_0^\infty e^{-x} \ln x dx = -\mathbb{C},$$

где  $\mathbb{C} = 0,57721566490\dots$  — постоянная Эйлера.

Это утверждение следует из очевидного соотношения  $\ln M_\nu \stackrel{d}{=} \ln W_1 + \ln S_{\nu,1} - \ln S'_{\nu,1}$ , вытекающего из теоремы 2, и хорошо известного представления постоянной Эйлера (см., например, формулу 8.367(3) в [27]).

В свою очередь с учетом неравенства Иенсена следствие 1 влечет простое неравенство

$$EM_\nu^\delta = Ee^{\delta \ln M_\nu} \geq e^{\delta E \ln M_\nu} = e^{-\delta\mathbb{C}},$$

справедливое для любого  $\delta > 0$  равномерно по  $\nu \in (0, 1]$ . При этом для  $\delta \geq \nu$  это неравенство тривиально. Более аккуратное описание моментов распределения Миттаг-Леффлера содержится в следующих утверждениях.

Из теоремы 1 и леммы 1 вытекает представление моментов распределения Миттаг-Леффлера в терминах гамма-функции, изначально полученное в работе [16] более сложным методом.

**Следствие 2.** Если  $0 < \nu < 1$ , то моменты распределения Миттаг-Леффлера порядков  $\delta \geq \nu$  бесконечны. Для  $0 < \delta < \nu \leq 1$  моменты распределения Миттаг-Леффлера имеют вид:

$$EM_\nu^\delta = EW_\nu^\delta \cdot ES_{\nu,1}^\delta = \frac{\Gamma(1 - \delta/\nu)\Gamma(1 + \delta/\nu)}{\Gamma(1 - \delta)}. \quad (4)$$

Еще одно представление моментов распределения Миттаг-Леффлера, возможно, более удобное с вычислительной точки зрения, вытекает из теоремы 2 и формулы 3.252(12) в [27]. Это утверждение также изначально получено в [16].

**Следствие 3.** Для  $0 < \delta < \nu \leq 1$  моменты распределения Миттаг-Леффлера имеют вид:

$$\begin{aligned} EM_\nu^\delta &= EW_1^\delta \cdot ER_\nu^\delta = \\ &= \frac{\delta\Gamma(\delta)\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} \int_0^\infty \frac{x^{\delta/\nu} dx}{1+x^2+2x\cos(\pi\nu)} = \\ &= \frac{\delta\Gamma(\delta)\sin(\pi\delta)}{\nu^2\sin(\pi\delta/\nu)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя хорошо известные эйлеровы формулы дополнения для гамма-функции, легко убедиться, что правые части (4) и (5) совпадают.

#### 4.2 Связь с распределением Линника

Ниже во всех произведениях с.в. сомножители предполагаются независимыми.

**Теорема 3** [7]. Пусть  $\alpha \in (0, 2]$ ,  $\alpha' \in (0, 1]$ . Тогда

$$L_{\alpha\alpha'} \stackrel{d}{=} S_{\alpha,0}M_{\alpha'}^{1/\alpha}.$$

**Следствие 4** [7]. Распределение Линника с параметром  $\alpha \in (0, 2]$  является масштабной смесью нормальных законов, причем смешивающим является распределение Миттаг-Леффлера с параметром  $\alpha/2$ :

$$L_\alpha \stackrel{d}{=} X\sqrt{2M_{\alpha/2}}.$$

С учетом следствий 2 и 3 из следствия 4, в свою очередь, непосредственно вытекает

**Следствие 5.** Если  $0 < \alpha < 2$ , то моменты распределения Линника порядков  $\delta \geq \alpha$  не существуют. При  $0 < \delta < \alpha \leq 2$  абсолютные моменты распределения Линника имеют вид:

$$\begin{aligned} E|L_\alpha|^\delta &= 2^{\delta/2}E|X|^\delta \cdot EM_{\alpha/2}^{\delta/2} = \\ &= \frac{2^\delta\Gamma(1 + \delta/2)\Gamma(1 - \delta/\nu)\Gamma(1 + \delta/\nu)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1 - \delta/2)} = \\ &= \frac{2^\delta\delta^2(\Gamma(\delta/2))^2\sin(\pi\delta/2)}{\nu^2\sqrt{\pi}\sin(\pi\delta/\nu)}. \end{aligned}$$

#### 4.3 Распределение Миттаг-Леффлера как смесь равномерных распределений

Из теорем 2 и 5 (см. ниже) с учетом результата статьи [28] легко получить следующие представления.

**Теорема 4** [29]. Распределение Миттаг-Леффлера с параметром  $\nu \in (0, 1]$  является масштабной смесью равномерных распределений:

$$M_\nu \stackrel{d}{=} U_{[0,1]}\Gamma_{2,1/\sqrt{2}}R_\nu \stackrel{d}{=} U_{[0,1]}\sqrt{2}\Gamma_{3/2,1/2}W_1 \cdot R_\nu.$$

Этот результат может быть использован при моделировании продолжительности проектов. Как правило, предполагается, что она случайна в пределах заданного интервала, верхняя граница которого («deadline») определяется экспертами, чье мнение также может зависеть от случайных факторов.

#### 4.4 Распределение Миттаг-Леффлера как смесь полунормальных законов

**Теорема 5** [7]. Распределение Миттаг-Леффлера с параметром  $\nu \in (0, 1]$  является масштабной смесью полунормальных законов:

$$M_\nu \stackrel{d}{=} |X|\sqrt{2W_1}R_\nu.$$

Рассмотрим смешивающее распределение в теореме 5. Обозначим  $H_\nu(x) = P(W_1R_\nu^2 < x/2)$ ,  $x \geq 0$ . Тогда утверждение теоремы 5 можно записать в виде:

$$\begin{aligned} F_\nu^M(x) &= \int_0^\infty \Psi\left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right) dH_\nu(u) = \\ &= 2 \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right) dH_\nu(u) - 1, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

При  $0 < \nu < 1$  плотность, соответствующая ф.р.  $H_\nu(x)$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} h_\nu(x) &= \frac{d}{dx} H_\nu(x) = \frac{d}{dx} P\left(W_1 < \frac{xR_\nu^2}{2}\right) = \\ &= \frac{\sin(\pi\nu)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{z^{\nu/2-1}e^{-xz/2} dz}{1+z^\nu+2z^{\nu/2}\cos(\pi\nu)}, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что если  $\nu = 1$ , то  $H_1(x) = 1 - e^{-x/2}$ ,  $x \geq 0$ .

## 5 Распределение Миттаг-Леффлера как асимптотическая аппроксимация

Распределение Миттаг-Леффлера может быть предельным в довольно простых предельных схемах для случайных последовательностей со случайными индексами, в частности для статистик, построенных по выборкам случайного объема.

Чтобы указать примеры ситуаций, в которых распределения Миттаг-Леффлера могут выступать в качестве асимптотических аппроксимаций, уместно привести еще одно вспомогательное утверждение.

Рассмотрим последовательность случайных величин  $Z_1, Z_2, \dots$ . Пусть  $N_1, N_2, \dots$  — натурально-значные с.в. такие, что при каждом  $n$  с.в.  $N_n$  независима от последовательности  $Z_1, Z_2, \dots$ . В следующей лемме сходимость подразумевается при  $n \rightarrow \infty$ .

**Лемма 3.** *Предположим, что существуют неограниченно возрастающая (убывающая к нулю) последовательность положительных чисел  $\{c_n\}_{n \geq 1}$  и с.в.  $Z$  такие, что  $c_n^{-1}Z_n \Rightarrow Z$ . Если существуют неограниченно возрастающая (убывающая к нулю) последовательность положительных чисел  $\{d_n\}_{n \geq 1}$  и с.в.  $N$  такие, что*

$$d_n^{-1}c_{N_n} \Rightarrow N, \quad (6)$$

то

$$d_n^{-1}Z_{N_n} \Rightarrow NZ, \quad (7)$$

причем случайные сомножители в правой части (7) независимы. Если дополнительно  $N_n \rightarrow \infty$  по вероятности и семейство масштабных смесей функции распределения с.в.  $Z$  идентифицируемо, то условие (6) не только достаточно для (7), но и необходимо.

Доказательство см. в [30] (случай  $c_n, d_n \rightarrow \infty$ ), [31] (случай  $c_n, d_n \rightarrow 0$ ).

Выше уже было отмечено, что распределения Миттаг-Леффлера с параметром  $\nu \in (0, 1)$  и только они могут быть предельными для геометрических случайных сумм независимых о.р. с.в. В этом случае в лемме 3 с.в.  $Z_n$  образованы накопленными суммами независимых о.р. с.в., распределение которых принадлежит области притяжения строго устойчивого распределения  $G_{\nu,1}$ . Тогда, полагая  $Z \stackrel{d}{=} S_{\nu,1}$ ,  $c_n = d_n = n^{1/\nu}$ , в (6) получаем  $N \stackrel{d}{=} W_1^{1/\alpha} \stackrel{d}{=} W_\alpha$ , и в соответствии с леммой 3 и теоремой 1 в (7)  $NZ \stackrel{d}{=} M_\nu$ .

Поскольку в мультипликативных представлениях для с.в. с распределением Миттаг-Леффлера порядок сомножителей не имеет значения, их роли в предельной схеме, рассмотренной в лемме 3, могут быть различными. Скажем, хорошо известно, что распределение Вейбулла может быть предельным для экстремальных порядковых статистик. Тогда на основании теоремы 2 и леммы 3 можно утверждать, что распределение Миттаг-Леффлера с параметром  $\nu \in (0, 1)$  может быть предельным для экстремальных порядковых статистик, построенных по выборкам случайного объема, если нормированные индексы по распределению сходятся к с.в.  $S_{\nu,1}$ . Для индексов специального вида — с.в. со смешанным пуассоновским распределением — этот случай детально рассмотрен в [7].

Еще два примера предельных схем основаны на теореме 5. Как известно, полунормальное распределение является предельным для максимальных сумм независимых с.в., удовлетворяющих условию Линдеберга, или абсолютных величин сумм таких слагаемых. На основании теоремы 5 и леммы 3 можно заключить, что распределение Миттаг-Леффлера с параметром  $\nu \in (0, 1)$  может быть предельным для максимальных случайных сумм независимых с.в., удовлетворяющих условию Линдеберга, или абсолютных величин случайных сумм таких слагаемых, если нормированные индексы по распределению сходятся к с.в.  $\sqrt{2W_1}R_\nu$ . Этот случай также детально рассмотрен в [7].

## 6 Статистическое оценивание параметра распределения Миттаг-Леффлера

### 6.1 Специальные версии метода моментов

В связи с тем, что плотность распределения Миттаг-Леффлера не допускает явного представления в терминах элементарных функций, метод максимального правдоподобия оказывается малопригодным для статистического оценивания параметра распределения Миттаг-Леффлера. С этой целью в некоторых работах предлагается использовать специальные модификации метода моментов. Первой из таких работ, по-видимому, является статья [32], где использованы формулы типа (4) и (5) при сильном предположении о том, что заранее известен нетривиальный интервал, содержащий неизвестное значение параметра  $\nu$ . В работе [33] использованы логарифмические моменты.

## 6.2 Двухэтапный сеточный метод оценивания параметра распределения Миттаг-Леффлера

Рассмотрим следующий альтернативный двухэтапный сеточный метод, использующий более полную информацию об эмпирическом распределении, нежели второй эмпирический логарифмический момент, как в [33]. Этот метод основан на теореме 2, позволяющей представить распределение Миттаг-Леффлера в виде смешанного показательного.

Следует отметить, что сеточные методы разделения смесей продемонстрировали высокую эффективность при оценивании параметров смешанных пуассоновских распределений и при разделении конечных или произвольных дисперсионно-сдвиговых смесей нормальных законов [34, 35].

На первом этапе на положительной полупрямой выделим основную часть носителя смешивающего распределения, т. е. ограниченный интервал, вероятность которого, вычисленная в соответствии со смешивающим распределением, практически равна единице. На этот интервал накинём конечную сетку, содержащую (возможно, очень большое число)  $K \in \mathbb{N}$  известных узлов  $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ . Приближим искомое распределение Миттаг-Леффлера конечной смесью показательных законов (гиперэкспоненциальным распределением):

$$F_\nu^M(x) \approx 1 - \sum_{i=1}^K p_i e^{-\lambda_i x}, \quad x \geq 0. \quad (8)$$

В смеси, стоящей в правой части соотношения (8), неизвестными являются только параметры  $p_1, \dots, p_K$ .

Пусть  $x_1, \dots, x_n$  — анализируемая выборка значений с.в. с оцениваемым распределением Миттаг-Леффлера. Итерационный процесс, определяющий сеточный EM (expectation-maximization) алгоритм для данной задачи, задается следующим образом. Пусть  $p_1^{(m)}, \dots, p_{K-1}^{(m)}$  — оценки параметров  $p_1, \dots, p_{K-1}$  на  $m$ -й итерации,  $p_K^{(m)} = 1 - p_1^{(m)} - \dots - p_{K-1}^{(m)}$ . Для  $i = 1, \dots, K$ ,  $j = 1, \dots, n$  обозначим  $\varphi_{ij} = \lambda_i e^{-\lambda_i x_j}$ . Тогда, используя стандартные рассуждения, определяющие вычислительные формулы EM-алгоритма для параметров конечной смеси вероятностных распределений (см., например, [36, разд. 5.3.7–5.3.8]), следует положить:

$$p_i^{(m+1)} = \frac{p_i^{(m)}}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\varphi_{ij}}{\sum_{r=1}^K p_r^{(m)} \varphi_{rj}}, \quad i = 1, \dots, K. \quad (9)$$

Можно показать, что если узлы  $\lambda_1, \dots, \lambda_K$  сетки различны, неотрицательны и известны, то итера-

ционный процесс (9) является монотонным, т. е. каждая его итерация не уменьшает целевую сеточную функцию правдоподобия

$$L(p_1, \dots, p_K; x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^K p_i \varphi_{ij} \right].$$

Как показано в [36, разд. 5.7.4], сеточная функция правдоподобия  $L(p_1, \dots, p_K; x_1, \dots, x_n)$  вогнута по аргументам  $p_1, \dots, p_K$ . Поэтому на каждом шаге итерационного процесса вместо соотношения (9) можно использовать любой более быстрый алгоритм максимизации функции  $L(p_1, \dots, p_K; x_1, \dots, x_n)$  по переменным  $p_1, \dots, p_K$ .

Таким образом, на первом этапе получают оценки весов  $p_i$  всех узлов  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , конечной сетки, накинута на носитель смешивающего распределения.

На втором этапе остается применить какой-либо стандартный метод подгонки распределения с.в.  $R_\nu$ , определяемого плотностью  $p_\nu(x)$  (см. п. 3 леммы 2), к эмпирическим данным типа гистограммы  $(\lambda_1, p_1), \dots, (\lambda_K, p_K)$ , полученным на первом этапе. Например, параметр  $\nu$  можно оценить, минимизируя некоторое расстояние между полученной гистограммой и плотностью  $p_\nu(x)$ . С этой целью в качестве оценки параметра  $\nu$  разумно искать такое значение  $\nu$ , которое минимизирует расстояние Кульбака–Лейблера. Минимизация этого расстояния эквивалентна максимизации правдоподобия полученной гистограммы в классе распределений  $\{p_\nu(x) : \nu \in (0, 1]\}$ .

При фиксированной сетке двухэтапный метод дает лишь приближенные оценки параметра распределения Миттаг-Леффлера, причем точность приближения зависит от успешного выбора сетки, который приобретает критическое значение. Целесообразно выбирать сетку адаптивно, сгущая ее там, где эмпирическая плотность принимает большие значения. Говорить о состоятельности получаемых оценок при фиксированной сетке нельзя. Но если объем выборки неограниченно возрастает и вместе с ним согласованно увеличивается число узлов, то вопрос о состоятельности получаемых оценок приобретает смысл. Эти вопросы будут отражены в следующих публикациях.

## 7 Дважды стохастические пуассоновские процессы, связанные с распределением Миттаг-Леффлера

Так как распределение Миттаг-Леффлера является смешанным показательным (см. теорему 2),



можно предложить две модификации пуассоновских процессов со случайными интенсивностями, в которых длины промежутков времени между последовательными скачками имеют распределения Миттаг-Леффлера. В первой модификации длины этих промежутков условно независимы при фиксированной реализации смешивающей с.в.  $R_\nu = S_{\nu,1}/S'_{\nu,1}$ , тогда как во второй модификации длины этих промежутков независимы, так что сам процесс является процессом восстановления.

### 7.1 $R_\nu$ -смешанные пуассоновские процессы

Пусть  $N_1(t), t \geq 0$ , — стандартный пуассоновский процесс (однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью), независимый от с.в.  $R_\nu = S_{\nu,1}/S'_{\nu,1}$ .

Определим  $R_\nu$ -смешанный пуассоновский процесс  $N_\nu(t), t \geq 0$ , как суперпозицию  $N_\nu(t) = N_1(R_\nu t), t \geq 0$ . Так как  $R_\nu \stackrel{d}{=} 1/R_\nu$ , то легко видеть, что в рамках такой модели при заданной с.в.  $R_\nu$  длины интервалов времени  $T_i$  между последовательными скачками  $T_i$  имеют вид  $W_1^{(i)} R_\nu$ , где  $W_1^{(1)}, W_1^{(2)}, \dots$  — независимые с.в. с одним и тем же стандартным показательным распределением. В соответствии с теоремой 2 длина  $T_i$  каждого периода имеет распределение Миттаг-Леффлера, но с.в.  $T_1, T_2, \dots$  не являются независимыми, тогда как они *условно независимы* при фиксированном значении с.в.  $R_\nu$ .

Пусть  $X_1, X_2, \dots$  — независимые с.в., общее распределение которых принадлежит области нормального притяжения строго устойчивого закона  $G_{\alpha,0}$  с  $0 < \alpha \leq 2$ . Пусть  $N(t)$  —  $R_\nu$ -смешанный пуассоновский процесс, независимый от последовательности  $X_1, X_2, \dots$ . Обозначим  $S_{N(t)} = X_1 + \dots + X_{N(t)}$  ( $S_0 = 0$ ). Процесс  $S_{N(t)}, t \geq 0$ , является *обобщенным (сopound)  $R_\nu$ -смешанным пуассоновским процессом*.

**Теорема 6.** Пусть  $\nu \in (0, 1)$ . Предположим, что с.в.  $X_1, X_2, \dots$  и процесс  $N(t)$  удовлетворяют приведенным выше условиям. Тогда при  $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{S_{N(t)}}{t^{1/\alpha}} &\implies S_{\alpha,0} R_\nu^{1/\alpha} \stackrel{d}{=} S_{\alpha\nu,0} S_{\nu,1}^{-1/\alpha} \stackrel{d}{=} \\ &\stackrel{d}{=} X \sqrt{S_{\alpha\nu/2} S_{\nu,1}^{-2/\alpha}}. \end{aligned}$$

Предельное распределение в теореме 6 является *дробно-устойчивым* [8] с параметрами  $\beta = \alpha\nu$  и  $\nu$  и представимо в виде масштабной смеси нормальных законов.

### 7.2 Дважды стохастический миттаг-леффлер–пуассоновский процесс

Пусть  $N(t), t \geq 0$ , — точечный процесс восстановления, т.е. расстояния  $T_1, T_2, \dots$  между соответствующими соседними случайными точками  $Y_0 = 0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \dots$  точечного процесса  $N(t)$  — независимые о.р. с.в. с общей ф.р.  $V(x)$ . Обозначим

$$v(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dV(x), \quad s \geq 0.$$

Пусть  $N_1(t), t \geq 0$ , — стандартный пуассоновский процесс (однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью). Пусть  $Z(t), t \geq 0$ , — случайная мера, т.е. случайный процесс с неубывающими непрерывными справа траекториями, удовлетворяющий условиям  $Z(t) = 0, P(Z(t) < \infty) = 1 (0 < t < \infty)$ . Предположим, что процессы  $N_1(t)$  и  $Z(t)$  независимы. Процесс  $N(t) = N_1(Z(t))$  называется *дважды стохастическим пуассоновским процессом*, или *процессом Кокса*.

**Лемма 4** [37, 38]. Точечный процесс восстановления  $N(t)$  является процессом Кокса тогда и только тогда, когда

$$v(s) = \frac{1}{1 - \ln g(s)},$$

где  $g(s)$  — п. Л.–С. некоторого безгранично делимого распределения. При этом

$$g(s) = E \exp\{-sZ^{-1}(1)\}; \quad Z^{-1}(0) = 0,$$

где  $Z(t)$  — случайная мера, управляющая процессом  $N(t)$  (т.е.  $N(t) = N_1(Z(t))$ ) и  $Z^{-1}(t) = \sup\{\tau : Z(\tau) \leq t\}$ .

Если  $g(s) = e^{-\lambda s^\nu}, 0 < \nu < 1$ , т.е.  $g(s)$  — п. Л.–С. строго устойчивой с.в.  $S_{\nu,1}$ , то  $v(s) = \psi_\nu(s) = 1/(1 + \lambda s^\nu)$  — п. Л.–С. распределения Миттаг-Леффлера. В силу леммы 4 это означает, что процесс Кокса  $N(t)$  является процессом восстановления, в котором расстояния между соседними точками (точками восстановления) имеют распределения Миттаг-Леффлера. Такой процесс рассмотрен в работах [39, 40], где он назван *дробным пуассоновским процессом с обратным  $\nu$ -устойчивым субординатором*. С учетом сказанного выше, такой процесс также можно назвать *миттаг-леффлер–пуассоновским*.

Пусть  $X_1, X_2, \dots$  — независимые о.р. с.в., общее распределение которых принадлежит области притяжения строго устойчивого распределения  $G_{\nu,1}$ .



Пусть  $N(t)$  — дробный пуассоновский процесс с обратным  $\nu$ -устойчивым субординатором,  $0 < \nu < 1$ , независимый от последовательности  $X_1, X_2, \dots$ . Снова обозначим  $S_{N(t)} = X_1 + \dots + X_{N(t)}$ , считая, что  $S_0 = 0$ . В [39] доказано, что при надлежащей нормировке процесс  $S_{N(t)}$  слабо сходится в пространстве Скорохода к суперпозиции  $P_\alpha(P_\nu^{-1}(t))$ , где  $P_\alpha(t)$  —  $\alpha$ -устойчивый процесс Леви, а  $P_\nu^{-1}(t) = \sup\{\tau : P_\nu(\tau) \leq t\}$  — обратный  $\nu$ -устойчивый субординатор, независимый от  $P_\alpha(t)$ .

Так как

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{P_\alpha(P_\nu^{-1}(1)) < x\} = \\ & = \mathbb{P}\{P_\alpha^\alpha(1)P_\nu^{-\nu}(1) < x^\alpha\} = \mathbb{P}\{S_{\alpha,0}S_{\nu,1}^{-\nu/\alpha} < x\} = \\ & = \mathbb{P}\left\{X\sqrt{S_{\alpha/2,1}S_{\nu,1}^{-2\nu/\alpha}} < x\right\}, \end{aligned}$$

то конечномерные распределения предельного процесса опять являются дробно-устойчивыми, но на сей раз с параметрами  $\alpha$  и  $\nu$  и могут быть представлены в виде специальных смесей нормальных законов.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность Владимиру Васильевичу Учайкину за стимулирующие дискуссии.

## Литература

1. *Weron K., Kotulski M.* On the Cole–Cole relaxation function and related Mittag–Leffler distributions // *Physica A*, 1996. Vol. 232. P. 180–188.
2. *Gorenflo R., Mainardi F.* Continuous time random walk, Mittag–Leffler waiting time and fractional diffusion: Mathematical aspects // *Anomalous transport: Foundations and applications* / Eds. R. Klages, G. Radons, I. M. Sokolov. — Weinheim, Germany: Wiley–VCH, 2008. Ch. 4. P. 93–127. <http://arxiv.org/abs/0705.0797>.
3. *Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V.* Mittag–Leffler functions, related topics and applications. — Springer monographs in mathematics ser. — Berlin – New York: Springer, 2014. 457 p.
4. *Jose K. K., Uma P., Lekshmi V. S., Haubold H. J.* Generalized Mittag–Leffler distributions and processes for applications in astrophysics and time series modeling // 3rd UN/ESA/NASA Workshop on the International Heliophysical Year 2007 and Basic Space Science. *Astrophysics and Space Science Proceedings*. — New York, NY, USA: Springer, 2010. P. 79–92.
5. *Scalas E.* The application of continuous–time random walks in finance and economics // *Physica A*, 2006. Vol. 362. P. 225–239.
6. *Meerschaert M. M., Scalas E.* Coupled continuous time random walks in finance // *Physica A*, 2006. Vol. 370. P. 114–118.
7. *Korolev V. Yu., Zeifman A. I.* Convergence of statistics constructed from samples with random sizes to the Linnik and Mittag–Leffler distributions and their generalizations // *J. Korean Stat. Soc.*, 2017. Vol. 46. P. 161–181.
8. *Kolokoltsov V. N., Korolev V. Yu., Uchaikin V. V.* Fractional stable distributions // *J. Math. Sci.*, 2001. Vol. 105. No. 6. P. 2569–2576.
9. *Bunge J.* Compositions semigroups and random stability // *Ann. Probab.*, 1996. Vol. 24. P. 1476–1489.
10. *Klebanov L. B., Rachev S. T.* Sums of a random number of random variables and their approximations with  $\varepsilon$ -accompanying infinitely divisible laws // *Serdica*, 1996. Vol. 22. P. 471–498.
11. *Коваленко И. Н.* О классе предельных распределений для редящих потоков однородных событий // *Литовский математический сборник*, 1965. Т. 5. Вып. 4. С. 569–573.
12. *Gnedenko B. V., Kovalenko I. N.* Introduction to queueing theory. — Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1968. 281 p.
13. *Gnedenko B. V., Kovalenko I. N.* Introduction to queueing theory. — 2nd ed. — Boston: Birkhauser, 1989. 314 p.
14. *Gnedenko B. V., Korolev V. Yu.* Random summation: Limit theorems and applications. — Boca Raton: CRC Press, 1996. 288 p.
15. *Pillai R. N.* Harmonic mixtures and geometric infinite divisibility // *J. Indian Stat. Assoc.*, 1990. Vol. 28. P. 87–98.
16. *Pillai R. N.* On Mittag–Leffler functions and related distributions // *Ann. I. Stat. Math.*, 1990. Vol. 42. P. 157–161.
17. *Линник Ю. В.* Линейные формы и статистические критерии, I, II // *Украинский математический ж.*, 1953. Т. 5. С. 207–243; 247–290.
18. *Kotz S., Kozubowski T. J., Podgorski K.* The Laplace distribution and generalizations: A revisit with applications to communications, economics, engineering, and finance. — Boston, MA, USA: Birkhäuser Basel, 2001. 367 p.
19. *Pillai R. N.* Semi- $\alpha$ -Laplace distributions // *Commun. Stat. Theor. M.*, 1985. Vol. 14. P. 991–1000.
20. *Laha R. G.* On a class of unimodal distributions // *P. Am. Math. Soc.*, 1961. Vol. 12. P. 181–184.
21. *Devroye L.* A note on Linnik’s distribution // *Stat. Probabil. Lett.*, 1990. Vol. 9. P. 305–306.
22. *Kotz S., Ostrovskii I. V., Hayfavi A.* Analytic and asymptotic properties of Linnik’s probability densities. I // *J. Math. Anal. Appl.*, 1995. Vol. 193. P. 353–371.
23. *Kotz S., Ostrovskii I. V., Hayfavi A.* Analytic and asymptotic properties of Linnik’s probability densities. II // *J. Math. Anal. Appl.*, 1995. Vol. 193. P. 497–521.
24. *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. — М.: Наука, 1983. 304 с.
25. *Korolev V. Yu.* Product representations for random variables with Weibull distributions and their applications // *J. Math. Sci.*, 2016. Vol. 218. No. 3. P. 298–313.
26. *Kozubowski T. J.* Mixture representation of Linnik distribution revisited // *Stat. Probabil. Lett.*, 1998. Vol. 38. P. 157–160.

27. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971. 1108 с.
28. Walker S. G., Gutierrez-Pena E. Robustifying Bayesian procedures (with discussion) // Bayesian statistics / Eds. J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid, A. F. M. Smith. — New York, NY, USA: Oxford University Press, 1999. Vol. 6. P. 685–710.
29. Королев В. Ю. Предельные распределения дважды стохастически прореженных процессов восстановления и их свойства // Теория вероятностей и ее применения, 2016. Т. 61. Вып. 4. С. 753–773.
30. Королев В. Ю. Сходимость случайных последовательностей с независимыми случайными индексами. I // Теория вероятностей и ее применения, 1994. Т. 39. Вып. 2. С. 313–333.
31. Королев В. Ю. Сходимость случайных последовательностей с независимыми случайными индексами. II // Теория вероятностей и ее применения, 1995. Т. 40. Вып. 4. С. 907–910.
32. Kozubowski T. J. Fractional moment estimation of Linnik and Mittag-Leffler parameters // Math. Comput. Model., 2001. Vol. 34. No. 9–11. P. 1023–1035.
33. Cahoy D. E. Estimation of Mittag-Leffler parameters // Commun. Stat. Simul. C., 2013. Vol. 42. No. 2. P. 303–315.
34. Королев В. Ю., Корчагин А. Ю. Модифицированный сеточный метод разделения дисперсионно-сдвиговых смесей нормальных законов // Информатика и её применения, 2014. Т. 8. Вып. 4. С. 11–19.
35. Королев В. Ю., Корчагин А. Ю., Зейфман А. И. Теорема Пуассона для схемы испытаний Бернулли со случайной вероятностью успеха и дискретный аналог распределения Вейбулла // Информатика и её применения, 2016. Т. 10. Вып. 4. С. 11–20.
36. Королев В. Ю. Вероятностно-статистические методы декомпозиции волатильности хаотических процессов. — М.: Изд-во МГУ, 2011. 512 с.
37. Kingman J. F. C. On doubly stochastic Poisson processes // P. Camb. Philos. Soc., 1964. Vol. 60. No. 4. P. 923–930.
38. Grandell J. Doubly stochastic Poisson processes. — Lecture notes in mathematics ser. — Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1976. Vol. 529. 244 p.
39. Meerschaert M. M., Scheffler H. P. Limit theorems for continuous-time random walks with infinite mean waiting times // J. Appl. Probab., 2004. Vol. 41. No. 3. P. 623–638.
40. Meerschaert M., Nane E., Vellaisamy P. The fractional Poisson process and the inverse stable subordinator // Electron. J. Probab., 2011. Paper No. 59. P. 1600–1620. ArXiv:1007.5051v1.

Поступила в редакцию 19.10.17

## SOME PROPERTIES OF THE MITTAG-LEFFLER DISTRIBUTION AND RELATED PROCESSES

V. Yu. Korolev<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

<sup>2</sup>Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

<sup>3</sup>Hangzhou Dianzi University, Xiasha Higher Education Zone, Hangzhou 310018, China

**Abstract:** The paper contains an overview of some properties of the Mittag-Leffler distribution. Main attention is paid to its representability as a mixed exponential law. The possibility to represent the Mittag-Leffler distribution as a scale mixture of half-normal and uniform distributions is discussed as well. It is shown that the Mittag-Leffler distribution can be used as an asymptotic approximation to the distributions of several statistics constructed from samples with random sizes. A new two-stage grid method for the estimation of the parameter of the Mittag-Leffler distribution is described. This method is based on the representation of the Mittag-Leffler distribution as a mixed exponential law. Two ways are considered to extend the notion of the Mittag-Leffler distribution to Poisson-type stochastic processes. The first way leads to a special mixed Poisson process and the second leads to a special renewal process simultaneously being a doubly stochastic Poisson process (Cox process). In limit theorems for randomly stopped random walks in both of these cases, the limit laws are fractionally stable distributions representable as normal scale mixtures with different mixing distributions.

**Keywords:** Mittag-Leffler distribution; Linnik distribution; stable distribution; Weibull distribution; exponential distribution; mixed Poisson process; renewal process; asymptotic approximation

**DOI:** 10.14357/19922264170404

## Acknowledgments

The research was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 17-07-00717).

## References

1. Weron, K., and M. Kotulski. 1996. On the Cole–Cole relaxation function and related Mittag–Leffler distributions. *Physica A* 232: 180–188.
2. Gorenflo, R., and F. Mainardi. 2008. Continuous time random walk, Mittag–Leffler waiting time and fractional diffusion: Mathematical aspects. *Anomalous transport: Foundations and applications*. Eds. R. Klages, G. Radons, and I. M. Sokolov. Weinheim, Germany: Wiley-VCH. Ch. 4. P. 93–127. Available at: <http://arxiv.org/abs/0705.0797> (accessed December 7, 2017).
3. Gorenflo R., A. A. Kilbas, F. Mainardi, and S. V. Rogosin. 2014. *Mittag–Leffler functions, related topics and applications*. Springer monographs in mathematics ser. Berlin – New York: Springer. 457 p.
4. Jose, K. K., P. Uma, V. S. Lekshmi, and H. J. Haubold. 2010. Generalized Mittag–Leffler distributions and processes for applications in astrophysics and time series modeling. *3rd UN/ESA/NASA Workshop on the International Heliophysical Year 2007 and Basic Space Science. Astrophysics and Space Science Proceedings*. New York, NY: Springer. 79–92.
5. Scalas, E. 2006. The application of continuous-time random walks in finance and economics. *Physica A* 362:225–239.
6. Meerschaert, M. M., and E. Scalas. 2006. Coupled continuous time random walks in finance. *Physica A* 370:114–118.
7. Korolev, V. Yu., and A. I. Zeifman. 2017. Convergence of statistics constructed from samples with random sizes to the Linnik and Mittag–Leffler distributions and their generalizations. *J. Korean Stat. Soc.* 46:161–181.
8. Kolokoltsov, V. N., V. Yu. Korolev, and V. V. Uchaikin. 2001. Fractional stable distributions. *J. Math. Sci.* 105(6):2569–2576.
9. Bunge, J. 1996. Compositions semigroups and random stability. *Ann. Probab.* 24:1476–1489.
10. Klebanov, L. B., and S. T. Rachev. 1996. Sums of a random number of random variables and their approximations with  $\varepsilon$ -accompanying infinitely divisible laws. *Serdica* 22:471–498.
11. Kovalenko, I. N. 1965. O klasse predel’nykh raspredeleniy dlya redyushchikh potokov odnorodnykh sobytiiy [On the class of limit distributions for rarefied flows of homogeneous events]. *Litovskiy Matematicheskiy Sbornik* [Lith. Math. J.] 5(4):569–573.
12. Gnedenko, B. V., and I. N. Kovalenko. 1968. *Introduction to queueing theory*. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations. 281 p.
13. Gnedenko, B. V., and I. N. Kovalenko. 1989 *Introduction to queueing theory*. 2nd ed. Boston: Birkhauser. 314 p.
14. Gnedenko, B. V., and V. Yu. Korolev. 1996. *Random summation: Limit theorems and applications*. Boca Raton: CRC Press. 288 p.
15. Pillai, R. N. 1989. Harmonic mixtures and geometric infinite divisibility. *J. Indian Stat. Assoc.* 28:87–98.
16. Pillai, R. N. 1990. On Mittag–Leffler functions and related distributions. *Ann. I. Stat. Math.* 42:157–161.
17. Linnik, Yu. V. 1953. Lineynye formy i statisticheskie kriterii. I, II [Linear forms and statistical criteria. I, II]. *Ukrainskiy Matematicheskiy Zh.* [Ukr. Math. J.] 5:207–243; 5:247–290.
18. Kotz, S., T. J. Kozubowski, and K. Podgorski. 2001. *The Laplace distribution and generalizations: A revisit with applications to communications, economics, engineering, and finance*. Boston, MA: Birkhäuser Basel. 367 p.
19. Pillai, R. N. 1985. Semi- $\alpha$ -Laplace distributions. *Commun. Stat. Theor. M.* 14:991–1000.
20. Laha, R. G. 1961. On a class of unimodal distributions. *P. Am. Math. Soc.* 12:181–184.
21. Devroye, L. 1990. A note on Linnik’s distribution. *Stat. Probabil. Lett.* 9:305–306.
22. Kotz, S., I. V. Ostrovskii, and A. Hayfavi. 1995. Analytic and asymptotic properties of Linnik’s probability densities. I. *J. Math. Anal. Appl.* 193:353–371.
23. Kotz, S., I. V. Ostrovskii, and A. Hayfavi. 1995. Analytic and asymptotic properties of Linnik’s probability densities. II. *J. Math. Anal. Appl.* 193:497–521.
24. Zolotarev, V. M. 1983. *Odnomernye ustoychivye raspredeleniya* [One-dimensional stable distributions]. Moscow: Nauka. 304 p.
25. Korolev, V. Yu. 2016. Product representations for random variables with the Weibull distributions and their applications. *J. Math. Sci.* 218(3):298–313.
26. Kozubowski, T. J. 1998. Mixture representation of Linnik distribution revisited. *Stat. Probabil. Lett.* 38:157–160.
27. Gradshteyn, I. S., and I. M. Ryzhik. 1971. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow: Nauka. 1108 p.
28. Walker, S. G., and E. Gutierrez-Pena. 1999. Robustifying Bayesian procedures (with discussion). *Bayesian statistics*. Eds. J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid, and A. F. M. Smith. New York, NY: Oxford University Press. 6:685–710.
29. Korolev, V. Yu. 2016. Predel’nye raspredeleniya dlya dvazhdy stokhasticheski prorezhennykh protsessov vosstanovleniya i ikh svoystva [Limit theorems for doubly stochastically rarefied renewal processes and their properties]. *Teoriya Veroyatnostey i ee Primeneniya* [Theor. Probab. Appl.] 61:753–773.
30. Korolev, V. Yu. 1995. Convergence of random sequences with the independent random indices. I. *Theor. Probab. Appl.* 39(2):282–297.

31. Korolev, V. Yu. 1996. Convergence of random sequences with independent random indices. II. *Theor. Probab. Appl.* 40(4):770–772.
32. Kozubowski, T.J. 2001. Fractional moment estimation of Linnik and Mittag-Leffler parameters. *Math. Comput. Model.* 34(9-11):1023–1035.
33. Cahoy, D. E. 2013. Estimation of Mittag-Leffler parameters. *Commun. Stat. Simul. C.* 42(2): 303–315.
34. Korolev, V. Yu., and A. Yu. Korchagin. 2014. Modifikatsirovanny setochnyy metod razdeleniya dispersionno-sdvigovykh smesey normal'nykh zakonov [A modified grid method for the separation of normal variance-mean mixtures]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 8(4):11–19.
35. Korolev, V. Yu., A. Yu. Korchagin, and A. I. Zeifman. 2016. Teorema Puassona dlya skhemy ispytaniy Bernulli so sluchaynoy veroyatnost'yu uspekha i diskretnyy analog raspredeleniya Veybulla [The Poisson theorem for the scheme of Bernoulli trials with a random probability of success]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 10(4):11–20.
36. Korolev, V. Yu. 2011. *Veroyatnostno-statisticheskie metody dekompozitsii volatil'nosti khaoticheskikh processov* [Probabilistic and statistical methods for the decomposition of volatility of chaotic processes]. Moscow: MSU Publ. 512 p.
37. Kingman, J. F. C. 1964. On doubly stochastic Poisson processes. *P. Camb. Philos. Soc.* 60(4): 923–930.
38. Grandell, J. 1976. Doubly stochastic Poisson processes. Lecture notes in mathematics ser. Berlin – Heidelberg – New York: Springer. Vol. 529. 244 p.
39. Meerschaert, M. M., and H. P. Scheffler. 2004. Limit theorems for continuous-time random walks with infinite mean waiting times. *J. Appl. Probab.* 41(3):623–638.
40. Meerschaert, M. M., E. Nane, and P. Vellaisamy. 2011. The fractional Poisson process and the inverse stable subordinator. *Electron. J. Probab.* Paper No. 59. 1600–1620. Available at: ArXiv:1007.5051v1 (accessed December 7, 2017).

*Received October 19, 2017*

## Contributor

**Korolev Victor Yu.** (b. 1954) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Head of the Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M.V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; leading scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; professor, Hangzhou Dianzi University, Xiasha Higher Education Zone, Hangzhou 310018, China; [vkorolev@cs.msu.su](mailto:vkorolev@cs.msu.su)



## АНАЛИЗ ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОСАДКОВ НА ОСНОВЕ ПАТТЕРНОВ\*

А. К. Горшенин<sup>1</sup>

**Аннотация:** Осадки входят в число ключевых параметров гидрологических моделей, поэтому их исследование необходимо для решения различных прикладных задач. В работе продемонстрировано нарушение марковского свойства для осадков, наблюдаемых в существенно различающихся между собой климатических областях — в Потсдаме и Элисте. Такие сведения о данных, наряду с ранее исследованными свойствами, представляют базовую информацию, необходимую для дальнейшего корректного построения вероятностных моделей, в частности для распределений объемов экстремальных осадков. Для анализа вероятностного поведения процесса выпадения осадков и построения прогнозов предложено использование цепочек событий (паттернов), выделенных из данных. При этом статистические процедуры автоматизированы с использованием программных инструментов пакета MATLAB. В качестве альтернативного инструмента прогнозирования на основе паттернов использованы нейронные сети, при этом наиболее точные результаты продемонстрированы в архитектуре, учитывающей сезонность, с двумя скрытыми слоями нейронов и сигмоидной функцией активации. Предложены направления дальнейших исследований в данной области.

**Ключевые слова:** осадки; паттерны; прогноз; нейронные сети; вероятностное прогнозирование; марковское свойство

**DOI:** 10.14357/19922264170405

### 1 Введение

Как известно, осадки являются важной частью гидрологических моделей, поэтому востребовано построение адекватных математических моделей (в том числе вероятностно-статистических), например для работы с регионами, в которых сети датчиков не покрывают полностью зоны необходимого наблюдения [1]. Такие модели могут быть использованы для решения задач вероятностного прогнозирования (см., например, работу [2]), формирования статистических сценариев (см. статью [3], в которой подобная задача решается в области ветроэнергетики). Более того, возможно построение сложных прогностических математических моделей на основе плотностей и функций распределения [4].

Выявление и моделирование закономерностей для экстремальных осадков весьма важны при решении различных задач изучения климата [5], в том числе с целью понимания процессов его изменения. Можно анализировать усредненные объемы осадков, кумулятивные данные за каждый дождливый период или ежедневные наблюдения. При этом в последнем случае результаты достаточно сильно

зависят от точности измерений, более чувствительны к наличию пропусков [6].

Настоящая работа посвящена изучению ряда вероятностно-статистических характеристик для процесса выпадения осадков на основе анализа суточных наблюдений для двух городов — Потсдама и Элисты. Предложена замена непрерывных значений дискретной шкалой из «0» и «1», соответствующих дням, в которых осадки не наблюдались («D», от Dry) или были зарегистрированы ненулевые наблюдения («W», от Wet). Наборы «0–1» удобны, например, с точки зрения программной реализации (как аналог булевых векторов), однако всюду далее в статье для наглядности будут использованы символы «D» и «W» для обозначения соответствующих событий. Рассмотрено построение прогнозов для преобразованных таким образом данных (в том числе с помощью нейронных сетей), а также предложен ряд направлений дальнейших исследований.

Стоит отметить, что продемонстрированная достаточно высокая прогностическая точность для нейросетей — около 80% даже для умеренного объема тестовых выборок — основана на анализе исключительно базовых статистических данных

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 17-07-00851, 15-07-04040 и 15-07-05316).

<sup>1</sup> Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; Институт океанологии им. П. П. Ширшова Российской академии наук, agorshenin@frccsc.ru



без привлечения каких-либо дополнительных сведений о метеорологических условиях.

## 2 Дискретизация величины дневных объемов осадков

Рассмотрим преобразование исходных объемов суточных осадков  $V_{\text{daily}}$ , представляющих собой неотрицательные данные, по следующему правилу: если в данный  $i$ -й день наблюдалась какая-либо положительная величина, то она заменяется на единицу ( $\tilde{V}_{\text{daily}}^{(i)} = 1$ ), иначе  $\tilde{V}_{\text{daily}}^{(i)}$  остается равной нулю. Таким образом, исходный ряд, состоящий из непрерывных значений, становится дискретным, принимающим два возможных значения  $\{0, 1\}$ . Данное упрощение позволяет анализировать непосредственно наличие или отсутствие осадков безотносительно к их объему. Стоит отметить, что подобная дискретизация не позволяет решать задачу определения экстремальности величины того или иного «дождя», однако ряд представленных в данном разделе результатов использовался в качестве предпосылок для построения моделей в статье [7].

Любая последовательность «сухих» (без осадков) и «дождливых» (с любым ненулевым объемом) дней представляет собой цепочку — паттерн — из «0» и «1» (или «D» и «W», как было отмечено в предыдущем разделе). Для каждого такого набора можно в рамках исторических данных определить частоты появления как отношение числа таких паттернов фиксированной длины  $N$  к общему числу

возможных наборов (очевидно,  $2^N$ ), т.е. фактически получить значения вероятностей (согласно классическому определению).

В рамках настоящего исследования были проанализированы наблюдения примерно за 60 лет для значений параметра  $N$  от 1 до 14. Для каждого набора были получены значения частот (вероятностей), определен паттерн с максимальным значением. Подобные данные удобно визуализировать в табличной форме (см. табл. 1 и 2 для трехдневных паттернов Потсдама и Элисты соответственно). Кроме того, в наглядной форме результаты можно представить в виде столбчатых диаграмм (см. рис. 1 и 2 для четырехдневных паттернов Потсдама и Элисты соответственно).

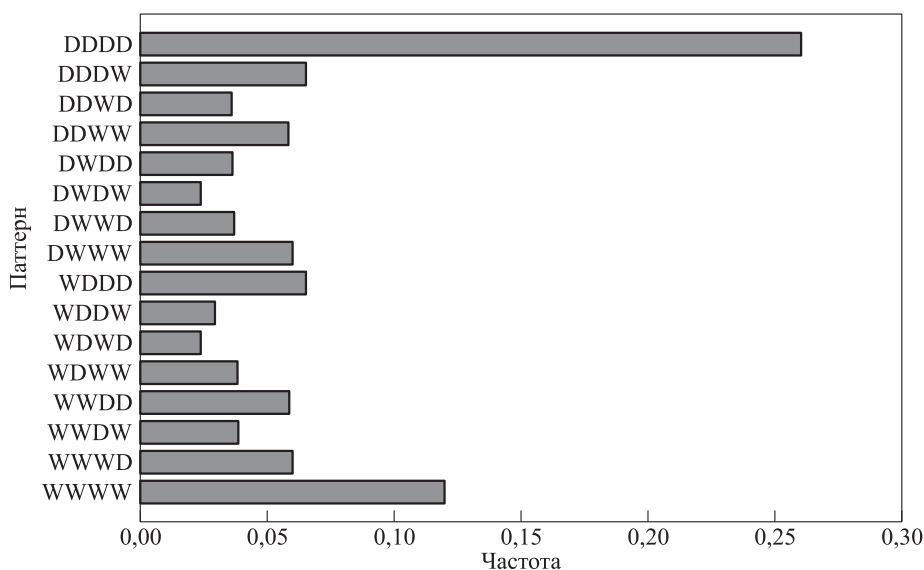
Представленные таблицы и диаграммы позволяют делать определенные выводы о климатических зонах, в которых расположены соответствующие города. Так, в Потсдаме климат умеренный, продолжительные осадки не редкость (например, для трех дней подряд частота — 0,1789), в то время как

**Таблица 1** Значения частот для трехдневных паттернов (Потсдам)

Набор	Частота
Dry-Dry-Dry	<b>0,3247</b>
Dry-Dry-Wet	0,0930
Dry-Wet-Dry	0,0582
Dry-Wet-Wet	0,0956
Wet-Dry-Dry	0,0930
Wet-Dry-Wet	0,0609
Wet-Wet-Dry	0,0957
Wet-Wet-Wet	0,1789

**Таблица 2** Значения частот для трехдневных паттернов (Элиста)

Набор	Частота
Dry-Dry-Dry	<b>0,4864</b>
Dry-Dry-Wet	0,1021
Dry-Wet-Dry	0,0751
Dry-Wet-Wet	0,0660
Wet-Dry-Dry	0,1022
Wet-Dry-Wet	0,0390
Wet-Wet-Dry	0,0660
Wet-Wet-Wet	0,0631



**Рис. 1** Частоты для четырехдневных паттернов (Потсдам)

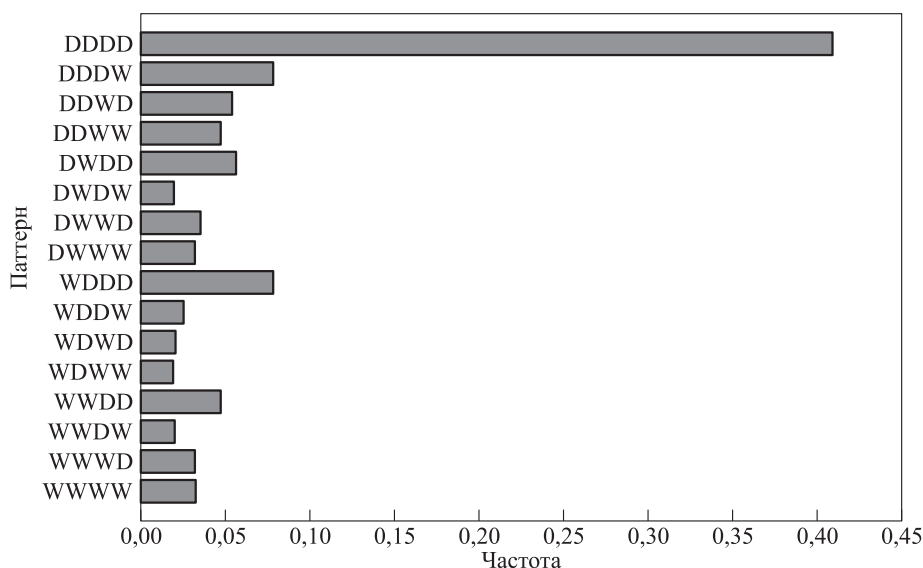


Рис. 2 Частоты для четырехдневных паттернов (Элиста)

в Элисте климат резко континентальный с умеренным числом осадков (частота «трехдневного» дождя за период наблюдений составила всего 0,0631). Для четырнадцатидневных наборов максимальную частоту для обоих городов имеет последовательность из всех «сухих» дней, при этом для Элисты соответствующая частота составила 0,1138, а для Потсдама — 0,0671.

### 3 Проверка марковского свойства

В большинстве работ, посвященных статистическому анализу метеорологических данных, считается, что продолжительность периода выпадения

осадков, измеренная в сутках (т. е. число последовательных «дождливых» дней), подчиняется геометрическому распределению вероятностей (см., например, [8]). Возможно, данные предположения базируются на классической интерпретации геометрического распределения в терминах испытаний Бернулли как распределения числа последовательных «дождливых» дней («успех») до первого дня без осадков («неудача»). Для изучаемых в работе городов проверим более слабое предположение, а именно: наличие марковости для данных.

Для этого потребуется вычисление условных вероятностей, но, как было отмечено в предыдущем разделе, необходимые базовые величины определе-

Таблица 3 Таблица значений для условных вероятностей (Потсдам)

Выражение	Значение
$\mathbb{P}(\{DDD\}   \{DD\})$	0,7774
$\mathbb{P}(\{DDW\}   \{DD\})$	0,2226
$\mathbb{P}(\{DWD\}   \{DW\})$	0,3785
$\mathbb{P}(\{DWW\}   \{DW\})$	0,6215
$\mathbb{P}(\{WDD\}   \{WD\})$	0,6043
$\mathbb{P}(\{WDW\}   \{WD\})$	0,3957
$\mathbb{P}(\{WWD\}   \{WW\})$	0,3484
$\mathbb{P}(\{WWW\}   \{WW\})$	0,6516
$ \mathbb{P}(\{DDD\}   \{DD\}) - \mathbb{P}(\{DD\}   \{D\}) $	0,0466
$ \mathbb{P}(\{DDW\}   \{DD\}) - \mathbb{P}(\{DW\}   \{D\}) $	0,0466
$ \mathbb{P}(\{DWD\}   \{DW\}) - \mathbb{P}(\{WD\}   \{W\}) $	0,0192
$ \mathbb{P}(\{DWW\}   \{DW\}) - \mathbb{P}(\{WW\}   \{W\}) $	0,0192
$ \mathbb{P}(\{WDD\}   \{DD\}) - \mathbb{P}(\{DD\}   \{D\}) $	0,1265
$ \mathbb{P}(\{WDW\}   \{WD\}) - \mathbb{P}(\{DW\}   \{D\}) $	0,1265
$ \mathbb{P}(\{WWD\}   \{WW\}) - \mathbb{P}(\{WD\}   \{W\}) $	0,0107
$ \mathbb{P}(\{WWW\}   \{WW\}) - \mathbb{P}(\{WW\}   \{W\}) $	0,0107

**Таблица 4** Таблица значений для условных вероятностей (Элиста)

Выражение	Значение
$\mathbb{P}(\{DDD\}   \{DD\})$	0,8264
$\mathbb{P}(\{DDW\}   \{DD\})$	0,1736
$\mathbb{P}(\{DWD\}   \{DW\})$	0,532
$\mathbb{P}(\{DWW\}   \{DW\})$	0,468
$\mathbb{P}(\{WDD\}   \{WD\})$	0,2761
$\mathbb{P}(\{WDW\}   \{WD\})$	0,5114
$\mathbb{P}(\{WWD\}   \{WW\})$	0,4887
$\mathbb{P}(\{WWW\}   \{WW\})$	0,8264
$ \mathbb{P}(\{DDD\}   \{DD\}) - \mathbb{P}(\{DD\}   \{D\}) $	0,0198
$ \mathbb{P}(\{DDW\}   \{DD\}) - \mathbb{P}(\{DW\}   \{D\}) $	0,0198
$ \mathbb{P}(\{DWD\}   \{DW\}) - \mathbb{P}(\{WD\}   \{W\}) $	0,0098
$ \mathbb{P}(\{DWW\}   \{DW\}) - \mathbb{P}(\{WW\}   \{W\}) $	0,0098
$ \mathbb{P}(\{WDD\}   \{DD\}) - \mathbb{P}(\{DD\}   \{D\}) $	0,827
$ \mathbb{P}(\{WDW\}   \{WD\}) - \mathbb{P}(\{DW\}   \{D\}) $	0,827
$ \mathbb{P}(\{WWD\}   \{WW\}) - \mathbb{P}(\{WD\}   \{W\}) $	0,0109
$ \mathbb{P}(\{WWW\}   \{WW\}) - \mathbb{P}(\{WW\}   \{W\}) $	0,0109

ны ранее, поэтому с помощью классической формулы

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

могут быть получены требуемые значения. В табл. 3 и 4 представлены условные вероятности и модули их разностей для Потсдама и Элисты, демонстрирующие отсутствие свойства марковости у данных.

Таким образом, последовательность «дождливых» и «сухих» дней не является марковской, поэтому использование схемы испытаний Бернулли некорректно. Альтернативные вероятностные модели предложены в статьях [7, 9].

#### 4 Вероятностное прогнозирование осадков с использованием исторических паттернов

Паттерны в анализе данных могут быть использованы для повышения точности и скорости построения прогнозов (см., например, статью [10]). Кроме того, они являются достаточно распространенным инструментом в рамках решения различных климатологических задач (см., например, работы [11, 12]). В данном разделе будет реализована достаточно простая схема построения вероятностных прогнозов для последовательностей «сухих» и «дождливых» дней на основе исторических паттернов для маркированных данных («0–1» или «D–W»).

При определении частот (вероятностей) появления той или иной последовательности событий по

дням в предыдущем разделе были вычислены соответствующие величины для наборов различной длины. Используя эти данные, можно вычислять значения условных вероятностей появления в будущем определенных комбинаций, т. е. построения прогноза. При этом, в отличие от стандартной для анализа данных практики, когда предсказываемое окно не должно превышать размер входных наблюдений, для исторических значений это правило может нарушаться.

В качестве примера рассмотрим построение вероятностного прогноза на два следующих дня для Потсдама и Элисты при условии текущих наблюдений вида «Wet–Wet–Dry–Dry», т. е. два дня подряд выпали осадки, в следующие двое суток они не регистрировались. В табл. 5 и 6 представлены вероятности соответствующих событий (полужирным шрифтом выделено наиболее вероятное событие).

**Таблица 5** Пример: прогнозирование осадков, Потсдам

Прогноз на 2 следующих дня	Вероятность
Dry–Dry	<b>0,4828</b>
Dry–Wet	0,1909
Wet–Dry	0,1211
Wet–Wet	0,2053

**Таблица 6** Пример: прогнозирование осадков, Элиста

Прогноз на 2 следующих дня	Вероятность
Dry–Dry	<b>0,5852</b>
Dry–Wet	0,1641
Wet–Dry	0,1259
Wet–Wet	0,1249

Соответственно, можно формулировать утверждения следующего вида: «Вероятность осадков *через* 2 дня в Потсдаме при текущих наблюдениях Wet-Wet-Dry-Dry составляет 0,3961, а вероятность отсутствия осадков *через* 2 дня — 0,6039»; «Вероятность осадков *через* 2 дня в Элисте при текущих наблюдениях Wet-Wet-Dry-Dry составляет 0,2889, а вероятность отсутствия осадков *через* 2 дня — 0,7111».

Стоит отметить, что поступление новых данных может существенным образом изменить вероятности событий только при значительном объеме новых наблюдений, что позволяет говорить об устойчивости прогнозов. При этом с сугубо вычислительной точки зрения обновление данных не является трудоемкой задачей.

## 5 Построение прогнозов с помощью нейронных сетей

В данном разделе рассмотрим технологию прогнозирования событий, связанных с выпадением осадков, на основе использования нейронных сетей. При этом в качестве обучающих рядов задействуются те же самые паттерны, о которых шла речь

выше. Однако в явном виде частота каждого из наборов не используется, а соответствующие процедуры реализуются в скрытых слоях нейронной сети.

Было проведено исследование возможности построения прогностической модели для данных с помощью многослойного перцептрона на основе библиотеки PHP-ML для языка программирования PHP (<https://github.com/php-ai/php-ml>). Исходные наблюдения случайным образом разделялись на обучающие и тестовые выборки в отношении 7 : 3. В качестве результата работы нейронной сети получается прогноз на следующие за входным набором 1–2 дня.

Тестировались нейронные сети с одним и двумя скрытыми слоями в архитектуре, при этом достигнутая точность составила 73% (в среднем) для однодневного прогноза при объеме входной выборки в 7 элементов (дней) и 56% для двухдневного прогноза при размере входных данных в 10 наблюдений. Затем модель была усложнена за счет учета сезонности как отдельной компоненты (к выборке каждый раз добавлялось еще одно наблюдение с номером месяца, соответствующего последнему наблюдению). Такое решение позволило повысить точность прогнозирования до 82% для однодневно-

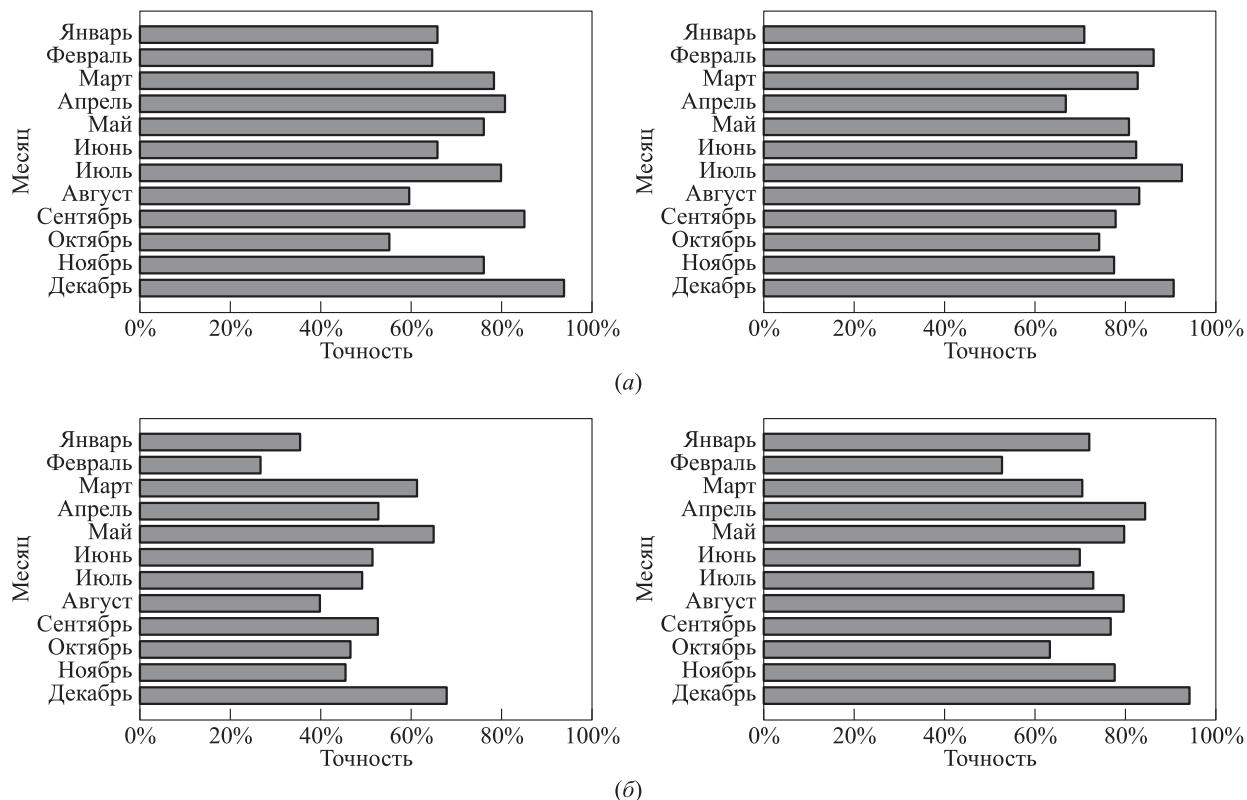


Рис. 3 Точность построения прогноза по месяцам в процессе обучения (пример): (а) однодневный прогноз; (б) двухдневный прогноз. Графики справа соответствуют модели с учетом сезонности

го прогноза и 74% для двухдневного при сохранении тех же параметров входных данных. Добавление третьего скрытого слоя не привело к заметному улучшению качества прогноза, при этом скорость обучения снизилась, поэтому разумно отказаться от такого решения в данной конфигурации нейросети.

На рис. 3 продемонстрированы графики точности прогнозов нейронных сетей по месяцам, построенные по выборке из 7 наблюдений как с учетом сезонности (правый столбец), так и без (левый столбец). На рис. 3, *а* приводится однодневный прогноз, на рис. 3, *б* — двухдневный. Для расчетов в данном случае использовался укороченный набор данных за четырехлетний период для уменьшения времени, необходимого для корректной настройки нейросети.

Как видно из рис. 3, введение в модель сезонности повышает качество прогнозирования, особенно для случая двухдневного предсказания. Например, на рис. 3, *б* (левый столбец) в феврале точность составляла около 26%, а с использованием сезонности удалось добиться увеличения данного показателя в 2 раза — до 52% (см. рис. 3, *б*, правый столбец).

Очевидно, что качество прогноза может быть повышено за счет увеличения объемов тестовых данных, использования высокопроизводительных решений, развития архитектуры нейросети и т. д. Представленные в данном разделе результаты демонстрируют успешность применения инструментария нейросетей в решении задачи прогнозирования в указанной постановке, однако не являются окончательными по своей точности. Подробнее вопрос получения высокоточных прогнозов будет изучаться в дальнейших работах.

## 6 Заключение

В работе продемонстрировано нарушение марковского свойства для осадков, наблюдаемых в существенно различающихся между собой климатических областях — в Потсдаме и Элисте. Такие сведения о данных, наряду с исследованными в работе [9] статистическими свойствами, представляют базовую информацию, необходимую для дальнейшего корректного построения вероятностных моделей, в частности для распределений объемов экстремальных осадков [7].

Для анализа вероятностного поведения процесса выпадения осадков и построения прогнозов предложено использование цепочек событий (паттернов), выделенных из данных. При этом статистические процедуры автоматизированы с использованием программных инструментов пакета MATLAB. В качестве альтернативного инструмента

прогнозирования на основе паттернов были использованы нейронные сети с учетом сезонности, двумя скрытыми слоями нейронов и сигмоидной функцией активации, реализованные с помощью средств языка PHP.

В качестве одного из направлений дальнейших исследований можно предложить переход от двоичной модели дискретизации событий к  $k$ -ичной. Это позволит решать более сложные задачи вероятностного прогнозирования, например можно предсказывать величину осадков в терминах попадания в тот или иной диапазон (соответствующие интервалы формируются с учетом значений квантилей распределения для объемов, см., например, статьи [13, 14]).

Работа с паттернами представляет интерес с точки зрения верификации ансамблей прогнозов — например, европейские климатологические агентства достаточно точно предсказывают общий объем осадков, который выпадет за некоторый период, но остается актуальной задача определения структуры его распределения по дням. Кроме того, данная методология может быть использована для прогнозирования поведения моментных характеристик (математическое ожидание, дисперсия, коэффициенты асимметрии и эксцесса) конечных смесей вероятностных распределений [15] для определения направления изменения тренда (аналогия со случайным блужданием), например в рамках моделирования физических [16] и иных процессов.

Методы прогнозирования на основе нейронных сетей вполне могут быть включены в состав комплекса стохастического анализа данных [17, 18] как отдельный элемент. При этом наибольший интерес представляет использование алгоритмов EM (expectation-maximization) типа, прежде всего сеточных [19, 20], в процессе обучения.

Для классического EM-алгоритма ранее продемонстрированы определенные успехи (см., например, статьи [21, 22]) в рамках такого использования, кроме того, установлена взаимосвязь обобщенного EM-алгоритма с методами обучения нейронных сетей [23], однако для сеточных модификаций результаты (как теоретические, так и эмпирические) отсутствуют.

Стоит отметить, что расширение функциональных возможностей упомянутого комплекса стохастического анализа данных с точки зрения включения в пользовательский интерфейс [15] новых методов предусмотрено за счет реализации в ее рамках специализированного фреймворка [24].

Автор выражает признательность члену-корреспонденту РАН, доктору физико-математических наук, профессору Сергею Константиновичу Гулеву



за предоставленные данные, доктору физико-математических наук, профессору Виктору Юрьевичу Королеву за полезные обсуждения в рамках совместных исследований метеорологических явлений и Виктору Кузьмину за помощь в реализации обучения нейронных сетей.

## Литература

1. *Strauch M., Bernhofer C., Koide S., Volk M., Lorz C., Makeschin F.* Using precipitation data ensemble for uncertainty analysis in SWAT streamflow simulation // *J. Hydrol.*, 2012. Vol. 414. P. 413–424.
2. *Krzysztofowicz R.* The case for probabilistic forecasting in hydrology // *J. Hydrol.*, 2001. Vol. 249. Iss. 1–4. P. 2–9.
3. *Pinson P., Madsen H., Nielsen H. A., Papaefthymiou G., Klockl B.* From probabilistic forecasts to statistical scenarios of short-term wind power production // *Wind Energy*, 2009. Vol. 12. Iss. 1. P. 51–62.
4. *Gneiting T., Balabdaoui F., Raftery A. E.* Probabilistic forecasts, calibration and sharpness // *J. Roy. Stat. Soc. B*, 2007. Vol. 69. P. 243–268.
5. *Kharin V. V., Zwiers F. W., Zhang X., Hegerl G. C.* Changes in temperature and precipitation extremes in the IPCC ensemble of global coupled model simulations // *J. Climate*, 2007. Vol. 20. Iss. 8. P. 1419–1444.
6. *Zolina O., Simmer C., Kapala A., Gulev S. K.* On the robustness of the estimates of centennial-scale variability in heavy precipitation from station data over Europe // *Geophys. Res. Lett.*, 2005. Vol. 32. P. L14707-1–L14707-5.
7. *Королев В. Ю., Горшенин А. К.* О распределении вероятностей экстремальных осадков // *Докл. РАН*, 2017. Т. 477. Вып. 5. С. 604–609.
8. *Zolina O., Simmer C., Belyaev K., Gulev S., Koltermann P.* Changes in the duration of European wet and dry spells during the last 60 years // *J. Climate*, 2013. Vol. 26. P. 2022–2047.
9. *Korolev V. Yu., Gorshenin A. K., Gulev S. K., Belyaev K. P., Grusho A. A.* Statistical analysis of precipitation events // *AIP Conf. Proc.*, 2017. Vol. 1863. P. 090011-1–090011-4.
10. *Gould P. G., Koehler A. B., Ord J. K., Snyder R. D., Hyndman R. J., Vahid-Araghi F.* Forecasting time series with multiple seasonal patterns // *Eur. J. Oper. Res.*, 2008. Vol. 191. Iss. 1. P. 207–222.
11. *Abaurrea J.* Forecasting local daily precipitation patterns in a climate change scenario // *Clim. Res.*, 2005. Vol. 28. Iss. 3. P. 183–197.
12. *Stora J. E., Cheung K. F., Tolman H. L., Chawla A.* Patterns and cycles in the Climate Forecast System Reanalysis wind and wave data // *Ocean Model.*, 2013. Vol. 70. P. 207–220.
13. *Zolina O., Simmer C., Belyaev K., Kapala A., Gulev S. K.* Improving estimates of heavy and extreme precipitation using daily records from European rain gauges // *J. Hydrometeorol.*, 2009. Vol. 10. P. 701–716.
14. *Горшенин А. К.* О некоторых математических и программных методах построения структурных моделей информационных потоков // *Информатика и её применения*, 2017. Т. 11. Вып. 1. С. 58–68.
15. *Gorshenin A., Kuzmin V.* On an interface of the online system for a stochastic analysis of the varied information flows // *AIP Conf. Proc.*, 2016. Vol. 1738. P. 220009-1–220009-4.
16. *Батанов Г. М., Горшенин А. К., Королев В. Ю., Малахов Д. В., Скворцова Н. Н.* Эволюция вероятностных характеристик низкочастотной турбулентности плазмы в микроволновом поле // *Математическое моделирование*, 2011. Т. 23. № 5. С. 35–55.
17. *Gorshenin A., Kuzmin V.* Online system for the construction of structural models of information flows // *7th Congress (International) on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops Proceedings*. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2015. P. 216–219.
18. *Gorshenin A. K., Kuzmin V. Yu.* Research support system for stochastic data processing // *Pattern Recogn. Image Anal.*, 2017. Vol. 27. No. 3. P. 518–524.
19. *Gorshenin A., Korolev V., Kuzmin V., Zeifman A.* Coordinate-wise versions of the grid method for the analysis of intensities of non-stationary information flows by moving separation of mixtures of gamma-distribution // *27th European Conference on Modelling and Simulation Proceedings*. — Dudweiler, Germany: Digitaldruck Pirrot GmbH, 2013. P. 565–568.
20. *Gorshenin A., Korolev V.* Modelling of statistical fluctuations of information flows by mixtures of gamma distributions // *27th European Conference on Modelling and Simulation Proceedings*. — Dudweiler, Germany: Digitaldruck Pirrot GmbH, 2013. P. 569–572.
21. *De Freitas J., Niranjan M., Gee A.* Dynamic learning with the EM algorithm for neural networks // *J. VLSI Sig. Proc. Syst.*, 2000. Vol. 26. Iss. 1–2. P. 119–131.
22. *Ng S. K., McLachlan G. J.* Using the EM algorithm to train neural networks: Misconceptions and a new algorithm for multiclass classification // *IEEE T. Neural Networ.*, 2004. Vol. 15. Iss. 3. P. 738–749.
23. *Audhkhasi K., Osoba O., Kosko B.* Noise-enhanced convolutional neural networks // *Neural Networks*, 2016. Vol. 78. P. 15–23.
24. *Горшенин А. К., Кузьмин В. Ю.* Фреймворк вычислительной части системы поддержки научных исследований. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017617610 от 11.07.2017.

Поступила в редакцию 20.10.17

# PATTERN-BASED ANALYSIS OF PROBABILISTIC AND STATISTICAL CHARACTERISTICS OF EXTREME PRECIPITATION

A. K. Gorshenin<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilova Str., Moscow 119333, Russian Federation

<sup>2</sup>P. P. Shirshov Institute of Oceanology of the Russian Academy of Sciences, 36 Nakhimovski Prosp., Moscow 117997, Russian Federation

**Abstract:** Precipitations are the key parameters of hydrological models; so, research related to precipitation processes is necessary for solving various applied problems. The paper demonstrates a violation of the Markov property for precipitation observed in essentially different climatic regions — in the cities of Potsdam and Elista. Such information about the data, along with previously studied properties, represents the basic information which is necessary for the further correct construction of probabilistic models, in particular, for probability distribution of the volumes of extreme precipitation. For the analysis of the probabilistic behavior of the precipitation process and the construction of forecasts, it is suggested to use chains of events (patterns) extracted from the data. At the same time, statistical procedures are automated using the software tools of the MATLAB package. Neural networks were used as an alternative forecasting tool based on patterns, and the best results were demonstrated via the architecture that takes into account a seasonality, has two hidden layers of neurons and a sigmoid activation function. The ideas for further research in this field are suggested.

**Keywords:** precipitations; patterns; forecast; neural networks; probabilistic forecasting; Markov property

**DOI:** 10.14357/19922264170405

## Acknowledgments

The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects 17-07-00851, 15-07-04040, and 15-07-05316).

## References

1. Strauch, M., C. Bernhofer, S. Koide, M. Volk, C. Lorz, and F. Makeschin. 2012. Using precipitation data ensemble for uncertainty analysis in SWAT streamflow simulation. *J. Hydrol.* 414:413–424.
2. Krzysztofowicz, R. 2001. The case for probabilistic forecasting in hydrology. *J. Hydrol.* 249(1-4):2–9.
3. Pinson, P., H. Madsen, H. A. Nielsen, G. Papaefthymiou, and B. Klockl. 2009. From probabilistic forecasts to statistical scenarios of short-term wind power production. *Wind Energy* 12(1):51–62.
4. Gneiting, T., F. Balabdaoui, and A. E. Raftery. 2007. Probabilistic forecasts, calibration and sharpness. *J. Roy. Stat. Soc. B* 69:243–268.
5. Kharin, V. V., F. W. Zwiers, X. Zhang, and G. C. Hegerl. 2007. Changes in temperature and precipitation extremes in the IPCC ensemble of global coupled model simulations. *J. Climate* 20(8):1419–1444.
6. Zolina, O., C. Simmer, A. Kapala, and S. K. Gulev. 2005. On the robustness of the estimates of centennial-scale variability in heavy precipitation from station data over Europe. *Geophys. Res. Lett.* 32:L14707-1–L14707-5.
7. Korolev, V. Yu., and A. K. Gorshenin. 2017. O raspredelenii veroyatnostey ekstremal'nykh osadkov [The probability distribution of extremal precipitations]. *Dokl. RAN [Dokl. Earth Sci.]* 477(2):1461–1466.
8. Zolina, O., C. Simmer, K. Belyaev, S. Gulev, and P. Koltermann. 2013. Changes in the duration of European wet and dry spells during the last 60 years. *J. Climate* 26:2022–2047.
9. Korolev, V. Yu., A. K. Gorshenin, S. K. Gulev, K. P. Belyaev, and A. A. Grusho. 2017. Statistical analysis of precipitation events. *AIP Conf. Proc.* 1863:090011-1–090011-4.
10. Gould, P. G., A. B. Koehler, J. K. Ord, R. D. Snyder, R. J. Hyndman, and F. Vahid-Araghi. 2008. Forecasting time series with multiple seasonal patterns. *European J. Oper. Res.* 191(1):207–222.
11. Abaurrea, J. 2005. Forecasting local daily precipitation patterns in a climate change scenario. *Clim. Res.* 28(3):183–197.
12. Stopa, J. E., K. F. Cheung, H. L. Tolman, and A. Chawla. 2013. Patterns and cycles in the Climate Forecast System Reanalysis wind and wave data. *Ocean Model.* 70:207–220.
13. Zolina, O., C. Simmer, K. Belyaev, A. Kapala, and S. K. Gulev. 2009. Improving estimates of heavy and extreme precipitation using daily records from European rain gauges. *J. Hydrometeorol.* 10:701–716.
14. Gorshenin, A. K. 2017. O nekotorykh matematicheskikh i programnykh metodakh postroeniya strukturnykh

- modeley informatsionnykh potokov [On some mathematical and programming methods for construction of structural models of information flows]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 11(1):58–68.
15. Gorshenin, A., and V. Kuzmin. 2016. On an interface of the online system for a stochastic analysis of the varied information flows. *AIP Conf. Proc.* 1738:220009-1–220009-4.
  16. Batanov, G. M., A. K. Gorshenin, V. Yu. Korolev, D. V. Malakhov, and N. N. Skvortsova. 2012. The evolution of probability characteristics of low-frequency plasma turbulence. *Math. Models Computer Simulations* 4(1):10–25.
  17. Gorshenin, A. K., and V. Kuzmin. 2015. Online system for the construction of structural models of information flows. *7th Congress (International) on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 216–219.
  18. Gorshenin, A. K., and V. Yu. Kuzmin. 2017. Research support system for stochastic data processing. *Pattern Recogn. Image Anal.* 27(3):518–524.
  19. Gorshenin, A. K., V. Korolev, V. Kuzmin, and A. Zeifman. 2013. Coordinate-wise versions of the grid method for the analysis of intensities of non-stationary information flows by moving separation of mixtures of gamma-distribution. *27th European Conference on Modelling and Simulation Proceedings*. Dudweiler, Germany: Digitaldruck Pirrot GmbH. 565–568.
  20. Gorshenin A. K., and V. Korolev. 2013. Modelling of statistical fluctuations of information flows by mixtures of gamma distributions. *27th European Conference on Modelling and Simulation Proceedings*. Dudweiler, Germany: Digitaldruck Pirrot GmbH. 569–572.
  21. De Freitas, J., M. Niranjan, and A. Gee. 2000. Dynamic learning with the EM algorithm for neural networks. *J. VLSI Sig. Proc. Syst.* 26(1-2):119–131.
  22. Ng, S. K., and G. J. McLachlan. 2004. Using the EM algorithm to train neural networks: Misconceptions and a new algorithm for multiclass classification. *IEEE T. Neural Networ.* 15(3):738–749.
  23. Audhkhasi, K., O. Osoba, and B. Kosko. 2016. Noise-enhanced convolutional neural networks. *Neural Networks* 78:15–23.
  24. Gorshenin, A. K., and V. Yu. Kuzmin. 2017. Freymvork vychislitel'noy chasti sistemy podderzhki nauchnykh issledovaniy [Framework for computational part of scientific research support system]. Certificate RF of state registration of computer programs No. 2017617610.

*Received October 20, 2017*

## Contributor

**Gorshenin Andrey K.** (b. 1986) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, leading scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilova Str., Moscow 119333, Russian Federation; senior scientist, P. P. Shirshov Institute of Oceanology of the Russian Academy of Sciences, 36 Nakhimovski Prosp., Moscow 117997, Russian Federation [agorshenin@frcsc.ru](mailto:agorshenin@frcsc.ru)

# МЕТОД АНАЛИЗА ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ УЯЗВИМОСТИ ПОТОКОВЫХ СЕТЕВЫХ СИСТЕМ

Ю. Е. Малашенко<sup>1</sup>, И. А. Назарова<sup>2</sup>, Н. М. Новикова<sup>3</sup>

**Аннотация:** Рассматриваются математические методы анализа сетевых систем, предназначенных для передачи потоков взаимозаменяемых продуктов различным пользователям. Для описания процессов, происходящих в системе, используется модель однопродуктовой сети. В соответствии с методологией исследования операций изучаются изменения функциональных характеристик системы после целенаправленных разрушающих воздействий. Предлагается способ получения гарантированных оценок ущерба для каждого из равноправных пользователей при полном разрушении физических и логических элементов системы. Оценки формируются на основании решения последовательности задач векторной оптимизации с лексикографическим минимаксным критерием. При определении стратегии перераспределения потоков используется апостериорная информация об изменениях пропускных способностей сети.

**Ключевые слова:** однопродуктовая потоковая сеть; функциональная уязвимость; оценка ущерба; принцип гарантированного результата

**DOI:** 10.14357/19922264170406

## 1 Введение

Сетевые системы являются уязвимыми по отношению к целенаправленным разрушающим воздействиям. Распределенные на больших территориях нефте- и газопроводы, системы связи и электроэнергетики трудно защитить от террористических угроз и природных катаклизмов. В связи с этим активно развивается раздел прикладной математики, связанный с исследованием уязвимости реальных сетей. Обзор классических моделей и подходов к изучению уязвимости однопродуктовой сети можно найти, например, в [1].

В настоящей работе для анализа изменений значений функциональных характеристик потоковых сетевых систем [2] и оценки ущерба от повреждений используется методология исследования операций. Предполагается, что разрушающее воздействие носит целенаправленный характер, а атакующая сторона располагает полной информацией о структуре сетевой системы и стремится причинить максимально возможный ущерб. Однако в общем случае как цели атаки, так и оценка возможных последствий противником неизвестны. В этих условиях обороняющаяся сторона должна оценивать ущерб по своим критериям и рассматривать все возможные повреждения. В рамках модельных построений

предполагается, что после возмущающего воздействия будет доступна вся информация о повреждениях и система управления способна перераспределить потоки в сети так, чтобы минимизировать потери. При оценке ущерба решается последовательность минимаксных задач, что позволяет получить «справедливое» распределение (N-ядро) ограниченных ресурсов среди равноправных пользователей. Наборы оптимальных решений являются гарантированными оценками функциональных характеристик поврежденной сети.

## 2 Модель сети

Рассмотрим проблему оценки ущерба пользователей потоковой системы после крупномасштабных возмущений и/или целенаправленных разрушающих воздействий. Для формализации такой системы введем обозначения, которые используются при описании потоковых моделей [3]. Пусть сеть передачи единственного вида продукта, или однопродуктовая многополюсная сетевая система, задается ориентированным графом  $\vec{G} = \langle \vec{V}, \vec{L} \rangle$  без петель, который определяется множеством вершин (узлов)  $\vec{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ , где  $|\vec{V}| = N$ ,  $\mathcal{N}$  — множество индексов вершин, и множеством на-

<sup>1</sup>Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, malash09@ccas.ru

<sup>2</sup>Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, irina-nazar@yandex.ru

<sup>3</sup>Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, n\_novikova@umail.ru

правленных дуг  $\bar{\mathcal{L}} = \{l_{ij} \mid i \in \mathcal{N}, j \in \mathcal{N}, i \neq j\}$ , соединяющих вершины. Здесь  $l_{ij} = (v_i, v_j)$  — дуга, ведущая из вершины  $v_i$  в вершину  $v_j$ ,  $|\bar{\mathcal{L}}| = L$ .

Обозначим через  $\mathcal{V}_S$  и  $\mathcal{V}_K$  множества вершин графа  $\bar{\mathcal{G}}$ , которые являются соответственно источниками и стоками для потока, который передается по многополюсной сети;  $\mathcal{N}_S$  и  $\mathcal{N}_K$  — множество индексов вершин-источников и вершин-стоков. Тогда  $\mathcal{V}_S = \{v_i \mid i \in \mathcal{N}_S\}$ ,  $|\mathcal{V}_S| = S$ ,  $\mathcal{V}_S \subset \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{N}_S \subset \mathcal{N}$ ,  $S \geq 1$ ,  $\mathcal{V}_K = \{v_i \mid i \in \mathcal{N}_K\}$ ,  $|\mathcal{V}_K| = K$ ,  $\mathcal{V}_K \subset \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{N}_K \subset \mathcal{N}$ ,  $K \geq 1$ ,  $\mathcal{V}_S \cap \mathcal{V}_K = \emptyset$ . Считается, что на дугах графа  $\bar{\mathcal{G}}$  заданы веса — значения  $d_{ij}$  пропускной способности дуг  $l_{ij}$ . Вектор  $d$  ограничивает величину потока по дугам,  $d = \{d_{ij} \mid d_{ij} \geq 0, l_{ij} \in \bar{\mathcal{L}}\}$ .

Для того чтобы свести многополюсную модель к модели однопродуктовой сети с единственной парой источник–сток, в граф  $\bar{\mathcal{G}}$  введем следующие вершины:

$v_0$  — единственный источник потока бесконечной мощности и дуги  $(v_0, v_j)$ ,  $j \in \mathcal{N}_S$ , соединяющие  $v_0$  с каждым узлом-источником. Для каждой дуги  $l_{0j}$  определим верхнее ограничение  $d_{0j}$ , которое соответствует величине максимального потока из  $v_0$  в систему. Назовем дуги  $(v_0, v_j)$ ,  $j \in \mathcal{N}_S$ , дугами-источниками и обозначим их множество через  $\hat{\mathcal{L}} = \{l_{0j} \mid j \in \mathcal{N}_S\}$ ,  $|\hat{\mathcal{L}}| = S$ ;

$v_{N+1}$  — единственный узел-сток бесконечного объема и дуги  $(v_i, v_{N+1})$ ,  $i \in \mathcal{N}_K$ , соединяющие каждый узел-сток с  $v_{N+1}$ . Для каждой дуги  $l_{i,N+1}$  определим верхнее ограничение  $d_{i,N+1}$ , которое соответствует величине максимального потока из системы в  $v_i$ . По предположению значение  $d_{i,N+1}$  задает верхний предел для величины потока, который покидает систему через узел  $v_i$ . Назовем дуги  $(v_i, v_{N+1})$ ,  $i \in \mathcal{N}_K$ , дугами-стоками или стоковыми дугами и обозначим их множество через  $\hat{\mathcal{L}} = \{l_{i,N+1} \mid i \in \mathcal{N}_K\}$ ,  $|\hat{\mathcal{L}}| = K$ . Ориентированный граф, который определяется множествами вершин  $\mathcal{V} = \bar{\mathcal{V}} \cup \{v_0, v_{N+1}\}$  и дуг  $\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}} \cup \hat{\mathcal{L}}$ , обозначим  $\mathcal{G} = \langle \mathcal{V}, \mathcal{L} \rangle$ .

Для графа  $\mathcal{G}$  введем обозначения:

$x_{ij}$  — поток по дуге  $l_{ij}$ ,  $l_{ij} \in \mathcal{L}$ , протекающий в соответствии с ее направлением;

$\mathcal{N}_j^-$  — множество индексов узлов-предшественников  $j$ -го (узлов, из которых исходят дуги, ведущие в  $j$ -й узел),  $\mathcal{N}_j^- \subset \mathcal{N} \cup \{0\}$ ;

$\mathcal{N}_j^+$  — множество индексов узлов-последователей  $j$ -го (узлов, в которые ведут дуги, исходящие из  $j$ -го узла),  $\mathcal{N}_j^+ \subset \mathcal{N} \cup \{N+1\}$ .

Поток  $x = \langle x_{0j}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{i,N+1} \rangle$ , где

$$i \in \mathcal{N} \cup \{0\}, j \in \mathcal{N} \cup \{N+1\}, i \neq j,$$

$$l_{ij} \in \mathcal{L}, \text{ и если } i = 0, \text{ то } j \neq N+1, \quad (1)$$

проходящий по дугам  $l_{ij} \in \mathcal{L}$ , должен удовлетворять:

– условию сохранения потока в транзитных узлах, т. е.

$$\sum_{i \in \mathcal{N}_j^-} x_{ij} = \sum_{i \in \mathcal{N}_j^+} x_{ji}, \quad j \in \mathcal{N}; \quad (2)$$

– ограничению на пропускную способность соответствующих дуг, т. е.

$$0 \leq x_{ij} \leq d_{ij}, \quad l_{ij} \in \mathcal{L}, \text{ для } i, j \text{ выполняется (1)}. \quad (3)$$

Обозначим через  $\mathcal{X}$  множество всех допустимых потоков в сети:

$$\mathcal{X} = \{x \mid \text{выполняются (1)–(3)}\}.$$

### 3 Функциональные характеристики однопродуктовой сети

При анализе функциональных возможностей системы будем рассматривать потоки по стоковым дугам. Последние перенумеруем по некоторому правилу натуральными числами от 1 до  $K$  и введем множество  $\mathcal{K}$  номеров стоковых дуг, т. е. установим взаимно однозначное соответствие  $l_k = l_{j,N+1}$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $j \in \mathcal{N}_K$ .

Обозначим через  $d_k$  пропускную способность  $k$ -й стоковой дуги,  $d_k = d_{j,N+1}$ ,  $j \in \mathcal{N}_K$ ,  $k = \overline{1, K}$ ;  $\bar{x}_k$  — поток по  $k$ -й стоковой дуге,  $\bar{x}_k = x_{j,N+1}$ ,  $x_{j,N+1} \geq 0$ ,  $k = \overline{1, K}$ ,  $j \in \mathcal{N}_K$ . Таким образом, вектор  $\bar{x} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, \dots, \bar{x}_K \rangle$ ,  $k = \overline{1, K}$ , покомпонентно определяет величину потока, который передается по каждой стоковой дуге сети в соответствии с некоторым допустимым потоком  $x \in \mathcal{X}$ . Обозначим через  $\bar{\mathcal{X}}$  множество всех допустимых векторов  $\bar{x}$ :

$$\bar{\mathcal{X}} = \{\bar{x} \mid \bar{x}_k = x_{j,N+1}, \quad k = \overline{1, K}, j \in \mathcal{N}_K, x \in \mathcal{X}\}. \quad (4)$$

Множество  $\bar{\mathcal{X}}$  является проекцией множества  $\mathcal{X}$  всех допустимых потоков в сети и множеством допустимых потоков по стоковым дугам.

В рамках формализма потоковой модели будем говорить, что вектор  $\bar{x}$  описывает функциональные возможности однопродуктовой сети при передаче потока  $x$ . Каждый элемент множества  $\bar{\mathcal{X}}$  представляет собой вектор возможных значений функциональных характеристик потоковой сетевой систе-



мы, удовлетворяющий условиям (1)–(4). Множество  $\bar{\mathcal{X}}$  выпукло и описывает функциональные возможности изучаемой однопродуктовой сети. Векторы  $\bar{x}$ , лежащие на границе Парето [4] множества  $\bar{\mathcal{X}}$ , т. е. неулучшаемые ни по одной компоненте без ущерба для других, будем называть предельными значениями функциональных характеристик сети.

Пусть в момент начала наблюдений  $t = 0$  однопродуктовая сеть работает в некотором стационарном режиме. При этом по стоковым дугам передается поток  $\bar{x}^0 = \langle \bar{x}_1^0, \dots, \bar{x}_k^0, \dots, \bar{x}_K^0 \rangle$ ,  $\bar{x}^0 \in \bar{\mathcal{X}}$ ,  $\bar{x}_k^0 > 0$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Вектор  $\bar{x}^0$  будем называть начальной функциональной характеристикой сетевой системы (в момент  $t = 0$ ), а величины компонент  $\bar{x}_k^0$  — исходными значениями  $\bar{x}^0$ .

Будем считать, что за каждой стоковой дугой стоит некий абстрактный пользователь (потребитель), имеющий определенное требование (запрос)  $f_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , на обеспечение продуктом, который передается по сети. Вектор  $f = \langle f_1, \dots, f_k, \dots, f_K \rangle$ ,  $f_k > 0$ ,  $k = \overline{1, K}$ , описывает требования всех потребителей сети. В настоящей модели предполагается, что недопоставка продукта одному пользователю не может быть восполнена за счет поставки дополнительного объема продукта другому пользователю. Указанное предположение делает пользователей сети в определенном смысле равноправными, а их требования и объемы имеющихся потоков — невзаимозаменяемыми. Пусть в момент времени  $t = 0$  для всех стоковых дуг выполняется  $d_k = \bar{x}_k^0 = f_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , т. е. в начале наблюдения за системой все требования на передачу потока соответствуют запросам потребителей и полностью удовлетворяются. Граф с ограничениями на пропускные способности стоковых дуг  $d_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , обозначим через  $\mathcal{G}^0$ .

Определим однопродуктовую двухполюсную сеть  $\mathcal{S}^0$  с помощью ориентированного графа  $\mathcal{G}^0$  и требований  $f$  на передачу потока всех потребителей сети,  $\mathcal{S}^0 = \langle \mathcal{G}^0; f \rangle$ . Перейдем к изучению функциональных характеристик сети  $\mathcal{S}^0$  в условиях разрушающего воздействия, а именно: исследуем изменение величин потоков по стоковым дугам при полном разрушении некоторых элементов  $\mathcal{G}$ .

#### 4 Анализ функциональных характеристик сети после разрушающего воздействия

Пусть стационарно работающая однопродуктовая сеть подвергается разрушающему воздействию (удару)  $\mathcal{W}$ , при котором выходят из строя пол-

ностью несколько дуг  $l_{ij}$  графа  $\mathcal{G}^0$ . В рамках рассматриваемой модели предполагается, что могут быть повреждены любые дуги, кроме стоковых, распределение удара по дугам сети  $\mathcal{S}^0$  заранее не известно, а множество вершин остается неизменным. Считается, что объем потока по стоковым дугам уменьшается в зависимости от степени разрушения сети. Обозначим через  $\mathcal{L}(\mathcal{W})$  множество поврежденных дуг, тогда  $\mathcal{L}(\mathcal{W}) \subset \bar{\mathcal{L}} \cup \hat{\mathcal{L}}$ ,  $\mathcal{L}(\mathcal{W}) \cap \hat{\mathcal{L}} = \emptyset$ ;  $\mathcal{G}(\mathcal{W})$  — граф сети после нанесенного удара;  $\mathcal{S}(\mathcal{W}) = \langle \mathcal{G}(\mathcal{W}); f \rangle$  — сеть, поврежденную разрушающим воздействием  $\mathcal{W}$ . Таким образом, разрушающее воздействие полностью определяется множеством уничтоженных дуг  $\mathcal{L}(\mathcal{W})$ . Пусть  $d(\mathcal{W})$  — вектор пропускной способности дуг поврежденной сети  $\mathcal{S}(\mathcal{W})$ , для каждой компоненты  $d_{ij}(\mathcal{W})$  которого выполняется

$$d_{ij}(\mathcal{W}) = \begin{cases} 0, & \text{если } l_{ij} \in \mathcal{L}(\mathcal{W}); \\ d_{ij}, & \text{если } l_{ij} \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}(\mathcal{W}), \end{cases} \quad (5)$$

$x_{ij}(\mathcal{W})$ , где для  $i, j$  выполняется (1), — поток по дуге  $l_{ij}$  после удара. Тогда перераспределение потоков в сети  $\mathcal{S}(\mathcal{W})$  описывается вектором

$$x(\mathcal{W}) = \langle x_{0j}(\mathcal{W}), \dots, x_{ij}(\mathcal{W}), \dots, x_{i(N+1)}(\mathcal{W}) \rangle$$

при условии, что для номеров  $i, j$  выполняется (1).

Для любых потоков  $x(\mathcal{W})$  в поврежденной сети  $\mathcal{S}(\mathcal{W})$  должны выполняться стандартные ограничения на передачу потока по дуге

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x_{ij}(\mathcal{W}) \leq d_{ij}(\mathcal{W}), \\ l_{ij} \in \mathcal{L}, \\ \text{для } d_{ij}(\mathcal{W}) \text{ выполняется (5),} \\ \text{для } i, j \text{ выполняется (1)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и закон сохранения потока в каждом узле

$$\sum_{i \in \mathcal{N}_j^-} x_{ij}(\mathcal{W}) = \sum_{i \in \mathcal{N}_j^+} x_{ji}(\mathcal{W}), \quad j \in \mathcal{N}. \quad (7)$$

Множество  $\mathcal{X}(\mathcal{W})$  допустимых потоков в поврежденной сети  $\mathcal{S}(\mathcal{W})$  определяется условиями (1), (6) и (7):

$$\mathcal{X}(\mathcal{W}) = \{x(\mathcal{W}) \mid \text{выполняется (1), (6) и (7)}\}.$$

Обозначим  $\bar{x}_k(\mathcal{W})$  — поток по  $k$ -й стоковой дуге после разрушающего воздействия;  $\bar{x}(\mathcal{W})$  — вектор потоков по всем стоковым дугам после удара  $\bar{x}(\mathcal{W}) = \langle \bar{x}_1(\mathcal{W}), \dots, \bar{x}_k(\mathcal{W}), \dots, \bar{x}_K(\mathcal{W}) \rangle$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Множество

$$\bar{\mathcal{X}}(\mathcal{W}) = \{ \bar{x}(\mathcal{W}) \mid \bar{x}_k(\mathcal{W}) = x_{j(N+1)}(\mathcal{W}), \\ k = \overline{1, K}, j \in \mathcal{N}_{\bar{\mathcal{R}}}, x(\mathcal{W}) \in \mathcal{X}(\mathcal{W}) \}$$

описывает функциональные возможности системы после разрушения.

## 5 Оценка ущерба пользователей сети

Анализ функциональных характеристик системы начнем с изучения вопроса о принадлежности исходного вектора  $\bar{x}^0$  множеству допустимых потоков  $\bar{\mathcal{X}}(\mathcal{W})$ . Действительно, если  $\bar{x}^0 \in \bar{\mathcal{X}}(\mathcal{W})$ , то потоки по стоковым дугам остаются прежними, требования пользователей в поврежденной сети могут быть удовлетворены полностью. В этом случае для передачи запрошенного продукта, возможно, просто потребуется другая маршрутизация. В противном случае (если  $\bar{x}^0 \notin \bar{\mathcal{X}}(\mathcal{W})$ ) выполнить сразу все требования невозможно, и потребители несут определенный ущерб в результате разрушения сети.

В разд. 2 было введено понятие вектора исходных функциональных характеристик  $\bar{x}^0$ , для которого покомпонентно  $x_k^0 = f_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ . При анализе ущерба каждую компоненту  $f$  будем трактовать как требование определенного пользователя на восстановление величины соответствующего потока на прежнем уровне и оценивать отклонение возможных значений функциональных характеристик поврежденной сети от исходных.

Введем величину  $u_k(\mathcal{W})$ , численно равную разности между требованием  $k$ -го пользователя и потоком, протекающим по  $k$ -й стоковой дуге после удара:

$$u_k(\mathcal{W}) = f_k - \bar{x}_k(\mathcal{W}) = \bar{x}_k^0 - \bar{x}_k(\mathcal{W}), \quad k = \overline{1, K},$$

которую назовем недопоставкой потока  $k$ -му потребителю, или  $k$ -й недопоставкой. Вектор  $u(\mathcal{W}) = \langle u_1(\mathcal{W}), u_2(\mathcal{W}), \dots, u_k(\mathcal{W}), \dots, u_K(\mathcal{W}) \rangle$  описывает недопоставки всем пользователям сети после разрушающего воздействия.

Назовем ущербом  $k$ -го потребителя отношение величины недопоставки  $u_k(\mathcal{W})$  к соответствующему запрошенному количеству потока  $f_k$  и обозначим эту величину через

$$\varpi_k(\mathcal{W}) = \frac{u_k(\mathcal{W})}{f_k} = \frac{f_k - \bar{x}_k(\mathcal{W})}{f_k}, \quad 0 \leq \varpi_k \leq 1, \quad k = \overline{1, K}.$$

В модели предполагается, что все пользователи равноправны, т. е. в любой момент времени при распределении потоков никакому потребителю не отдается предпочтения. Для оценки ущерба пользователей решим следующую задачу оптимизации.

**Задача C.** Найти  $\min_{x(\mathcal{W}) \in \mathcal{X}(\mathcal{W})} \max_{k=\overline{1, K}} \varpi_k$  при условии

$$\varpi_k = \frac{f_k - \bar{x}_k(\mathcal{W})}{f_k}, \quad 0 \leq \varpi_k \leq 1, \quad k = \overline{1, K}.$$

В задаче C ведется поиск распределения потоков, при котором минимизируется максимальный ущерб любого пользователя. Последнее означает, что максимальное отклонение величины любого потока по стоковой дуге от начальной (в процентном отношении) должно быть минимальным. Решение задачи C эквивалентно решению следующей задачи минимизации [5] — поиска наименьшего гарантированного ущерба.

**Задача C<sub>1</sub>.** Найти  $\min_{x(\mathcal{W}) \in \mathcal{X}(\mathcal{W}), \omega} \omega$  при условиях

$$\left. \begin{aligned} \omega &\geq \frac{f_k - \bar{x}_k(\mathcal{W})}{f_k}, \quad k = \overline{1, K}; \\ 0 &\leq \omega \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Пусть в результате решения задачи C<sub>1</sub> получено оптимальное значение параметра  $\omega$

$$\omega^* = \min_{(x(\mathcal{W}) \in \mathcal{X}(\mathcal{W}), \omega) \in (8)} \omega.$$

Если в процессе решения задачи C<sub>1</sub> найден наименьший гарантированный ущерб потребителей  $\omega^* = 0$ , то, несмотря на разрушающее воздействие, исходный вектор потоков  $\bar{x}^0$  принадлежит множеству  $\bar{\mathcal{X}}$ . Если  $\omega^* = 1$ , то разрушен разрез графа  $\bar{\mathcal{G}}$ , разделяющий хотя бы одну пару источник–сток.

Далее рассмотрим промежуточный вариант. Пусть решение задачи C<sub>1</sub>:

$$\omega^* = \omega_1^*; \quad 0 < \omega_1^* < 1, \quad (9)$$

тогда начальный вектор  $\bar{x}^0$  не принадлежит множеству  $\bar{\mathcal{X}}$ , а вектор значений предельных функциональных характеристик  $\bar{x}^*(\mathcal{W})$  будет лежать на границе Парето множества  $\bar{\mathcal{X}}(\mathcal{W})$ . Перейдем к построению вектора  $\bar{x}^*(\mathcal{W})$ .

Формально выполнение (9) означает, что существует непустое подмножество номеров стоковых дуг  $\bar{\mathcal{K}}_1^*, \bar{\mathcal{K}}_1^* \subseteq \mathcal{K}$ , для которых ущерб в точности равен  $\omega_1^*$ . И этот ущерб невозможно уменьшить, не нарушив соотношения  $\omega_k \leq \omega_1^*$  хотя бы для одного номера  $k \in \mathcal{K}$ :

$$\bar{\mathcal{K}}_1^* = \left\{ k \in \mathcal{K} \mid \frac{f_k - \bar{x}_k^1(\mathcal{W})}{f_k} = \omega_1^* \right.$$

$$\left. \forall \bar{x}^1(\mathcal{W}) : (\bar{x}^1(\mathcal{W}), \omega_1^*) \in \text{Arg} \min_{(x(\mathcal{W}) \in \mathcal{X}(\mathcal{W}), \omega) \in (8)} \omega \right\}.$$

Множество  $\bar{\mathcal{K}}_1^*$  для задачи C<sub>1</sub> можно построить, решив серию задач линейного программирования [6, 7].

Стоковые дуги, индексы которых входят в множество  $\bar{\mathcal{K}}_1^*$ , назовем дугами (или пользователями)

с ущербом первого уровня. Если  $\bar{\mathcal{K}}_1^* = \mathcal{K}$ , то относительный ущерб одинаков для всех пользователей. Если  $\bar{\mathcal{K}}_1^* \neq \mathcal{K}$ , то найдутся стоковые дуги, поток по которым можно повысить без увеличения ущерба для потребителей с первым уровнем. Для поиска таких стоковых дуг зафиксируем потери для пользователей с индексами из множества  $\bar{\mathcal{K}}_1^*$  на уровне  $\omega_1^*$  и для  $\bar{\mathcal{K}}_1 = \mathcal{K} \setminus \bar{\mathcal{K}}_1^*$  решим следующую задачу.

**Задача  $C_2$ .** Найти  $\min_{x(\mathcal{W}) \in \mathcal{X}(\mathcal{W}), \omega} \omega$  при выполнении

$$\left. \begin{aligned} \omega &\geq \frac{f_k - \bar{x}_k(\mathcal{W})}{f_k}, \quad k \in \bar{\mathcal{K}}_1; \\ 0 &\leq \omega \leq 1; \\ \frac{f_k - \bar{x}_k(\mathcal{W})}{f_k} &= \omega_1^*, \quad k \in \bar{\mathcal{K}}_1^*. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Пусть  $\omega_2^*$  — значение минимума в этой задаче. Аналогично множеству  $\bar{\mathcal{K}}_1^*$  построим множество  $\bar{\mathcal{K}}_2^*$  стоковых дуг-потребителей, для которых

$$\bar{\mathcal{K}}_2^* = \left\{ k \in \bar{\mathcal{K}}_1 \mid \frac{f_k - \bar{x}_k^2(\mathcal{W})}{f_k} = \omega_2^* \forall \bar{x}^2(\mathcal{W}) : \right. \\ \left. (\bar{x}^2(\mathcal{W}), \omega_2^*) \in \text{Arg} \min_{(x(\mathcal{W}) \in \mathcal{X}(\mathcal{W}), \omega) \in (10)} \omega \right\}.$$

Назовем стоковые дуги, индексы которых входят в множество  $\bar{\mathcal{K}}_2^*$ , дугами (или потребителями) с ущербом второго уровня.

Если  $\bar{\mathcal{K}}_1^* \cup \bar{\mathcal{K}}_2^* = \mathcal{K}$ , то решение задачи завершено. В частности, если гарантированный ущерб потребителей из  $\bar{\mathcal{K}}_2^*$  не равен нулю, то ущерб любого потребителя соответствует либо первому, либо второму уровню (в случае, когда  $\omega_2^* = 0$ , пользователи из  $\bar{\mathcal{K}}_2^*$  не пострадали). Если  $\bar{\mathcal{K}}_1^* \cup \bar{\mathcal{K}}_2^* \neq \mathcal{K}$ , то продолжим построения, определив пользователей с третьим и, если потребуется, с последующими уровнями ущерба. На шаге  $p$  решается следующая задача.

**Задача  $C_p$ .** Найти  $\min_{x(\mathcal{W}) \in \mathcal{X}(\mathcal{W}), \omega} \omega$  при условиях

$$\left. \begin{aligned} \omega &\geq \frac{f_k - \bar{x}_k(\mathcal{W})}{f_k}, \quad k \in \bar{\mathcal{K}}_{p-1}, \\ \bar{\mathcal{K}}_{p-1} &= \mathcal{K} \setminus \bigcup_{n=1}^{p-1} \bar{\mathcal{K}}_n^*, \quad \bar{\mathcal{K}}_0 = \mathcal{K}; \\ 0 &\leq \omega \leq 1; \\ \frac{f_k - \bar{x}_k(\mathcal{W})}{f_k} &= \omega_n^*, \quad k \in \bar{\mathcal{K}}_n^*, \quad n = \overline{1, p-1}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В ходе ее решения формируется множество  $\bar{\mathcal{K}}_p^*$  стоковых дуг, или список потребителей  $p$ -го уровня ущерба:

$$\bar{\mathcal{K}}_p^* = \left\{ k \in \bar{\mathcal{K}}_{p-1} \mid \frac{f_k - \bar{x}_k^p(\mathcal{W})}{f_k} = \omega_p^* \forall \bar{x}^p(\mathcal{W}) : \right. \\ \left. (\bar{x}^p(\mathcal{W}), \omega_p^*) \in \text{Arg} \min_{(x(\mathcal{W}) \in \mathcal{X}(\mathcal{W}), \omega) \in (11)} \omega \right\},$$

где  $\omega_p^*$  — оптимальное значение для задачи  $C_p$ .

Поскольку число стоковых дуг в сети конечно, то через конечное число  $P$  шагов,  $P \leq |\mathcal{K}|$ , будет исчерпано все множество стоковых дуг, т. е.  $\bar{\mathcal{K}}_P^*$  совпадет с  $\bar{\mathcal{K}}_{P-1} = \mathcal{K} \setminus \bigcup_{n=1}^{P-1} \bar{\mathcal{K}}_n^*$  и  $\bar{\mathcal{K}}_P = \emptyset$ . В результате будет построено множество  $\mathcal{X}^*(\mathcal{W})$  потоков, реализующих последовательный лексикографический минимакс уровня ущерба потребителей и, следовательно, удовлетворяющих условию равноправной оптимальности:

$$\bar{\mathcal{X}}^*(\mathcal{W}) = \text{Arg} \min \left\{ \max_{k \in \bar{\mathcal{K}}_{P-1}} \frac{f_k - \bar{x}_k^{P-1}(\mathcal{W})}{f_k} \right\}; \\ \bar{x}^{P-1}(\mathcal{W}) \in \text{Arg} \min \left\{ \max_{k \in \bar{\mathcal{K}}_{P-2}} \frac{f_k - \bar{x}_k^{P-2}(\mathcal{W})}{f_k} \right\}; \\ \dots \\ \bar{x}^1(\mathcal{W}) \in \text{Arg} \min_{x(\mathcal{W}) \in \mathcal{X}(\mathcal{W})} \left\{ \max_{k \in \mathcal{K}} \frac{f_k - \bar{x}_k(\mathcal{W})}{f_k} \right\}.$$

Процесс построения оптимальных потоков остановится на  $P$ -м шаге, как только окажется, что множество всех стоковых дуг исчерпано. Тогда ущерб последней группы потребителей будет равен оптимальному значению параметра  $\omega_p^*$ . В частности, если гарантированный ущерб отдельных потребителей окажется равным нулю, то их требования на передачу исходного потока в разрушенной сети удовлетворяются полностью. Отметим, что из условия  $d_k = \bar{x}_k^0 = f_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ , следует, что потребитель не может получить продукта больше, чем исходные значения потока.

Результатами решения задач  $C_1 - C_P$  являются вектор  $\bar{\omega}^* = \langle \omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_P^* \rangle$ , который определяет гарантированный ущерб для всех пользователей поврежденной сети, и эффективный вектор потоков  $\bar{x}^*(\mathcal{W})$ , лежащий на границе Парето множества  $\bar{\mathcal{X}}(\mathcal{W})$ .

На рисунке схематично изображен процесс поиска оптимального вектора потоков  $\bar{x}^*(\mathcal{W})$  для  $K = 2$ . Здесь по осям отложены значения потоков по двум стоковым дугам. Граница множества допустимых векторов — потоков по стоковым дугам до нанесения удара  $\bar{\mathcal{X}}$  — обозначена штрихпунктирной линией, множество  $\bar{\mathcal{X}}$  заштриховано линиями с убыванием вправо. Вектор  $(\overline{OE})$  описывает требования на передачу потока в неповрежденной сети. Граница множества  $\bar{\mathcal{X}}(\mathcal{W})$  — допустимых векторов потоков по стоковым дугам после нанесения удара





## 6 Ущерб и обеспеченность требований пользователей

Согласно [7] для определения величины наилучшей меры обеспеченности требований пользователей сети сразу после удара необходимо решить следующую задачу оптимизации.

**Задача В.** Найти  $\max_{x(\mathcal{W}) \in \mathcal{X}(\mathcal{W})} \min_{k=\overline{1, K}} \eta_k$  при условии

$$\eta_k = \frac{\overline{x}_k(\mathcal{W})}{f_k}, \quad 0 \leq \eta_k \leq 1, \quad k = \overline{1, K},$$

или эквивалентную ей [5] следующую задачу линейного программирования.

**Задача В<sub>1</sub>.** Найти  $\max_{x(\mathcal{W}) \in \mathcal{X}(\mathcal{W}), \theta} \theta$  при условии

$$\theta \leq \frac{\overline{x}_k(\mathcal{W})}{f_k}, \quad k = \overline{1, K};$$

$$0 \leq \theta \leq 1.$$

Процесс построения оптимального решения последовательности задач  $B_1$ – $B_P$  и соответствующие рассуждения полностью повторяют построения и рассуждения при решении задач  $C_1$ – $C_P$ .

Результатом решения задач  $B_1$ – $B_P$  является вектор  $\vec{\theta}^* = \langle \theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_P^* \rangle$ , который определяет гарантированную обеспеченность требований пользователей поврежденной сети и эффективный вектор потоков  $\overline{x}^*(\mathcal{W})$ , лежащий на границе множества  $\overline{\mathcal{X}}(\mathcal{W})$ .

Рассмотрим связь между оптимальным вектором обеспеченности требований  $\vec{\theta}^*$  и вектором ущерба пользователей  $\vec{\omega}^*$ .

Перепишем первое условие задачи  $C_1$  в (7) следующим образом:

$$\omega \geq \frac{f_k - \overline{x}_k(\mathcal{W})}{f_k} = 1 - \frac{\overline{x}_k(\mathcal{W})}{f_k}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Далее в условиях (7) поменяем местами  $\omega$  и  $\overline{x}_k(\mathcal{W})/f_k$ , а также заменим знак:

$$\left. \begin{aligned} 1 - \omega &\leq \frac{\overline{x}_k(\mathcal{W})}{f_k}, \quad k = \overline{1, K}, \\ 0 &\leq \omega \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Введем параметр  $\delta = 1 - \omega$ , для которого в силу неравенства  $0 \leq \omega \leq 1$  также верно  $0 \leq \delta \leq 1$ . Поскольку

$$\begin{aligned} \min_{x(\mathcal{W}) \in \mathcal{X}(\mathcal{W})} \omega &= \min_{x(\mathcal{W}) \in \mathcal{X}(\mathcal{W})} (1 - \delta) = \\ &= 1 + \min_{x(\mathcal{W}) \in \mathcal{X}(\mathcal{W})} (-\delta) = 1 - \max_{x(\mathcal{W}) \in \mathcal{X}(\mathcal{W})} \delta, \end{aligned}$$

то при условии выполнения (16) решения задач  $B_1$  и  $C_1$  связаны соотношением:

$$\omega^* = 1 - \theta^*.$$

Аналогичные рассуждения можно провести для пар задач  $B_2$  и  $C_2, \dots, B_P$  и  $C_P, \dots, B_P$  и  $C_P$ . Таким образом, для соответствующих компонент векторов  $\vec{\theta}^*$  и  $\vec{\omega}^*$  выполняется:

$$\omega_p^* = 1 - \theta_p^*, \quad p = \overline{1, P}.$$

Последнее означает, что при условии эффективного распределения потока в поврежденной сети ущерб  $k$ -го пользователя численно равен единице минус величина обеспеченности требований.

## 7 Заключение

В настоящее время в литературе большое внимание уделяется изучению уязвимости территориально распределенных систем. Указанные системы чаще всего моделируются с помощью однопродуктовых сетей, а анализ уязвимости сводится к поиску узких мест таких сетей. Однако не менее важной представляется проблема комплексного анализа ущерба пользователей, который они несут вследствие частичного разрушения системы или падения ее работоспособности.

Для решения данной проблемы в работе предложена универсальная процедура, позволяющая рассматривать широкий спектр разрушающих воздействий, изучать изменение функциональных характеристик системы и получать достоверные оценки ущерба пользователей.

Описанная процедура может быть использована для анализа однопродуктовых сетей большого размера с неважнозаменимыми требованиями на поток, например транспортных сетей или Интернета.

## Литература

1. Murray A. T. An overview of network vulnerability modeling approaches // GeoJournal, 2013. Vol. 78. P. 209–221.
2. Козлов М. В., Малащенко Ю. Е., Назарова И. А. и др. Управление топливно-энергетической системой при крупномасштабных повреждениях. I. Сетевая модель и программная реализация // Изв. РАН. ТиСУ, 2017. № 6. С. 50–73.
3. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях / Пер. с англ. — М.: Мир, 1966. 277 с. (Ford L. R., Fulkerson D. R. Flows in networks. — Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1962. 332 p.)



4. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. 256 с.
5. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения / Пер. с англ. — М.: Прогресс, 1966. 589 с. (Dantzig G. Linear programming and extensions. — Princeton, NJ, USA: Princeton University Press, 1963. 600 p.)
6. Йенсен П., Барнес Д. Потокосое программирование / Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1984. 392 с. (Jensen P. A., Barnes J. W. Network flow programming. — New York, NY, USA: Wiley, 1980. 408 p.)
7. Малашенко Ю. Е., Новикова Н. М. Модели неопределенности в многопользовательских сетях. — М: Эдиториал УРСС, 1999. 160 с.

Поступила в редакцию 31.05.17

---

---

## METHOD OF ANALYSIS OF FUNCTIONAL VULNERABILITY OF FLOW NETWORK SYSTEMS

Yu. E. Malashenko, I. A. Nazarova, and N. M. Novikova

A. A. Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 40 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** Mathematical methods of analysis of network systems for transfer of streams of interchangeable products to various users are considered. For description of processes occurring in the system, the model of single-product flow network is used. Changes of functional characteristics of a system after the targeted destroying effects are studied according to the methodology of an operations research. The method of obtaining guaranteed damage estimates for each of the equal users of the complete destruction of the physical and logical elements of the system is proposed. The estimates are based on the solution of the sequence of vector optimization problems with lexicographic minimax criterion. To determine the strategy of flow distribution, *a posteriori* information about changes of network’s capacity is used.

**Keywords:** single-product flow network; functional vulnerability; damage assessment; principle of the guaranteed result

**DOI:** 10.14357/19922264170406

### References

1. Murray, A. T. 2013. An overview of network vulnerability modeling approaches. *GeoJournal* 78:209–221.
2. Kozlov, M. V., Yu. E. Malashenko, I. A. Nazarova, et al. 2017. Fuel and energy system control at large-scale damages. I. Network model and software implementation. *J. Comput. Sys. Sci. Int.* 56(6):945–968.
3. Ford, L. R., and D. R. Fulkerson. 1962. *Flows in networks*. Princeton, NJ: Princeton University Press. 332 p.
4. Podinovskiy, V. V., and V. D. Nogin. 1982. *Pareto-optimal’nye resheniya mnogokriterial’nykh zadach* [Pareto-optimal solutions of multicriteria tasks]. Moscow: Nauka. 256 p.
5. Dantzig, G. 1963. *Linear programming and extensions*. Princeton, NJ: Princeton University Press. 600 p.
6. Jensen, P. A., and J. W. Barnes. 1980. *Network flow programming*. New York, NY: Wiley. 408 p.
7. Malashenko, Yu. E., and N. M. Novikova. 1999. *Modeli neopredelenosti v mnogopol’zovatel’skikh setyakh* [Indeterminacy models in the multiuser networks]. Moscow: URSS Publ. 160 p.

Received May 31, 2017

### Contributors

**Malashenko Yuri E.** (b. 1946) — Doctor of Science in physics and mathematics, Head of Laboratory, A. A. Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 40 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; malash09@ccas.ru

**Nazarova Irina A.** (b. 1966) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, scientist, A. A. Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 40 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; irina-nazar@yandex.ru

**Novikova Natalya M.** (b. 1953) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, leading scientist, A. A. Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 40 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; n\_novikova@umail.ru

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МАКСИМИЗАЦИИ ДОХОДА СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ТИПА $G/M/1$ С ПОРОГОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ОЧЕРЕДЬЮ\*

Я. М. Агаларов<sup>1</sup>, В. С. Шоргин<sup>2</sup>

**Аннотация:** Рассматривается задача максимизации среднего дохода системы массового обслуживания (СМО) типа  $G/M/1$  в единицу времени на множестве стационарных пороговых стратегий ограничения доступа с одной «точкой переключения». Доход определяется следующими параметрами, измеряемыми в стоимостных единицах: плата, получаемая за обслуживание заявок; затраты на техническое обслуживание прибора; вычет из дохода за задержку заявок в очереди; штраф за необслуженные заявки; штраф за простой системы. Сформулированы необходимые и достаточные условия оптимальности конечного порогового значения, разработан метод последовательного спуска к оптимальному порогу, предложен алгоритм расчета оптимального порога и соответствующего значения целевой функции.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания; пороговая стратегия; оптимизация

**DOI:** 10.14357/19922264170407

## 1 Введение

Для повышения эффективности работы современных вычислительных сетей используют алгоритмы управления потоками (ограничения нагрузки), наиболее применяемыми из которых являются различные модификации порогового управления (пороговых стратегий) [1]. Исследованием и разработкой пороговых стратегий управления потоками занимались практически с начала зарождения вычислительных сетей с целью защиты связанных и вычислительных ресурсов от перегрузок [2]. Одним из основных методов исследования эффективности пороговых стратегий является математическое моделирование с использованием аппарата теории очередей, предметом исследования которой являются СМО различного типа.

Большинство работ, в которых рассмотрены СМО с пороговой стратегией управления потоками, посвящено расчету характеристик системы (средней длины очереди, среднего времени пребывания, вероятности отклонения заявки, загруженности приборов и т. д.) при заданной пороговой стратегии (краткий обзор некоторых из этих работ проведен в [3]). В ряде работ, посвященных данной тематике, ставится задача оптимизации пороговой стратегии в смысле максимизации дохода системы, представленного в виде стоимостного функционала

(см., например, [4–7]). Хотя практический интерес к такой постановке задачи в смысле повышения эффективности систем, как представляется, не ниже, чем к задачам расчета характеристик систем при фиксированной пороговой стратегии, вопрос существования эффективных методов и алгоритмов поиска оптимальных пороговых стратегий для СМО остается открытым, за исключением простых СМО ( $M/M/1$ ,  $M/M/n$  [4]) и простых целевых функций (допустимая средняя задержка заявок в системе, допустимая интенсивность потери). Для более сложных СМО (например,  $G/M/1$ ,  $M/G/1$ ) с более сложными целевыми функциями результаты исследований ограничиваются математическими постановками задач и эвристическими алгоритмами их решения.

Из недавно опубликованных в отечественной литературе работ, посвященных пороговой стратегии управления очередью с одной «точкой переключения», отметим [5], где для системы  $G/M/n$  сформулирована математическая постановка максимизации дохода системы на множестве пороговых стратегий с одним переключением (одной гистерезисной петлей), фиксированными платой за своевременное обслуживание и штрафом за невыполнение этого условия для допущенной в систему заявки. В работе предложен эвристический алгоритм поиска оптимальной стратегии и выдвинута

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 15-07-03406).

<sup>1</sup> Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, agglar@yandex.ru

<sup>2</sup> Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, VShorgin@ipiran.ru

гипотеза о том, что для систем  $G/G/n$  существует единственное решение указанной задачи в виде простой пороговой стратегии.

Аналогичная задача рассмотрена в работе [6] для системы  $M/D/1$ , где также приведена математическая постановка задачи и получена нижняя оценка для оптимального порогового значения. Постановка задачи, наиболее близкая к рассматриваемой в настоящей статье, рассмотрена в работе [7], где решение задачи максимизации среднего дохода, получаемого системой  $M/G/1$  в единицу времени, ищется на множестве смешанных пороговых стратегий при входной нагрузке меньше единицы. В работе доказано, что если решение задачи существует, то оно принадлежит множеству чистых стратегий. В работе [8] в рамках рассмотренной в работе [7] задачи доказана теорема о необходимых и достаточных условиях оптимальности чистой пороговой стратегии и приведен алгоритм, гарантирующий поиск оптимальной стратегии за конечное число шагов.

В данной статье рассматривается аналогичная задача максимизации среднего дохода СМО типа  $G/M/1$  на множестве чистых пороговых стратегий ограничения потока заявок в систему в случае, когда плата за обслуживание и решение о приеме заявки принимаются в момент ее поступления.

Ниже проведены исследования, касающиеся вопросов существования решения задачи максимизации дохода и метода поиска оптимальной стратегии.

## 2 Постановка задачи

Рассматривается СМО типа  $G/M/1$  с накопителем бесконечной емкости и одним прибором обслуживания, на которую поступает рекуррентный поток заявок с функцией распределения вероятностей  $H(t)$ . Время обслуживания заявки распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\mu > 0$ . Поступившая заявка допускается в накопитель системы (занимает любое свободное место в накопителе), если в момент ее поступления число занятых мест в накопителе меньше  $k$ ,  $k > 0$  — некоторое заданное целое число (ниже тривиальный случай  $k = 0$  не рассматривается). Такую процедуру доступа заявок в систему называют в литературе пороговой стратегией управления доступом с одной «точкой переключения», в дальнейшем для краткости назовем стратегией. Обозначим стратегию соответствующим пороговым значением  $k$ . Если заявка допущена в накопитель, она занимает любое свободное место в накопителе и обслуживается на приборе в порядке поступления. Заявка покидает систему только при завершении обслуживания,

освободив одновременно прибор и накопитель, а на освободившийся прибор поступает очередная заявка из накопителя (если таковая есть). Система получает доход, который формируется следующими составляющими:

$C_0 \geq 0$  — плата, получаемая системой, если поступившая заявка будет обслужена системой (принята в накопитель);

$C_1 \geq 0$  — величина штрафа, который платит система, если поступившая заявка отклонена;

$C_2 \geq 0$  — вычет из дохода системы за единицу времени ожидания заявки в системе;

$C_3 \geq 0$  — вычет из дохода системы за единицу времени простоя прибора (отсутствия заявок в системе);

$C_4 \geq 0$  — затраты системы в единицу времени на техническое обслуживание системы.

Всюду ниже под доходом системы будем понимать суммарный доход с учетом всех указанных выше составляющих.

Отметим, что процесс обслуживания заявок в данной системе описывается цепью Маркова, где переходы цепи определяются моментами поступления заявок и состояние системы есть число заявок, находящихся в ней в момент поступления (см., например, [9, 10]). Отметим также, что при заданной стратегии  $k$  указанная цепь Маркова имеет один положительный возвратный класс состояний  $i = 0, \dots, k$ .

Введем обозначения:

$\{\pi_i^k, 0 \leq i \leq k\}$  — стационарное распределение вероятностей цепи при стратегии  $k$  ( $\pi_i^k$  — стационарная вероятность того, что цепь находится в состоянии  $i$ );

$Q^k$  — предельное среднее значение дохода системы в единицу времени;

$g^k$  — предельное среднее значение суммарного дохода системы, усредненного по числу поступивших заявок;

$q_i^k$  — средний доход, получаемый системой в состоянии  $i$  при стратегии  $k$ ,  $i \geq 0$ ;

$\bar{v} = \int_0^\infty t dH(t)$  — среднее время между соседними моментами поступления заявок,  $0 < \bar{v} < \infty$ .

Предельное среднее значение суммарного дохода системы, усредненного по числу поступивших заявок при стратегии  $k$ , равно пределу

$$g^k = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N_{\text{вх}}(T)} \frac{d_n^k}{N_{\text{вх}}(T)},$$

предельное среднее значение дохода системы в единицу времени при стратегии  $k$  равно пределу

$$Q^k = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N_{\text{BX}}(T)} \frac{d_n^k}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{BX}}(T)}{T} \sum_{n=1}^{N_{\text{BX}}(T)} \frac{d_n^k}{N_{\text{BX}}(T)} =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{BX}}(T)}{T} \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N_{\text{BX}}(T)} \frac{d_n^k}{N_{\text{BX}}(T)} = \frac{g^k}{\bar{v}}, \quad (1)$$

где  $d_n^k$  — доход, полученный системой при стратегии  $k$  за  $n$ -ю поступившую заявку;  $N_{\text{BX}}(T)$  — число поступивших за отрезок времени  $[0, T]$  заявок. Из определения вложенной цепи Маркова следует

$$g^k = \sum_{i=0}^k \pi_i^k q_i^k.$$

Ставится задача максимизации функции  $Q^k$  на множестве стратегий  $k > 0$ , которая эквивалентна (см. (1)) задаче: найти оптимальную стратегию  $k^0 > 0$  такую, что

$$\max_{k>0} g^k = g^{k^0}. \quad (2)$$

### 3 Метод решения

Выпишем выражения для стационарных вероятностей  $\pi_j^k$ ,  $j = 0, \dots, k$ . Для вероятностей переходов  $p_{ij}^k$  вложенной цепи Маркова справедливы формулы [9, 10]:

$$\left. \begin{aligned} p_{ij}^k &= r_{i+1-j} && \text{при } 0 \leq i \leq k-1, \\ & && 1 \leq j \leq i+1; \\ p_{i0}^k &= 1 - \sum_{m=0}^i r_m && \text{при } i \leq k-1; \\ p_{kj}^k &= p_{k-1,j}^k && \text{при } j \leq k, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$$r_m = \int_0^{\infty} \frac{(\mu t)^m}{m!} e^{-\mu t} dH(t) \text{ при } m \geq 0.$$

Для рассматриваемой цепи Маркова при стратегии  $k$  стационарное распределение вероятностей является единственным решением системы уравнений [9, 10]:

$$\left. \begin{aligned} \pi_0^k &= \sum_{i=0}^k \pi_i^k p_{i0}^k; \\ \pi_j^k &= \sum_{i=j-1}^k \pi_i^k p_{ij}^k, \quad i = 1, \dots, k-1; \\ \pi_k^k &= \pi_{k-1}^k p_{k-1,k}^k + \pi_k^k p_{k-1,k}^k; \\ \sum_{i=0}^k \pi_i^k &= 1, \quad \pi_i^k > 0, \quad i = 0, \dots, k. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Из последних  $k$  уравнений, положив  $\pi_j^k = R_j^k \pi_k^k$ , получим:

$$R_k^k = 1; \quad R_{k-1}^k = \frac{1-r_0}{r_0};$$

$$R_{j-1}^k = \frac{R_j^k(1-r_1) - \sum_{i=j+1}^{k-1} R_i^k r_{i+1-j} - r_{k-j}}{r_0},$$

$$1 \leq j \leq k-1; \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \pi_k^k &= \left( 1 + \sum_{i=0}^{k-1} R_i^k \right)^{-1}; \\ \pi_j^k &= \frac{R_j^k}{1 + \sum_{i=0}^{k-1} R_i^k}, \quad j = 0, \dots, k-1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Справедливы следующие леммы (доказательства см. в приложении).

**Лемма 1.** Среднее значение дохода, получаемого системой при стратегии  $k$  в состоянии  $i$ , равно

$$\left. \begin{aligned} q_i^k &= \frac{C_2}{\mu} \left[ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i+1} (m-1) m r_m - i \sum_{m=1}^{i+1} m r_m - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} i(i+1) \sum_{m=i+2}^{\infty} r_m \right] - \\ &\quad - \frac{C_3}{\mu} \sum_{m=i+2}^{\infty} (m-i-1) r_m + \\ &\quad + C_0 - C_4 \bar{v}, \quad 0 \leq i \leq k-1; \\ q_k^k &= q_{k-1}^k - C_0 - C_1. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

**Лемма 2.** Справедливы равенства:

$$\left. \begin{aligned} q_{i+1}^k &= q_i^k + \frac{C_3}{\mu} \sum_{m=i+1}^{\infty} r_m - \\ &\quad - \frac{C_2}{\mu} \sum_{m=1}^{i+1} m r_m - \frac{C_2(i+1)}{\mu} \sum_{m=i+2}^{\infty} r_m, \\ &\quad 0 \leq i \leq k-2; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\pi_{i+1}^{k+1} = (1 - \pi_0^{k+1}) \pi_i^k, \quad i = 0, \dots, k. \quad (9)$$

Введем обозначения  $F(k)$ ,  $\bar{W}(k)$  и  $G(k)$ ,  $k > 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}(k) &= \bar{v} - \frac{1}{\mu} \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i^k \sum_{m=i+2}^{\infty} (m-i-1) r_m + \right. \\ &\quad \left. + \pi_k^k \sum_{m=k+1}^{\infty} (m-k) r_m \right]; \\ F(k) &= \frac{1 - \pi_0^{k+1}}{\pi_0^{k+1}} \bar{W}(k); \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$G(k) = C_0 + \frac{C_3}{\mu} (C_3 + C_4) \bar{v} - C_2 F(k), \quad k > 0. \quad (11)$$

**Лемма 3.** Справедливо соотношение

$$g^k - g^{k+1} = \pi_0^{k+1} [g^k - G(k)], \quad k > 0. \quad (12)$$

**Лемма 4.** Функция  $G(k)$  не возрастает по  $k > 0$ .

Справедлива следующая теорема (доказательство см. в приложении).

**Теорема 1.** Справедливы утверждения: (1) если  $\inf_{k>0} G(k) < \sup_{k>0} g^k$ , то при любых значениях параметров  $C_i \geq 0, i = 0, 1, 3, 4, C_2 > 0$  существует стратегия  $0 < k^0 < \infty$ , иначе, если  $g^1 < G(1)$ , то  $k^0 = \infty$ ; (2) если  $g^1 \geq G(1)$ , то  $k^0 = 1$ ; (3) если  $C_2 = 0$  и  $g^1 < G(1)$ , то  $k^0 = \infty$ ; (4) условие  $g^{k^0-1} < g^{k^0}$ ,  $g^{k^0+1} \leq g^{k^0}$  является необходимым и достаточным для оптимальности стратегии  $1 < k^0 < \infty$ .

Из теоремы 1 следует следующий алгоритм поиска стратегии  $k^0$ .

1. Вычислить  $a = g^1$  и  $b = G(1)$ .
2. Если  $C_2 = 0$  и  $b > a$ , то положить  $k^0 = \infty$  и перейти к п. 14.
3. Положить  $k = 1$ .
4. Выбрать значение приращения  $\Delta k$  ( $\Delta k \geq 1$  — целое число).
5. Если  $a \geq b$ , то положить  $k^0 = 1$  и перейти к п. 14.
6. Положить  $k = k + \Delta k$ .
7. Вычислить  $a = g^k, b = G(k)$ .
8. Если  $b > a$ , то перейти к п. 6, иначе положить  $k_1 = k - \Delta k, k_2 = k$ .
9. Вычислить  $k = [(k_1 + k_2)/2]$ , где  $[\cdot]$  — целая часть числа в квадратных скобках.
10. Вычислить  $a = g^k, b = G(k)$ .
11. Если  $b > a$ , то положить  $k_1 = k$ , иначе положить  $k_2 = k$ .
12. Если  $k_2 - k_1 > 1$ , то перейти к п. 9.
13. Если  $k_1 = k$ , то положить  $k^0 = k_2$ , иначе положить  $k^0 = k_1$ .
14. Конец алгоритма.

Трудоёмкость алгоритма равна  $\sim ([k^0/(\Delta k)] + \log_2 \Delta k)$  вычислений функций  $g^k$  и  $G(k)$ .

Ниже на численном примере проиллюстрирован принцип работы предложенного алгоритма и изображено в виде графиков поведение функций  $g^k$  и  $G(k)$  при изменении порогового значения.

## 4 Пример

В качестве примера рассмотрим СМО  $H_n/M/1$  с функцией распределения входного потока  $H_n(t) = \sum_{i=1}^n f_i(1 - e^{-\lambda_i t}), f_i \geq 0, \lambda_i \geq 0, 0 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^n f_i = 1$ .

Функция  $F(k)$  (см. (10)) в данном случае имеет вид:

$$F(k) = \left( \bar{v} - \left[ \sum_{j=1}^n f_j \frac{1}{\lambda_j} \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i \left( \frac{\mu}{\lambda_j + \mu} \right)^{i+2} + \pi_k \sum_{j=1}^n f_j \frac{1}{\lambda_j} \left( \frac{\mu}{\lambda_j + \mu} \right)^{k+1} \right] \right) / \left( \sum_{j=1}^n f_j \times \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i \left( \frac{\mu}{\lambda_j + \mu} \right)^{i+2} + \pi_k \sum_{j=1}^n f_j \frac{1}{\lambda_j} \left( \frac{\mu}{\lambda_j + \mu} \right)^{k+1} \right) - \frac{1}{\mu}.$$

На рисунке приведены зависимости функций  $g^k$  и  $G(k)$  от порогового значения и показано отношение эквивалентности условий  $g^{k+1} > g^k$  и  $g^k < G(k)$ . Оптимальный порог на рисунке обозначен через  $k$ .

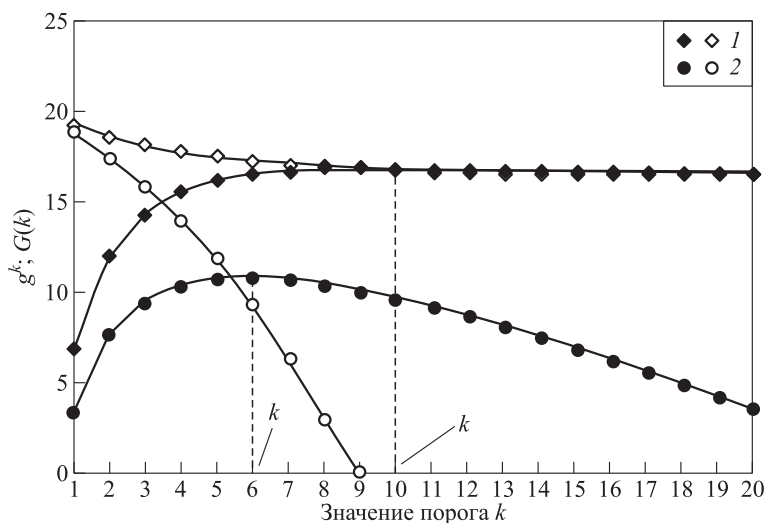
## 5 Заключение

Выше в постановке задачи (2) предполагалось, что плата за обслуживание поступает в систему в момент приема заявки и не зависит от времени занятия прибора. Предложенный выше метод решения задачи (2) можно применить и в случае, когда плату за обслуживание система получает в момент окончания обслуживания заявки и величина платы прямо пропорциональна длительности обслуживания на приборе. Заметим, что все составляющие дохода системы, кроме дохода, получаемого системой в виде платы за обслуживание заявок, в данном случае и в случае (7) совпадают. В данном случае средняя величина дохода  $d_i^k$ , получаемого системой при стратегии  $k$  в состоянии  $i$  как плату за обслуживание заявок, вычисляется по формуле

$$d_i^k = \frac{C_0}{\mu} \left[ \int_0^\infty \left( \sum_{m=1}^i \frac{m(\mu v)^m}{m!} e^{-\mu v} + (i+1) \sum_{m=i+1}^\infty \frac{(\mu v)^m}{m!} e^{-\mu v} \right) dH(v) \right] = \frac{C_0}{\mu} \sum_{m=1}^i m r_m + \frac{C_0}{\mu} (i+1) \sum_{m=i+1}^\infty r_m$$

при  $i < k, d_k^k = d_{k-1}^k$ .





Зависимости предельного дохода  $g^k$  (залитые значки) и функции  $G(k)$  (пустые значки) от порогового значения  $k$  при  $C_0 = 20, C_1 = 10, C_2 = 1, C_3 = C_4 = 0,01, \mu = 1, n = 2, f_1 = 0,3, f_2 = 0,7; 1 - \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,7; 2 - \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$

Далее, повторив те же выкладки, что и выше, получим выражение вида (12) с новой функцией  $G(k)$ . Алгоритм поиска оптимальной стратегии остается без изменения.

Основными результатами данной работы являются доказательство необходимых и достаточных условий оптимальности порогового значения и алгоритм гарантированного поиска оптимальной стратегии.

Полученные в данной работе результаты могут быть использованы для поиска оптимальных пороговых стратегий управления потоками в системах, моделируемых с помощью СМО типа  $G/M/1$  ( $G/M/1/r$ ).

### Приложение

Доказательство леммы 1. Фиксируем состояние  $0 \leq i \leq k - 1$ , и пусть время нахождения системы в состоянии  $i$  равно  $v$ . Найдем выражения для суммарного среднего времени ожидания всех заявок в очереди и среднего времени простоя прибора в состоянии  $i$ , т. е. в интервале времени  $(0, v]$ .

Рассмотрим случайные величины вида  $W_l = \sum_{j=1}^l \tau_j, l \geq 1$ , где  $\tau_j$  — независимые экспоненциально распределенные случайные величины с параметром  $\mu > 0$ . Пусть  $B_m$  — событие вида  $(W_m \leq v, W_{m+1} > v)$ ,  $B_0$  — событие  $(W_1 > v)$ . Обратим внимание, что  $B_m, m \geq 0$ , — несовместные события и в совокупности составляют полную группу событий.

Известно (см., например, [10]), что совместное распределение величин  $W_l, l \leq m$ , при условии выполнения события  $B_m$  совпадает с распределением порядковых статистик из выборки  $m$ , взятой из равномерного распределения на  $(0, v]$ , и маргинальным условным распределением случайной величины  $W_l/v$  является бета-распределение с плотностью

$$f(x/B_m) = \begin{cases} \frac{m!}{(l-1)!(m-l)!} x^{l-1}(1-x)^{m-l}, & 0 < x < 1; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда условное среднее значение  $M[W_l/B_m]$  случайной величины  $W_l$  при условии  $B_m$  равно  $(l/(m+1))v$ .

Заметим, что общее время ожидания  $l$ -й в очереди заявки при  $l \geq 1$  является случайной величиной вида  $W_l$ , а выполнение события  $B_m$  равносильно завершению обслуживания за время  $v$  ровно  $m$  заявок.

Обозначим через  $\bar{W}_{\text{обсл}/m}$  — среднее суммарное время ожидания заявок, завершивших обслуживание или приступивших к обслуживанию в состоянии  $i$ , при условии  $B_m$ ;  $\bar{W}_{\text{необсл}/m}$  — среднее суммарное время ожидания заявок в очереди, не приступивших к обслуживанию в состоянии  $i$ , при условии  $B_m$ ;  $\bar{W}_{\text{пр}/m}$  — среднее время простоя прибора в состоянии  $i$  при условии  $B_m$ . Тогда при  $m \leq i \leq k - 1$  получим:

$$\bar{W}_{\text{обсл}/m} = \sum_{l=1}^m M[W_l/B_m] = \sum_{l=1}^m \frac{l}{m+1} v = \frac{mv}{2}; \quad (13)$$

$$\bar{W}_{\text{необсл}/m} = [(i+1) - (m+1)]v = (i-m)v. \quad (14)$$

Выполнение события  $B_m$  при  $m > i$  означает завершение обслуживания всех заявок в очереди и последующее простаивание прибора до момента выхода системы из состояния  $i$ , поэтому при  $m > i, 1 \leq i \leq k - 1$  верно равенство:

$$\bar{W}_{\text{обсл}/m} = \sum_{l=1}^i M[W_l/B_m] = \sum_{l=1}^i \frac{l}{m+1} v = \frac{i(i+1)v}{2(m+1)}.$$

При  $m > i, i \leq k - 1$  и условии  $B_m$  для времени простоя верно соотношение:

$$\begin{aligned} \overline{W}_{\text{пр}/m} &= v - M[W_{i+1}/B_m] = v - \frac{i+1}{m+1}v = \\ &= \frac{(m-i)v}{m+1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для состояний  $i = k$  и  $i = k - 1$  значения параметров  $\overline{W}_{\text{обсл}/m}$ ,  $\overline{W}_{\text{необсл}/m}$  и  $\overline{W}_{\text{пр}/m}$  совпадают.

Обозначим через  $q_i^k(v)$  величину суммарного дохода системы в состоянии  $i$  при условии, что время пребывания в состоянии  $i$  равно  $v$ . Так как вероятность события  $B_m$  равна  $((\mu v)^m/m!)e^{-\mu v}$ , из формулы полной вероятности и из (13)–(15) получим для  $q_i^k(v)$  при  $i \leq k - 1$  выражение вида:

$$\begin{aligned} q_i^k(v) &= C_0 - C_4v - \\ &- \sum_{m=0}^i \frac{(\mu v)^m}{m!} e^{-\mu v} (C_2 \overline{W}_{\text{обсл}/m} + C_2 \overline{W}_{\text{необсл}/m}) - \\ &- \sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{(\mu v)^m}{m!} e^{-\mu v} (C_2 \overline{W}_{\text{обсл}/m} + C_3 \overline{W}_{\text{пр}/m}) = \\ &= C_0 - C_4v - C_2 \sum_{m=0}^i \frac{(\mu v)^m}{m!} e^{-\mu v} \left[ \frac{mv}{2} + (i-m)v \right] - \\ &- C_2 \sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{(\mu v)^m}{m!} e^{-\mu v} \frac{i(i+1)v}{2(m+1)} - \\ &- C_3 \sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{(\mu v)^m}{m!} e^{-\mu v} \frac{(m-i)v}{m+1} = \\ &= C_0 - C_4v + \frac{C_2}{2} \sum_{m=0}^i \frac{\mu^m v^{m+1}}{(m-1)!} e^{-\mu v} - \\ &- C_2 i \sum_{m=0}^i \frac{\mu^m v^{m+1}}{m!} e^{-\mu v} - C_2 \frac{i(i+1)}{2} \sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{\mu^m v^{m+1}}{(m+1)!} e^{-\mu v} - \\ &- C_3 \sum_{m=i+1}^{\infty} \frac{\mu^m v^{m+1}}{(m+1)!} e^{-\mu v} (m-i). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} q_i^k &= \int_0^{\infty} q_i^k(v) dH(v) = C_0 - C_4v + \\ &+ \frac{C_2}{2\mu} \sum_{m=0}^i m(m+1) \int_0^{\infty} \frac{\mu^{m+1} v^{m+1}}{(m+1)!} e^{-\mu v} dH(v) - \\ &- \frac{C_2 i}{\mu} \sum_{m=0}^i (m+1) \int_0^{\infty} \frac{\mu^{m+1} v^{m+1}}{(m+1)!} e^{-\mu v} dH(v) - \\ &- \frac{C_2 i(i+1)}{2\mu} \sum_{m=i+1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\mu^{m+1} v^{m+1}}{(m+1)!} e^{-\mu v} dH(v) - \\ &- \frac{C_3}{\mu} \sum_{m=i+1}^{\infty} m \int_0^{\infty} \frac{\mu^{m+1} v^{m+1}}{(m+1)!} e^{-\mu v} dH(v) + \\ &+ \frac{C_3 i}{\mu} \sum_{m=i+1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\mu^{m+1} v^{m+1}}{(m+1)!} e^{-\mu v} dH(v). \end{aligned}$$

Отсюда и из выражения для  $r_m$  в (3) следует (7) для  $0 \leq i \leq k - 1$ . Так как в состоянии  $i = k$  от поступившей заявки система не получает плату  $C_0$ , сама система платит штраф  $C_1$ , а значения штрафа за простой, штрафа за задержку и затрат на техническое обслуживание такие же, как в состоянии  $i = k - 1$ , то в (7) равенство для  $q_k^k$  также верно.

Доказательство леммы 2. Для  $0 \leq i \leq k - 2$ , проведя преобразование, из (7) получим (8):

$$\begin{aligned} q_{i+1}^k - q_i^k &= \frac{C_2}{2\mu} \sum_{m=1}^{i+1} m(m-1)r_m + \\ &+ \frac{C_2}{2\mu} (i+1)(i+2)r_{i+2} - \frac{C_2(i+1)}{\mu} \sum_{m=1}^{i+1} mr_m - \\ &- \frac{C_2}{\mu} (i+1)(i+2)r_{i+2} - \frac{C_2(i+1)(i+2)}{2\mu} \sum_{m=i+3}^{\infty} r_m - \\ &- \frac{C_3}{\mu} \sum_{m=i+3}^{\infty} (m-i-2)r_m - \frac{C_2}{2\mu} \sum_{m=1}^{i+1} m(m-1)r_m + \\ &+ \frac{C_2 i}{\mu} \sum_{m=1}^{i+1} mr_m + \frac{C_2(i+1)i}{2\mu} \sum_{m=i+3}^{\infty} r_m + \frac{C_2(i+1)i}{2\mu} r_{i+2} + \\ &+ \frac{C_3}{\mu} \sum_{m=i+3}^{\infty} (m-i-1)r_m + \frac{C_3}{\mu} r_{i+2} = \\ &= -\frac{C_2}{\mu} (i+1)r_{i+2} - \frac{C_2}{\mu} \sum_{m=1}^{i+1} mr_m - \frac{C_2(i+1)}{\mu} \sum_{m=i+3}^{\infty} r_m + \\ &+ \frac{C_3}{\mu} \sum_{m=i+3}^{\infty} r_m + \frac{C_3}{\mu} r_{i+2} = \frac{C_3}{\mu} \sum_{m=i+2}^{\infty} r_m - \\ &- \frac{C_2}{\mu} \sum_{m=1}^{i+1} mr_m - \frac{C_2(i+1)}{\mu} \sum_{m=i+2}^{\infty} r_m. \end{aligned}$$

Докажем (9). Подставив вместо  $\pi_i^k, \pi_{i+1}^{k+1}$  соответствующие выражения из (6), имеем:

$$\pi_j^k - \pi_{j+1}^{k+1} = \frac{R_j^k}{1 + \sum_{i=0}^{k-1} R_i^k} - \frac{R_{j+1}^{k+1}}{1 + \sum_{i=0}^k R_i^{k+1}}. \quad (16)$$

Из (5) следует  $R_j^k = R_{j+1}^{k+1}$ ,  $0 \leq j \leq k$ . Тогда (16) приводится к виду:

$$\pi_j^k - \pi_{j+1}^{k+1} = \frac{R_j^k R_0^{k+1}}{\left(1 + \sum_{i=0}^{k-1} R_i^k\right) \left(1 + \sum_{i=0}^k R_i^{k+1}\right)} = \pi_j^k \pi_0^{k+1}.$$

Доказательство леммы 3. Из формулы (1) следует

$$\begin{aligned} g^k - g^{k+1} &= \sum_{i=0}^k \pi_i^k q_i^k - \sum_{i=0}^{k+1} \pi_i^{k+1} q_i^{k+1} = \\ &= \sum_{i=0}^k \pi_i^k q_i^k - \sum_{i=1}^{k+1} \pi_i^{k+1} q_i^{k+1} - \pi_0^{k+1} q_0^{k+1}. \end{aligned}$$

Введем для краткости изложения обозначение:

$$\Delta_i^k = q_i^k - q_{i-1}^k, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Из (7) и (8) имеем:

$$\Delta_i^k = \frac{C_3}{\mu} \sum_{m=i+1}^{\infty} r_m - \frac{C_2}{\mu} \sum_{m=1}^i m r_m - \frac{C_2 i}{\mu} \sum_{m=i+1}^{\infty} r_m, \\ 1 \leq i \leq k-1;$$

$$\Delta_k^k = -C_1 - C_0.$$

Если обратить внимание на правую часть формулы (7), то заметим, что  $q_i^{k+1} = q_i^k$  для  $0 \leq i \leq k-1$ . Поэтому  $\Delta_i^k = \Delta_i^{k+1}$  при  $1 \leq i \leq k-1$ . Кроме того, из (7) и (8) следует:

$$q_{k+1}^{k+1} = q_k^{k+1} - C_1 - C_0 = q_{k-1}^{k+1} + \Delta_k^{k+1} - C_1 - C_0 = \\ = q_{k-1}^k + \Delta_k^{k+1} - C_1 - C_0 = q_k^k + \Delta_k^{k+1}.$$

Подставив вместо  $q_i^{k+1}$  сумму  $q_{i-1}^k + \Delta_i^{k+1}$  при  $1 \leq i \leq k$ , а при  $i = k+1$  сумму  $q_k^k + \Delta_k^{k+1}$ , получим:

$$g^k - g^{k+1} = \sum_{i=0}^k \pi_i^k q_i^k - \\ - \sum_{i=1}^{k+1} \pi_i^{k+1} q_{i-1}^k - \sum_{i=1}^k \pi_i^{k+1} \Delta_i^{k+1} - \pi_{k+1}^{k+1} \Delta_k^{k+1} - \pi_0^{k+1} q_0^{k+1}.$$

Заменив во второй и третьей суммах последнего равенства  $\pi_i^{k+1}$  на  $(1 - \pi_0^{k+1})\pi_{i-1}^k$  (см. формулу (9)), получим:

$$g^k - g^{k+1} = \sum_{i=0}^k \pi_i^k q_i^k - (1 - \pi_0^{k+1}) \sum_{i=0}^k \pi_i^k q_i^k - \\ - (1 - \pi_0^{k+1}) \left( \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i^k \Delta_{i+1}^{k+1} + \pi_k^k \Delta_k^{k+1} \right) - \pi_0^{k+1} q_0^{k+1} = \\ = \pi_0^{k+1} \left[ g^k - q_0^{k+1} - \right. \\ \left. - \frac{1 - \pi_0^{k+1}}{\pi_0^{k+1}} \left( \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i^k \Delta_{i+1}^{k+1} + \pi_k^k \Delta_k^{k+1} \right) \right]. \quad (17)$$

Из первого равенства в (4) следует

$$\pi_0^{k+1} = \sum_{i=0}^k \pi_i^{k+1} \sum_{m=i+2}^{\infty} r_m + \pi_{k+1}^{k+1} \sum_{m=k+1}^{\infty} r_m.$$

Отсюда и из (9) имеем:

$$\pi_0^{k+1} = \frac{1 - \pi_0^{k+1}}{r_0} \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i^k \sum_{m=i+2}^{\infty} r_m + \pi_k^k \sum_{m=k+1}^{\infty} r_m \right]. \quad (18)$$

Преобразуем  $\Delta_{i+1}^{k+1}$  к виду:

$$\Delta_{i+1}^{k+1} = \frac{C_3}{\mu} \sum_{m=i+2}^{\infty} r_m - \\ - \frac{C_2}{\mu} \sum_{m=1}^{i+1} m r_m - \frac{C_2(i+1)}{\mu} \sum_{m=i+2}^{\infty} r_m = \\ = \frac{C_3}{\mu} \sum_{m=i+2}^{\infty} r_m - C_2 \bar{v} + \frac{C_2}{\mu} \sum_{m=i+2}^{\infty} (m-i-1) r_m.$$

Заменив в (17) обозначение  $\Delta_{i+1}^{k+1}$  обратно на соответствующее выражение и используя (18), получим:

$$g^k - g^{k+1} = \pi_0^{k+1} \left\{ g^k - q_0^{k+1} - \right. \\ \left. - \frac{1 - \pi_0^{k+1}}{\pi_0^{k+1}} \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i^k \left[ \frac{C_3}{\mu} \sum_{m=i+2}^{\infty} r_m - C_2 \bar{v} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{C_2}{\mu} \sum_{m=i+2}^{\infty} (m-i-1) r_m \right] - \frac{1 - \pi_0^{k+1}}{\pi_0^{k+1}} \pi_k^k \left[ \frac{C_3}{\mu} \sum_{m=k+1}^{\infty} r_m - \right. \right. \\ \left. \left. - C_2 \bar{v} + \frac{C_2}{\mu} \sum_{m=k+1}^{\infty} (m-k) r_m \right] \right\} = \\ = \pi_0^{k+1} \left\{ g^k - q_0^{k+1} - \frac{C_3}{\mu} r_0 + \right. \\ \left. + C_2 \frac{1 - \pi_0^{k+1}}{\pi_0^{k+1}} \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i^k \left[ \bar{v} - \frac{1}{\mu} \sum_{m=i+2}^{\infty} (m-i-1) r_m \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \pi_k^k \left[ \bar{v} - \frac{1}{\mu} \sum_{m=k+1}^{\infty} (m-k) r_m \right] \right] \right\}.$$

Заменив соответствующие выражения в правой части последнего равенства на их обозначения  $F(k)$  и  $G(k)$ , получим (12).

Доказательство леммы 4. Найдем среднее число шагов вложенной цепи Маркова в стационарном режиме, составляющих период занятости (интервал между моментами окончания предыдущего и текущего периодов простоя). Рассмотрим процесс перехода цепи из состояния в состояние только за период занятости. Обозначим через  $q_j^k(n)$  вероятность того, что при стратегии  $k$  в момент окончания  $n$ -го шага ( $n \geq 1$ ) периода занятости цепь окажется в состоянии  $j$ ,  $j \geq 1$ ,  $Q_i^k(n)$  — вероятность того, что при стратегии  $k$  в момент окончания  $n$ -го шага ( $n \geq 1$ ) периода занятости состояние цепи (число заявок в системе) окажется не меньше  $l$ ,  $l \geq 1$ . Очевидно,

$$q_j^k(n+1) = \begin{cases} 0 & \text{при } j > n+1 \text{ или } j > k; \\ \sum_{i=\max\{1, j-1\}}^k q_i^k(n) p_{ij}^k & \text{при } n \geq 1, 1 \leq j \leq k, \\ 0 & j \leq n+1; \end{cases} \\ q_1^k(1) = r_0.$$

После подстановки (3) имеем:

$$q_j^k(n+1) = \sum_{i=\max\{1, j-1\}}^{k-1} q_i^k(n) r_{i-j+1} + q_k^k(n) r_{k-j}, \\ 1 \leq j \leq k. \quad (19)$$

Просуммировав равенства (19) для  $j \geq l$ ,  $n \geq 1$ , получим:

$$Q_l^k(n+1) = \sum_{j=l}^{\infty} q_j^k(n+1) = \\ = \sum_{j=l}^k \left[ \sum_{i=\max\{1, j-1\}}^{k-1} q_i^k(n) r_{j-j+1} + q_k^k(n) r_{k-j} \right] = \\ = \sum_{i=0}^{k-l} r_i Q_{i+l-1}^k(n), \quad 2 \leq l \leq k; \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_1^k(n+1) &= \sum_{i=1}^{k-1} r_i Q_i^k(n) + r_0 Q_1^k(n), \\ Q_1^k(1) &= q_1^k(1) = r_0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Отметим, что  $q_j^k(n) = 0$  при  $j > k$ ,  $q_j^k(n) = q_j^{k+1}(n)$  при  $1 \leq n \leq k$ ,  $1 \leq j \leq k$ . Отсюда следует:

$$\begin{aligned} Q_l^k(n) &= 0 && \text{при } l > k; \\ Q_l^k(n) &= Q_l^{k+1}(n) && \text{при } 1 \leq n \leq k, \quad 1 \leq l \leq k; \\ Q_{k+1}^{k+1}(n) &> Q_{k+1}^k(n) = 0 && \text{при } n > k. \end{aligned}$$

Из (20) и (21) получим:

$$\begin{aligned} Q_l^{k+1}(k+1) &= \sum_{i=0}^{k+1-l} r_i Q_{l+i-1}^{k+1}(k) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-l} r_i Q_{l+i-1}^{k+1}(k) + r_{k+1-l} Q_k^{k+1}(k) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-l} r_i Q_{l+i-1}^k(k) + r_{k+1-l} Q_k^{k+1}(k) = Q_l^k(k+1) + \\ &\quad + r_{k+1-l} Q_k^{k+1}(k) > Q_l^k(k+1), \quad 2 \leq l \leq k+1; \\ Q_1^{k+1}(k+1) &= \sum_{i=1}^k r_i Q_i^{k+1}(k) + r_0 Q_1^{k+1}(k) = \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} r_i Q_i^{k+1}(k) + r_0 Q_1^{k+1}(k) + r_k Q_k^{k+1}(k) = \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} r_i Q_i^k(k) + r_0 Q_1^k(k) + r_k Q_k^{k+1}(k) = \\ &= Q_1^k(k+1) + r_k Q_k^{k+1}(k) > Q_1^k(k+1). \end{aligned}$$

Аналогично получим, что если для некоторого  $n > k$  справедливы неравенства  $Q_l^{k+1}(n) > Q_l^k(n)$ ,  $1 \leq l \leq k+1$ , то справедливы эти неравенства и для  $n+1$ . Отсюда по индукции следует справедливость этих неравенств для любого  $n \geq k$ . Итак, имеем:

$$\left. \begin{aligned} Q_l^{k+1}(n) &= Q_l^k(n) && \text{при } 1 \leq n \leq k; \\ Q_l^{k+1}(n) &= Q_l^k(n) && \text{при } n > k, \quad 1 \leq l \leq k+1. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Из (22) следует неравенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_1^{k+1}(n) > \sum_{n=1}^{\infty} Q_1^k(n).$$

Так как  $Q_1^k(n)$  — вероятность того, что длительность периода занятости не меньше  $(n+1)$  шагов,  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_1^k(n)$  — среднее значение числа шагов на протяжении периода занятости при стратегии  $k$ , то согласно последнему неравенству среднее значение длительности периода занятости при стратегии  $k+1$  больше, чем при стратегии  $k$ . А это значит, что если  $N$  — число последовательных шагов вложенной цепи Маркова,  $M^k(N)$  — число тех из них, в которые при стратегии  $k$  наблюдался простой, то

$$\pi_0^k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M^k(N)}{N} \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M^{k+1}(N)}{N} = \pi_0^{k+1}.$$

Здесь равенства следуют из закона больших чисел, так как периоды простоя (как и периоды занятости) — независимые одинаково распределенные случайные величины, и из основной предельной теоремы для марковских цепей [9]. Следовательно, отношение  $(1 - \pi_0^{k+1})/\pi_0^{k+1}$  в выражении для  $F(k)$  в (10) возрастает с увеличением  $k$ .

Обозначим выражение в квадратных скобках в формуле (10) для функции  $W(k)$  через  $f_k$  и методом индукции докажем, что  $f_k$  убывает по  $k \geq 1$ . Имеем:

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= \\ &= \sum_{i=0}^k \pi_i^{k+1} \sum_{m=i+2}^{\infty} (m-i-1)r_m + \pi_{k+1}^{k+1} \sum_{m=k+2}^{\infty} (m-k-1)r_m = \\ &= (1 - \pi_0^{k+1}) \sum_{i=0}^k \pi_i^k \sum_{m=i+2}^{\infty} (m-i-2)r_m + \\ &+ \pi_0^{k+1} \sum_{m=2}^{\infty} (m-1)r_m + (1 - \pi_0^{k+1}) \pi_k^k \sum_{m=k+2}^{\infty} (m-k-1)r_m = \\ &= (1 - \pi_0^{k+1}) \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i^k \sum_{m=i+2}^{\infty} (m-i-1)r_m - \\ &- (1 - \pi_0^{k+1}) \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i^k \sum_{m=i+2}^{\infty} r_m + \pi_0^{k+1} \sum_{m=2}^{\infty} (m-1)r_m + \\ &+ (1 - \pi_0^{k+1}) \pi_k^k \sum_{m=k+1}^{\infty} (m-k)r_m - \\ &- (1 - \pi_0^{k+1}) \pi_k^k \sum_{m=k+1}^{\infty} r_m = \\ &= (1 - \pi_0^{k+1}) f_k - (1 - \pi_0^{k+1}) \sum_{i=0}^{k-1} \pi_i^k \sum_{m=i+2}^{\infty} r_m + \\ &+ \pi_0^{k+1} \sum_{m=2}^{\infty} (m-1)r_m - (1 - \pi_0^{k+1}) \pi_k^k \sum_{m=k+1}^{\infty} r_m. \end{aligned}$$

Как следует из (18),

$$\sum_{i=0}^{k-1} \pi_i^k \sum_{m=i+2}^{\infty} r_m + \pi_k^k \sum_{m=k+1}^{\infty} r_m = \frac{r_0 \pi_0^{k+1}}{1 - \pi_0^{k+1}}.$$

Использував последнее равенство в правой части предпоследнего равенства, получим:

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= (1 - \pi_0^{k+1}) f_k - \\ &- (1 - \pi_0^{k+1}) \frac{r_0 \pi_0^{k+1}}{1 - \pi_0^{k+1}} + \pi_0^{k+1} \sum_{m=2}^{\infty} (m-1)r_m = \\ &= (1 - \pi_0^{k+1}) f_k - r_0 \pi_0^{k+1} + \pi_0^{k+1} \sum_{m=2}^{\infty} (m-1)r_m = \\ &= (1 - \pi_0^{k+1}) f_k + \pi_0^{k+1} a, \quad (23) \end{aligned}$$

где

$$a = \sum_{m=2}^{\infty} (m-1)r_m - r_0 = \mu \bar{v} - 1.$$

Отсюда имеем:

$$f_k - f_{k+1} = \pi_0^{k+1} f_k + r_0 \pi_0^{k+1} - \pi_0^{k+1} \sum_{m=2}^{\infty} (m-1) r_m = \pi_0^{k+1} (f_k - a). \quad (24)$$

Из выражения для  $f_k$  находим:

$$f_1 = \sum_{m=2}^{\infty} (m-1) r_m = \mu \bar{v} - (1-r_0) = a + r_0 > a.$$

Следовательно, выполняется неравенство  $f_1 > f_2$  (см. (24)). Пусть  $f_k > a$ , т.е. (см. (24))  $f_k > f_{k+1}$ . Докажем, что тогда  $f_{k+1} > f_{k+2}$ . Из (24), (23) и предположения  $f_k > a$  следует

$$f_{k+1} = (1 - \pi_0^{k+1}) f_k + \pi_0^{k+1} a > (1 - \pi_0^{k+1}) a + \pi_0^{k+1} a = a,$$

т.е.  $f_{k+1} > f_{k+2}$ .

Следовательно, по индукции следует  $f_k > f_{k+1}$  для любых  $k \geq 1$ , т.е.  $W(k)$  возрастает по  $k \geq 1$ . Таким образом, в выражении (10) для  $F(k)$  сомножители  $(1 - \pi_0^{k+1})/\pi_0^{k+1}$  и  $\bar{W}(k)$  возрастают по  $k$  и, следовательно,  $F(k)$  возрастает, а функция  $G(k)$  убывает по  $k$  (см. (11)).

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим поведение функции  $g^k$  при последовательном увеличении значения  $k > 0$ . Как следует из (12), неравенства  $g^k < g^{k+1}$  и  $g^k < G(k)$  эквивалентны. Отсюда следует, что если при значении  $k > 0$  выполняется неравенство  $g^k < G(k)$ , то при значении  $k+1$  выполняется неравенство  $g^{k+1} > g^k$ , и наоборот: если при значении  $k > 0$  выполняется неравенство  $g^k > G(k)$ , то при значении  $k+1$  выполняется неравенство  $g^{k+1} \leq g^k$ , а при  $g^k = G(k)$  выполняется равенство  $g^{k+1} = g^k$ .

Рассмотрим сначала случай  $C_2 > 0$ . Пусть  $k_1$  — произвольное число,  $1 \leq k_1 < \infty$ . Рассмотрим два альтернативных случая: (1)  $g^{k_1} \geq G(k_1)$ ; (2)  $g^{k_1} < G(k_1)$ .

Пусть  $g^{k_1} \geq G(k_1)$ . Тогда если  $g^{k_1} > G(k_1)$ , то согласно (12) (так как  $0 < \pi_0^{k_1+1} < 1$ ) выполняется  $g^{k_1+1} > G(k_1)$ , а так как  $G(k)$  не возрастает по  $k > 0$  (согласно лемме 4), выполняется  $g^{k_1+1} > G(k_1+1)$ . Следовательно,  $g^k > G(k)$ ,  $k \geq k_1$ , и согласно рассуждениям в начале доказательства последовательность  $\{g^k, k = k_1, k_1+1, \dots\}$  является убывающей, т.е.  $g^k < g^{k_1}$ ,  $k > k_1$ , откуда следует, что существует  $k^0 \leq k_1$ . Если  $g^{k_1} = G(k_1)$ , то из (12) и леммы 4 следует либо  $g^k = G(k) = g^{k_1}$ ,  $k > k_1$ , либо существует  $k_1 < k_2 < \infty$  такое, что  $g^k = G(k) = g^{k_1}$ ,  $k_1 < k \leq k_2$ ,  $g^{k_2} > G(k_2)$ . Тогда в первом случае  $k^0 \leq k_1$ , во втором случае, как уже было показано, существует  $k^0 \leq k_2$  и, так как  $g^k = g^{k_1}$ ,  $k_1 \leq k \leq k_2$ , то  $k^0 \leq k_1$ , т.е. при  $g^{k_1} \geq G(k_1)$  утверждение 1 в формулировке теоремы справедливо. При этом если  $k_1 = 1$ , то  $k^0 = 1$ , т.е. выполняется утверждение 2 в формулировке теоремы. Заметим также, что при  $1 < k^0 < \infty$  выполняется утверждение 4 теоремы.

Пусть  $g^{k_1} < G(k_1)$ . Тогда согласно (12) из  $g^{k_1} < G(k_1)$  следует  $g^{k_1+1} > g^{k_1}$  и  $g^{k_1+1} < G(k_1)$  (так как  $0 < \pi_0^{k_1+1} < 1$ ). Так как  $G(k)$  не возрастает по  $k > 0$ , то либо  $g^{k_1+1} < G(k_1+1)$ , либо  $g^{k_1+1} \geq G(k_1+1)$ . Следовательно, если  $\inf_{k>0} G(k) < \sup_{k>0} g^k$ , то существует

$k_1 < k_2 < \infty$  такое, что  $g^{k_2} \geq G(k_2)$ ,  $g^k < G(k)$ ,  $k_1 \leq k \leq k_2 - 1$ . В этом случае, как показано выше, существует  $k^0 \leq k_2$ , а именно:  $k^0 = k_2$  (это следует из того, что  $k^0 \leq k_2$  и  $g^k < G(k)$ ,  $k_1 \leq k \leq k_2 - 1$ ), т.е. утверждение 1 теоремы 1 справедливо.

Заметим также, что при  $k^0 > 1$  выполняется и утверждение 4 теоремы 1. Если  $\inf_{k>0} G(k) \geq \sup_{k>0} g^k$ , то  $g^k < G(k)$ ,  $k \geq k_1$ , и в этом случае  $k^0 = \infty$ .

Рассмотрим теперь случай  $C_2 = 0$ . Из (11) следует  $G(k) = const$ ,  $k > 0$ . Рассуждая, как в случае  $C_2 > 0$ , легко доказать, что последовательность  $\{g^k, k \geq 1\}$  удовлетворяет неравенствам  $g^1 \geq g^2 \geq \dots \geq g^n \geq \dots \geq const$  при условии  $g^1 \geq const$  и неравенствам  $g^1 < g^2 < \dots < g^n < \dots < const$  при условии  $g^1 < const$ . Как видим,  $k^0 = 1$  при  $g^1 \geq const$  и  $k^0 = \infty$  при  $g^1 < const$ . Следовательно, утверждение 3 теоремы 1 верно.

## Литература

1. *Welzl M.* Network congestion control. — New York, NY, USA: Wiley, 2005. 282 p.
2. *Irland M.* Buffer management in a packet switch // IEEE T. Comput., 1978. Vol. 28. No. 7. P. 328–337.
3. *Печинкин А. В., Разумчик Р. В.* Время пребывания в различных режимах системы обслуживания с неординарными пуассоновскими входящими потоками, рекуррентным обслуживанием и гистерезисной политикой // Информационные процессы, 2015. Т. 15. № 3. С. 324–336.
4. *Жерновский Ю. В.* Решение задач оптимального синтеза для некоторых марковских моделей обслуживания // Информационные процессы, 2010. Т. 10. № 3. С. 257–274.
5. *Коновалов М. Г.* Об одной задаче оптимального управления нагрузкой на сервер // Информатика и её применения, 2013. Т. 7. Вып. 4. С. 34–43.
6. *Агаларов Я. М.* Пороговая стратегия ограничения доступа к ресурсам в системе массового обслуживания  $M/D/1$  с функцией штрафов за несвоевременное обслуживание заявок // Информатика и её применения, 2015. Т. 9. Вып. 3. С. 56–65.
7. *Гришунина Ю. Б.* Оптимальное управление очередью в системе  $M/G/1/\infty$  с возможностью ограничения приема заявок // Автоматика и телемеханика, 2015. № 3. С. 79–93.
8. *Агаларов Я. М.* Максимизация среднего стационарного дохода системы массового обслуживания типа  $M/G/1$  // Информатика и её применения, 2017. Т. 11. Вып. 2. С. 25–32.
9. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов / Пер. с англ. — М.: Мир, 1971. 536 с. (*Karlin S.* A first course in stochastic processes. — New York and London: Academic Press, 1968. 502 p.)
10. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания. — М.: РУДН, 1995. 529 с.

Поступила в редакцию 16.06.17



## ABOUT THE PROBLEM OF PROFIT MAXIMIZATION IN $G/M/1$ QUEUING SYSTEMS WITH THRESHOLD CONTROL OF THE QUEUE

Ya. M. Agalarov and V. S. Shorgin

Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** The problem of maximizing the average profit per time in  $G/M/1$  queuing systems is considered on the set of stationary access restriction threshold strategies with one “switch point.” Profit is defined as the following measures: service fee; hardware maintenance fee; fine for service delay; fine for unhandled requests; and fine for system idle. The authors formulated the necessary and sufficient conditions for optimality of the finite threshold value. The authors developed a method of sequential descent to the optimal threshold. The authors proposed an algorithm for calculating the optimal threshold value and the corresponding value of the objective function.

**Keywords:** queuing system; threshold strategy; optimization

**DOI:** 10.14357/19922264170407

### Acknowledgments

The work was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 15-07-03406).

### References

1. Welzl, M. 2005. *Network congestion control*. New York, NY: Wiley. 282 p.
2. Irland, M. 1978. Buffer management in a packet switch. *IEEE T. Comput.* 28(7):328–337.
3. Pechinkin, A. V., and R. V. Razumchik. 2015. Vremya prebyvaniya v razlichnykh rezhimakh sistemy obsluzhivaniya s neordinarnymi puassonovskimi vkhodyashchimi potokami, rekurrentnym obsluzhivaniem i gisterezisnoy politikoy [First passage times between modes in the queueing system with batch Poisson arrivals, general service and hysteresis policy]. *Informatsionnye protsessy* [Information Processes] 15(3):324–336.
4. Zhernovyy, Yu. V. 2010. Reshenie zadach optimal'nogo sinteza dlya nekotorykh markovskikh modeley obsluzhivaniya [Solution of optimum synthesis problem for some Markov models of service]. *Informatsionnye protsessy* [Information Processes] 10(3):257–274.
5. Konovalov, M. G. 2013. Ob odnoy zadache optimal'nogo upravleniya nagruzkoy na server [About one task of over-load control]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 7(4):34–43.
6. Agalarov, Ya. M. 2015. Porogovaya strategiya ogranicheniya dostupa k resursam v sisteme massovogo obsluzhivaniya  $M/D/1$  s funktsiey shtrafov za nesvoevremennoe obsluzhivanie zayavok [The threshold strategy for restricting access in the  $M/D/1$  queueing system with penalty function for late service]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(3):56–65.
7. Grishunina, Yu. B. 2015. Optimal control of queue in the  $M/G/1/\infty$  system with possibility of customer admission restriction. *Automat. Rem. Contr.* 76(3):433–445.
8. Agalarov, Ya. M. 2017. Maksimizatsiya srednego statsionarnogo dokhoda sistemy massovogo obsluzhivaniya tipa  $M/G/1$  [Maximization of average stationary profit in  $M/G/1$  queueing system]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 11(2):25–32.
9. Karlin, S. 1968. *A first course in stochastic processes*. New York – London: Academic Press. 502 p.
10. Bocharov, P. P., and A. V. Pechinkin. 1995. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queueing theory]. Moscow: RUDN. 529 p.

Received June 16, 2017

### Contributor

**Agalarov Yaver M.** (b. 1952) — Candidate of Science (PhD) in technology, associate professor; leading scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; agglar@yandex.ru

**Shorgin Vsevolod S.** (b. 1978) — Candidate of Science (PhD) in technology, senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; VShorgin@ipiran.ru

## МОДЕЛЬ МНОЖЕСТВА ИНФОРМАЦИОННЫХ ПРОСТРАНСТВ В ЗАДАЧЕ ПОИСКА ИНСАЙДЕРА\*

А. А. Грушо<sup>1</sup>, М. И. Забейайло<sup>2</sup>, Д. В. Смирнов<sup>3</sup>, Е. Е. Тимонина<sup>4</sup>

**Аннотация:** В задаче поиска инсайдеров разработан подход к объединению компрометирующих данных, наблюдаемых в разных информационных пространствах. Накопление информации в каждом пространстве рассматривается как вероятностный процесс. Рассматриваемый подход основан на запретах и полузапретах вероятностных мер в разных информационных пространствах. С последовательностями событий, наблюдаемых в этих информационных пространствах, связываются булевы переменные. Появление полузапретов соответствует значению «1» соответствующих булевых переменных. Последовательности булевых переменных в разных информационных пространствах легко связываются с помощью логических выражений. Эти выражения описывают опасные тенденции, наблюдаемые в различных информационных пространствах.

**Ключевые слова:** информационная безопасность; инсайдер; запреты и полузапреты вероятностных мер; архитектура объединения информационных источников

**DOI:** 10.14357/19922264170408

### 1 Введение

Разработка методов выявления инсайдеров в организации является актуальной задачей. Решению этой задачи посвящен ряд исследований [1–3]. Эти исследования основаны на использовании различных статистических методов выявления аномалий в деятельности сотрудников организации. Очевидно, что хорошая идентификация инсайдера основана на объединенной картине незначительных аномалий. При этом всегда используется информация, касающаяся разных аспектов деятельности потенциальных инсайдеров. Анализ различных типов информации и формирование выводов из нее — сложная задача.

В работе предлагается подход к решению этой задачи, основанный на запретах вероятностных мер [4–6]. Основная идея работы состоит в следующем. Рассматривается конечное множество информационных пространств, в которых ищутся признаки, связанные с целями деятельности инсайдера. Накопление информации в каждом пространстве рассматривается как вероятностный процесс. Появление искомым признаков интерпретируется как запрет вероятностной меры деятельности инсайдера. Возникновение запретов в разных инфор-

мационных пространствах можно связать дизъюнктивной формой в единое целое. Тогда значение «1» этой суммарной дизъюнктивной формы определяет инсайдера.

### 2 Общая математическая модель множества информационных пространств

Целью построения модели является внесение в алгоритм поиска инсайдера самой различной информации, в которой могут появиться признаки деятельности инсайдера. Необходимо отметить, что привлекаемая информация может содержать психологический поведенческий фон анализируемого лица, который усиливает малозначимые аномальные действия потенциального инсайдера.

Пусть  $U$  — контролируемый потенциальный инсайдер,  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$  — цели инсайдерских атак. В ходе анализа информации об  $U$  могут рассматриваться подмножества  $T$ . Аномалии в общем фоне поведения и в характере  $U$  описываются всем множеством  $T$ . В анализе  $U$  используется  $m$  информационных пространств. Элементы каждого

\* Работа поддержана РФФИ (проект 15-07-02053).

<sup>1</sup> Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, grusho@yandex.ru

<sup>2</sup> Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, m.zabehailo@yandex.ru

<sup>3</sup> ПАО Сбербанк России, dvsmirnov@sberbank.ru

<sup>4</sup> Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, eltimon@yandex.ru

информационного пространства описываются своим языком, и пусть  $E_1, E_2, \dots, E_m$  — алфавиты этих языков, а  $E_1^*, E_2^*, \dots, E_m^*$  — множества слов конечной длины в этих алфавитах. Языки описания информации  $L_1, L_2, \dots, L_m$  в информационных пространствах удовлетворяют условию  $L_i \subseteq E_i^*$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Введем понятие процесса наблюдения в информационном пространстве. Пусть время является дискретным и описывается множеством натуральных чисел. Наблюдение за  $U$  в  $i$ -м информационном пространстве к моменту времени  $n$  представляет собой конечное множество слов в языке  $L_i$ . В силу естественных технических ограничений в каждом языке  $L_i$  выделяется конечное множество слов  $X_{i,n}$ , которое представляет интерес при наблюдении за  $U$  к моменту времени  $n$ . Обозначим через  $\Sigma(X_{i,n}) = \{\sigma : \sigma \subseteq X_{i,n}\}$  множество всех подмножеств  $X_{i,n}$ , а через  $\Sigma_j(X_{i,j}) \subseteq \Sigma(X_{i,n})$ ,  $n \geq j$ , накопленные данные к моменту времени  $j$ . Очевидно, что  $\Sigma_1(X_{i,1}) \subseteq \Sigma_2(X_{i,2}) \subseteq \dots$ . Пусть  $V_n(X_{i,n}) = \Sigma_n(X_{i,n}) \setminus \Sigma_{n-1}(X_{i,n-1})$  — дополнительная информация, полученная об  $U$  в момент времени  $n$ .

Последовательность  $\{V_n(X_{i,n})\}_{n \geq 1}$  можно рассматривать как случайный процесс. Для корректного определения случайного процесса необходимо определить  $\sigma$ -алгебру на последовательностях  $\{V_n(X_{i,n})\}_{n \geq 1}$ . Пусть  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{A}_i$  определяется как минимальная  $\sigma$ -алгебра, порожденная цилиндрическими множествами. Эта алгебра также является борелевской  $\sigma$ -алгеброй в тихоновском произведении дискретных топологических пространств в пространстве всех бесконечных последовательностей  $V_i^\infty$ , которые могут быть траекториями рассматриваемого случайного процесса [7, 8].

Конечное множество измеримых пространств  $(V_i^\infty, \mathcal{A}_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , порождает измеримое пространство  $(V^\infty, \mathcal{A})$ , в котором  $V^\infty = \prod_{i=1}^m V_i^\infty$ , а  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{A}$  порождена  $\sigma$ -алгебрами  $\mathcal{A}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , на пространстве  $V^\infty$ .

Пусть поведение инсайдера в пространстве  $(V^\infty, \mathcal{A})$  описывается вероятностной мерой  $P$ . Как и в работах [4, 9], для меры  $P$  можно определить запреты этой вероятностной меры. Каждый запрет можно рассматривать как идентификацию инсайдера с полным описанием предыстории.

### 3 Модель полузапретов

Получившаяся модель является общей, но сложной для практического применения. Возможны различные способы ее упрощения. Рассмотрим один из таких способов.

Рассмотрим в отдельности каждое измеримое пространство  $(V_i^\infty, \mathcal{A}_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Пусть  $P^{(i)}$  — проекция меры  $P$  на пространство  $(V_i^\infty, \mathcal{A}_i)$ . Распределение вероятностей  $P^{(i)}$  характеризует поведение инсайдера в соответствующем информационном пространстве. Для каждого информационного пространства введем упрощенную модель. Пусть  $Q^{(i)}$  — некоторое распределение на пространстве  $(V_i^\infty, \mathcal{A}_i)$  и пусть  $P^{(i)}$  получается из  $Q^{(i)}$  введением некоторого числа запретов [10]. Эти запреты можно интерпретировать либо как признаки некоторого подозрительного поведения, либо как прямые указания на некоторые цели атак инсайдера из множества  $T$ . Это означает, что можно рассматривать траектории наблюдаемого процесса в информационном пространстве, несмотря на то что появляются запреты меры  $P^{(i)}$ . Будем называть эти запреты меры  $P^{(i)}$  в мере  $Q^{(i)}$  *полузапретами*.

Определим множество бинарных переменных  $x_{i,j}$ ,  $j = \overline{1; \infty}$ , следующим образом. Пусть  $\forall n x_{i,n} = 1$ , когда в момент времени  $n$  появляется полузапрет меры  $P^{(i)}$ . В противном случае  $x_{i,n} = 0$ . Тогда появление полузапретов к моменту времени  $n$  характеризуется дизъюнкцией  $\bigvee_{\{j=i\}}^n x_{i,j}$ . Отсюда возникает возможность конструктивного определения запрета в совокупности пространств на основе полузапретов в отдельных пространствах. Например, запрет можно определить как дизъюнкцию конъюнкций следующего вида:

$$\bigvee_{\{1 \leq i < l \leq m\}} \left( \left( \bigvee_{\{j=1\}}^n x_{i,j} \right) \wedge \left( \bigvee_{\{j=1\}}^n x_{l,j} \right) \right).$$

Эта формула означает, что запрет (идентификация инсайдера) возникает при появлении не менее двух полузапретов в рассматриваемом множестве информационных пространств.

Ясно, что можно варьировать способ принятия решения об идентификации инсайдера, а также рассматривать уточняющие цепочки таких решений.

### 4 Связь целей атак инсайдера с запретами

Определение запретов основано на двух подходах. В первом подходе каждая цель из множества  $T$  допускает возможность построения дерева атак (см., например, [11]). Построение деревьев атак давно используется в анализе уязвимостей. Путь к корню в дереве атак определяет последовательность шагов в каждой атаке. Кроме того, этот путь определяет цепочку событий, возможно в нескольких информационных пространствах. Эти события в отдельных информационных пространствах характеризуются двумя способами:

- (1) прямыми или косвенными признаками прохождения пути в дереве атак, которые могут отслеживаться функциями мониторинга безопасности;
- (2) сопутствующими фоновыми событиями, усиливающими или смягчающими возможности реализаций событий безопасности.

С каждой вершиной или с каждым ребром дерева атак можно связать одно или несколько информационных пространств, в которых содержатся описания признаков атак и/или фона. Эти описания суть полузапреты. Таким образом определяется привязка целей атак к наблюдаемым данным в разных информационных пространствах.

Второй подход связан с выявлением аномалий в наблюдаемых случайных процессах в разных информационных пространствах [12]. Эти аномалии анализируются средствами интеллектуального анализа данных на предмет выявления эмпирических закономерностей и эмпирических причинно-следственных связей [13, 14]. Этот подход позволяет построить профили поведения  $U$ , из них вывести новые пути атак и новые цели атак инсайдера.

## 5 Примеры

Приведем примеры информационных пространств и полузапретов в них.

**Пример 1.** Пусть имеется описание детерминированной последовательности функций, выполняемых  $U$ . Полузапретами могут считаться отклонения от детерминированной последовательности функций в сторону доступа к ценной информации, не связанной с функциями  $U$ . Цель инсайдера — кража ценной информации. Этот случай рассматривался в работе [6].

**Пример 2.** Рассмотрим связи  $U$  с другими пользователями в социальных сетях. Полузапрет определяется наличием связанных с  $U$  пользователей, имевших или имеющих отношение к криминалу. Эти полузапреты имеют значение фона. Однако они же могут указывать на цели кражи ценной информации.

**Пример 3.** Рассмотрим взаимодействие  $U$  с дружественными корреспондентами в социальных сетях. Из этих данных можно получить информацию о финансовых трудностях, испытываемых  $U$ . Эта информация может считаться полузапретом в негативном фоне, побуждающим  $U$  к совершению противоправных действий.

**Пример 4.** Полузапретом с негативным фоном можно считать внезапный интерес к дорогим матери-

альным объектам (дорогие автомобили, дачи, квартиры и т.п.). Этот полузапрет определяется появлением аномалий в профиле  $U$ . Если  $U$  связан с доступом к ценной информации, то целью его атаки можно считать кражу ценной информации, которую с указанным полузапретом можно считать запретом.

## 6 Заключение

В задаче поиска инсайдеров разработан подход к объединению компрометирующих данных, наблюдаемых в разных информационных пространствах. Этот подход основан на запретах и полузапретах вероятностных мер в различных информационных пространствах. С последовательностями событий, наблюдаемыми в этих информационных пространствах, связываются булевы переменные. Появление полузапретов соответствует значению «1» соответствующих булевых переменных.

Последовательности булевых переменных в разных информационных пространствах легко связываются с помощью логических выражений. Эти выражения описывают опасные тенденции, наблюдаемые в различных информационных пространствах. Выбор логических выражений (функций) может быть построен на использовании всей предыстории наблюдений за потенциальным инсайдером в соответствующих информационных пространствах или при анализе его подозрительной деятельности в заданный промежуток времени. При этом использование различных булевых функций позволяет проводить различные виды анализа на одних и тех же статистических данных.

С учетом различных целей атак инсайдера в дальнейшем можно перейти к рассмотрению  $k$ -значных функций.

Глубокие связи в каждом информационном пространстве можно исследовать с помощью методов интеллектуального анализа данных.

## Литература

1. Anomaly Detection at Multiple Scales (ADAMS). — General Services Administration, 22.10.2010. [https://www.fbo.gov/download/2f6/2f6289e99a0c04942bbd89ccf242fb4c/DARPA-BAA-11-04\\_ADAMS.pdf](https://www.fbo.gov/download/2f6/2f6289e99a0c04942bbd89ccf242fb4c/DARPA-BAA-11-04_ADAMS.pdf).
2. Yu R., He X., Liu Y. GLAD: Group anomaly detection in social media analysis. 1940. arXiv:1410.1940.
3. Senator T., Goldberg H.G., Memory A., et al. Detecting insider threats in a real corporate database of computer usage activity // 19th ACM SIGKDD Conference



- (International) on Knowledge Discovery and Data Mining Proceedings. — New York, NY, USA: ACM, 2013. P. 1393–1401.
4. Grusho A., N. Grusho, and E. Timonina. Quality of tests defined by bans // 16th Applied Stochastic Models and Data Analysis Conference (International) Proceedings. — Piraeus, Greece: ISAST, 2015. P. 289–295.
  5. Grusho A., Grusho N., Timonina E. Modelling for ensuring information security of the distributed information systems // 31th European Conference on Modelling and Simulation Proceedings. — Germany: Digitaldruck Pirrot GmbH Dudweiler, 2017. P. 656–660.
  6. Мартыанов Е. А. Возможность выявления инсайдера статистическими методами // Системы и средства информатики, 2017. Т. 27. № 2. С. 41–47.
  7. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры / Пер. с фр. — М.: Наука, 1968. 272 с. (*Bourbaki N. Topologie générale. Ch. 1: Structures topologiques. Ch. 2: Structures uniformes.* — Paris: Hermann, 1940. 129 p.)
  8. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1993. 496 с.
  9. Grusho A., Timonina E. Consistent sequences of tests defined by bans // *Optimization theory, decision making, and operations research applications* / Eds. A. Migdalas, A. Sifaleras, C. K. Georgiadis, et al. — Springer proceedings in mathematics & statistics ser. — New York – Heidelberg – Dordrecht – London: Springer-Verlag, 2013. Vol. 31. P. 281–291.
  10. Грушо А. А., Грушо Н. А., Тимонина Е. Е. Включение новых запретов в случайные последовательности // Информатика и её применения, 2014. Т. 8. Вып. 4. С. 48–54.
  11. Sheyner O., Haines J., Jha S., Lippmann R., Wing J. M. Automated generation and analysis of attack graphs // IEEE Symposium on Security and Privacy Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2002. P. 273–284.
  12. Grusho A., Grusho N., Timonina E. Detection of anomalies in non-numerical data // 8th Congress (International) on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2016. P. 273–276.
  13. Грушо А. А., Грушо Н. А., Забейжайло М. И., Тимонина Е. Е. Интеграция статистических и детерминистических методов анализа информационной безопасности // Информатика и её применения, 2016. Т. 10. Вып. 3. С. 19–25.
  14. Grusho A. Data mining and information security // *Computer network security* / Eds. J. Rak, J. Bay, I. Kotenko, et al. — Lecture notes in computer science ser. — Springer, 2017. Vol. 10446. P. 28–33.

Поступила в редакцию 17.10.17

---

---

## THE MODEL OF THE SET OF INFORMATION SPACES IN THE PROBLEM OF INSIDER DETECTION

A. A. Grusho<sup>1</sup>, M. I. Zabezhailo<sup>1</sup>, D. V. Smirnov<sup>2</sup>, and E. E. Timonina<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Sciences and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

<sup>2</sup>Sberbank of Russia, 19 Vavilov Str., Moscow 117999, Russian Federation

**Abstract:** In the problem of insider detection, the approach to combining compromising data observed in different information spaces is developed. Accumulation of information in each space is considered as a random process. The considered approach is based on bans and semibans of probability measures in different information spaces. Boolean variables communicate with the help of sequences of events observed in the information spaces. Appearance of semibans corresponds to value “1” of the appropriate Boolean variables. Sequences of Boolean variables in different information spaces easily communicate by means of logical expressions. The expressions describe dangerous tendencies observed in different information spaces.

**Keywords:** information security; insider; bans and semibans of probability measures; architecture of combining information sources

**DOI:** 10.14357/19922264170408

## Acknowledgments

The paper was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 15-07-02053).



## References

1. General Services Administration. 22.10.2010. Anomaly Detection at Multiple Scales (ADAMS). Available at: [https://www.fbo.gov/download/2f6/2f6289e99a0c04942bbd89ccf242fb4c/DARPA-BAA-11-04\\_ADAMS.pdf](https://www.fbo.gov/download/2f6/2f6289e99a0c04942bbd89ccf242fb4c/DARPA-BAA-11-04_ADAMS.pdf) (accessed May 12, 2011).
2. Yu, R., X. He, and Y. Liu. 1940. GLAD: Group anomaly detection in social media analysis. Available at: arXiv:1410.1940 (accessed October 7, 2014).
3. Senator, T., H. G. Goldberg, A. Memory, *et al.* 2013. Detecting insider threats in a real corporate database of computer usage activity. *19th ACM SIGKDD Conference (International) on Knowledge Discovery and Data Mining Proceedings*. New York, NY: ACM. 1393–1401.
4. Grusho, A., N. Grusho, and E. Timonina. 2015. Quality of tests defined by bans. *16th Applied Stochastic Models and Data Analysis Conference (International) Proceedings*. — Piraeus, Greece: ISAST, 2015. P. 289–295.
5. Grusho, A., N. Grusho, and E. Timonina. 2017. Modelling for ensuring information security of the distributed information systems. *31th European Conference on Modelling and Simulation Proceedings*. Germany: Digitaldruck Pirrot GmbH Dudweiler. 656–660.
6. Martyanov, E. A. 2017. Vozmozhnost' vyyavleniya insaydera statisticheskimi metodami [Possibility of insider detection by statistical techniques]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 27(2):41–47.
7. Bourbaki, N. 1940. *Topologie générale*. Ch. 1: Structures topologiques. Ch. 2: Structures uniformes. Paris: Hermann. 129 p.
8. Prokhorov, Yu. V., and Yu. A. Rozanov. 1993. *Teoriya veroyatnostey* [Theory of probabilities]. Moscow: Nauka. 496 p.
9. Grusho, A., and E. Timonina. 2013. Consistent sequences of tests defined by bans. *Optimization theory, decision making, and operations research applications*. Eds. A. Migdalas, A. Sifaleras, C. K. Gorgiadis, *et al.* Springer proceedings in mathematics & statistics ser. New York – Heidelberg – Dordrecht – London: Springer-Verlag. 31:281–291.
10. Grusho, A., N. Grusho, and E. Timonina. 2014. Vklyuchenie novykh zapretov v sluchaynye posledovatel'nosti [Switching on of new bans in random sequences]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 8(4):48–54.
11. Sheyner, S., J. Haines, S. Jha, R. Lippmann, and J. M. Wing. 2002. Automated generation and analysis of attack graphs. *IEEE Symposium on Security and Privacy Proceedings*. 273–284.
12. Grusho, A., N. Grusho, and E. Timonina. 2016. Detection of anomalies in non-numerical data. *8th Congress (International) on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops Proceedings*. — Piscataway, NJ: IEEE. 273–276.
13. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, and E. E. Timonina. 2016. Integratsiya statisticheskikh i deterministskikh metodov analiza informatsionnoy bezopasnosti [Integration of statistical and deterministic methods of information security analysis]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 10(3):19–25.
14. Grusho, A. 2017. Data mining and information security. *Computer network security*. Eds. J. Rak, J. Bay, I. Kotenko, *et al.* Lecture notes in computer science ser. Springer. 10446:28–33.

Received October 17, 2017

## Contributors

**Grusho Alexander A.** (b. 1946) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Head of Laboratory, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Sciences and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; grusho@yandex.ru

**Zabezhailo Michael I.** (b. 1956) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, Head of Laboratory, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Sciences and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; m.zabezhailo@yandex.ru

**Smirnov Dmitry V.** (b. 1984) — business partner for IT security department, Sberbank of Russia, 19 Vavilov Str., Moscow 117999, Russian Federation; dvlsmirnov@sberbank.ru

**Timonina Elena E.** (b. 1952) — Doctor of Science in technology, professor, leading scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Sciences and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; eltimon@yandex.ru

# АНАЛИЗ ВРЕМЕНИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ СЕАНСА СВЯЗИ В ГЕТЕРОГЕННЫХ БЕСПРОВОДНЫХ СЕТЯХ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ ХЭНДОВЕРЕ\*

А. Ю. Гребешков<sup>1</sup>, Ю. В. Гайдамака<sup>2</sup>, О. Г. Вихрова<sup>3</sup>, Э. Р. Зарипова<sup>4</sup>

**Аннотация:** Для мобильных абонентов гетерогенной беспроводной сети в некоторых точках могут быть одновременно доступны соединения в перекрывающихся друг друга областях покрытия радиосетей различных стандартов. Пользователь с современным многорежимным абонентским устройством может переключаться между различными сетями радиодоступа для получения требуемых услуг связи с помощью процедуры вертикального хэндовера (vertical handover, VHO). Для обеспечения качества и непрерывности связи существенное значение имеет время переключения сеанса связи из текущей в целевую сеть. Разработана процедура вертикального хэндовера из беспроводной локальной сети (Wireless Local Area Network, WLAN) в мобильную сеть (3GPP Long Term Evolution, LTE). Проведен анализ среднего значения и квантиля времени переключения с помощью метода оценки времени пребывания заявок в многофазной системе массового обслуживания (СМО) с фоновым трафиком. Проведен численный эксперимент для близких к реальным исходных данных процесса переключения сеанса связи.

**Ключевые слова:** гетерогенная беспроводная сеть; сотовая сеть; LTE; мобильность; вертикальный хэндовер; надежность соединения; доступность соединения; показатель эффективности; процедура установления соединения

**DOI:** 10.14357/19922264170409

## 1 Введение

Тенденция развития современных сотовых сетей, приводящая к увеличению емкости сетей за счет их пространственного уплотнения и совершенствования методов управления распределением радиоресурса, соответствует концепции HetNet (Heterogeneous Network) — гетерогенных сетей. Реализация этой концепции стала возможной в беспроводных сетях стандарта LTE/LTE-A [1]. Исследования таких сетей с точки зрения различных показателей качества активно ведутся в России [2–4]. После выбора целевой сети переключение сеанса связи многорежимного абонентского устройства (user equipment, UE) осуществляется с использованием процедуры, которая называется вертикальным хэндовером (VHO).

Использование VHO позволяет повысить качество обслуживания, например при использовании тактильного Интернета [5], для поддержки приложений, работающих в реальном времени [6]. Поэтому актуально проведение исследований и анализ времени переключения с целью предотвращения

потери информации, что особенно важно в приложениях реального времени. Критерии принятия решения о VHO рассмотрены в [7]. В [8] при анализе исполнения VHO не рассматриваются процедуры авторизации в целевой сети, которые необходимы при VHO. В [9] на основе теоремы Бёрке рассматривается модель аутентификации и связанные с этим временные задержки без учета времени на получение информации о параметрах целевой сети для VHO. В [10, 11] не учтено время подключения к целевой сети и время выделения радиоканала.

Отличием данной работы от [7–11] является детальная процедура обмена сигнальными сообщениями при вертикальном хэндовере [12], которая содержит все стадии, начиная от момента получения информации о доступных сетях и заканчивая началом IP (Internet Protocol) сессии абонентского устройства в целевой сети.

На основе описанной в разд. 2 процедуры обмена сигнальными сообщениями при вертикальном хэндовере в разд. 3 разработан метод оценки времени переключения при вертикальном хэндовере [13,

\* Публикация подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект 2.882.2017/4.6).

<sup>1</sup> Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, grebeshkov-ay@psuti.ru

<sup>2</sup> Российский университет дружбы народов; Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, gaydamaka\_yuv@rudn.university

<sup>3</sup> Российский университет дружбы народов, vikhrova\_og@rudn.university

<sup>4</sup> Российский университет дружбы народов, zaripova\_er@rudn.university

14]. С его помощью в разд. 4 проведена оценка среднего времени VHO с учетом загрузки узлов текущей и целевых сетей.

## 2 Процедура обмена сигнальными сообщениями при вертикальном хэндовере из недоверенной сети в сеть LTE

Для разработки процедуры принимаются исходные положения, которые не нарушают ее целостность и не ограничивают применение. Вертикальный хэндовер осуществляется сервером ANDSF (Access Network Discovery and Selection Function). Для обмена данными между UE и узлом ANDSF используется специфицированная партнерством 3GPP (3rd Generation Partnership Project) эталонная точка стыка S14 уровня приложений. Поддерж-

ка мобильности IP при VHO в рассматриваемом примере обеспечивается применением мобильной версии протокола с двойным стеком IPv6 [15, 16]. Для обеспечения безопасности используется протокол IPsec, идентификация пользователя с помощью шифрования открытым ключом IKE (Internet Key Exchange) [17].

Пусть многорежимное устройство UE работает в текущей WLAN-сети, авторизация и аутентификация в которой не соответствуют спецификациям 3GPP. С точки зрения оператора сети LTE текущая сеть считается недоверенной (nontrusted) IP-сетью доступа, поэтому UE инициирует VHO в целевую сеть LTE. Функциональными устройствами, вовлеченными в процедуру, являются: UE, ANDSF, шлюз пакетных данных ePDG (evolved Packet Data Gateway), расширенная сеть радиодоступа E-UTRAN (evolved UMTS (Universal Mobile Telecommunication System) Terrestrial Radio Access Networks), узел управления мобильностью MME (Mobility Manage-

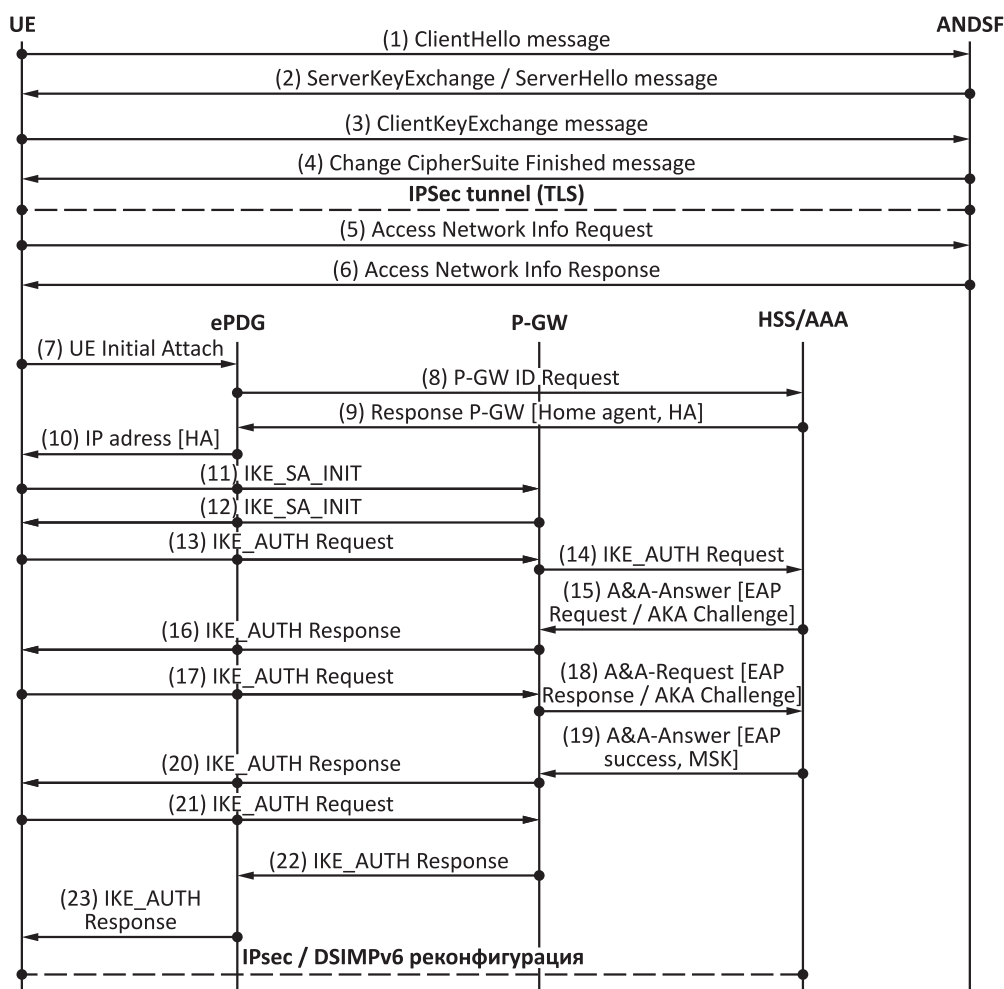


Рис. 1 Обмен сообщениями UE с ANDSF и авторизация UE в сети LTE

ment Entity), обслуживающий шлюз S-GW (Serving Gateway), пакетный шлюз P-GW (Packet Data Network Gateway), узел выставления счетов абонентам hPCRF (home network Policy and Charging Rules Function) и комбинированный сервер HSS/AAA (Home Subscriber Server/Authentication, Authorization, and Accounting).

Подробное описание сигнальных сообщений, включаемых в процедуру вертикального хэндовера, приведено в [14]. Обмен сигнальными сообщениями для данного этапа VHO представлен на рис. 1.

В завершающем этапе авторизации сообщении (23) UE получает от ePDG данные об успешной авторизации в сети LTE. После этого программное обеспечение UE реконфигурируется для рабо-

ты в сети LTE по туннелю IPsec через эталонную точку стыка 3GPP S2c.

Вторым этапом исполнения VHO является переключение UE в целевую сеть LTE из текущей недоверенной сети WLAN. Схема обмена сигнальными сообщениями на этом этапе показана на рис. 2.

В начале этапа 2 UE синхронизировано с расширенной сетью радиодоступа E-UTRAN, имеет информацию о физическом канале и временный идентификатор радиосоты. Сообщения (24)–(40) отвечают за реконфигурацию физических каналов. После сообщения (37), в котором узел S-GW подтверждает создание требуемого канала для поддержки IP-сессии через расширенную систему пакетной передачи данных EPS (Evolved Packet System) вместо обмена через WLAN, UE начинает

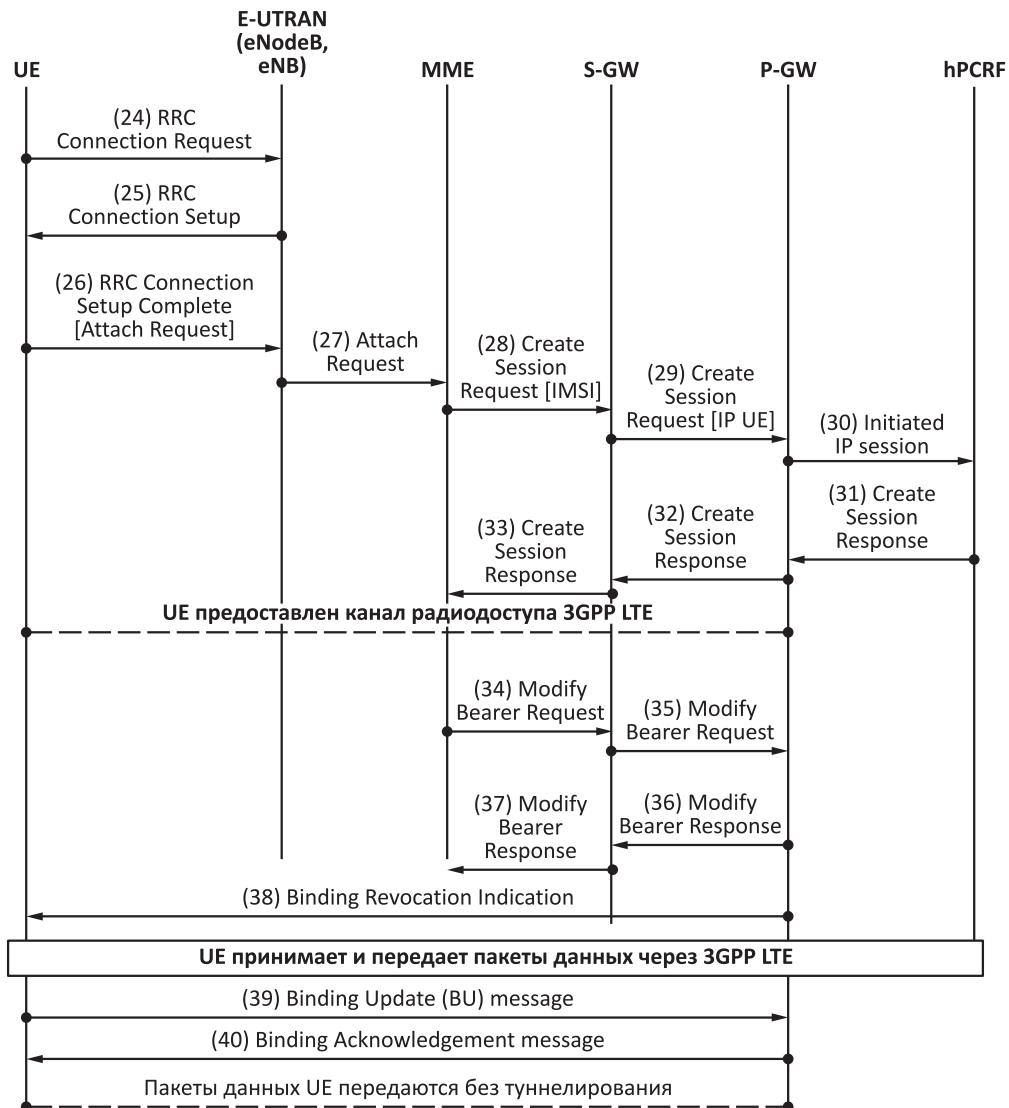


Рис. 2 Обмен сообщениями при установлении соединения UE с целевой сетью для VHO WLAN-LTE

принимать и передавать пакеты данных через сеть LTE.

### 3 Метод оценки времени переключения с учетом фонового трафика

В настоящей работе предлагается использовать приближенный метод оценки времени переключения с учетом наличия в сети фонового трафика [18]. Для перехода к аналитической модели пронумеруем введенные в предыдущих разделах функциональные устройства: UE (I), ANDSF (II), ePDG (III), E-UTRAN (IV), MME (V), S-GW (VI), P-GW (VII), hPCRF (VIII) и HSS/AAA (IX). Используемая методика подразумевает разбиение потока обслуживаемых в каждом узле сигнальных сообщений на основной и фоновый потоки. Под сообщениями основного потока будем понимать включенные в процедуру вертикального хэндовера сигнальные сообщения, под фоновым потоком — сообщения других задач. Поток сигнальных сообщений на рис. 3 образует цепь, состоящую из  $K = 39$  состояний.

Обозначим через  $\lambda_0$  и  $b_k$  интенсивность входящего потока и среднюю длительность обслуживания заявок основного потока на  $k$ -й фазе в многофазной СМО. Аналогично  $\lambda_k$  и  $d_k$  — интенсивность потока и средняя длительность обслуживания заявок фонового потока на  $k$ -й фазе.

Для расчета времени пребывания заявки в многофазной СМО необходимо вычислить коэффициент вариации длительности обслуживания на  $k$ -й фазе по формуле:

$$C_k^2 = \frac{(\lambda_0 + \lambda_k) (\lambda_0 b_k^{(2)} + \lambda_k d_k^{(2)})}{(\lambda_0 b_k + \lambda_k d_k)^2} - 1, \quad k = 1, \dots, K.$$

Здесь использованы обозначения вторых моментов времени обслуживания заявок основного  $b_k^{(2)}$  и фонового потока  $d_k^{(2)}$ .

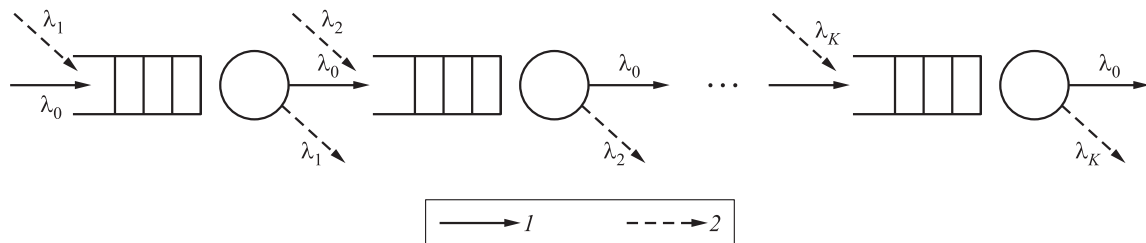


Рис. 3 Модель многофазной СМО с фоновым трафиком: 1 — основной поток заявок; 2 — фоновый поток заявок

Время ожидания начала обслуживания, полученное из известной формулы Поллачека–Хинчина, рассчитывается по формуле:

$$\omega_k = \frac{\rho_k^2 (1 + C_k^2)}{2(\lambda_0 + \lambda_k)(1 - \rho_k)}, \quad k = 1, \dots, K.$$

Здесь  $\rho_k = \lambda_0 b_k + \lambda_k d_k$  — суммарная нагрузка на узел, соответствующий  $k$ -й фазе,  $\rho_k < 1$ ,  $k = 1, \dots, K$ .

Время пребывания  $\Delta$  заявки в многофазной СМО равно сумме времен пребывания заявок основного потока на каждой фазе:

$$\Delta = \sum_{k=1}^K (\omega_k + b_k).$$

Время пребывания  $\Delta$  заявки в многофазной СМО с учетом фонового трафика соответствует времени переключения при вертикальном хэндовере.

Заметим, что данный метод позволяет найти квантиль уровня  $\psi$  времени пребывания заявки в многофазной СМО с фоновым трафиком по формуле:

$$Q_\psi = q_\psi + \sum_{k=1}^K \left( \frac{\ln(\gamma_k \omega_k)}{\gamma_k} + b_k \right),$$

где  $q_\psi$  является единственным положительным корнем уравнения

$$1 - \psi = \sum_{k=0}^{K-1} e^{-\gamma_k q_\psi} \frac{(\gamma_k q_\psi)^k}{k!}.$$

Параметры  $\gamma_k$  затухания функций распределения времени ожидания начала обслуживания на  $k$ -й фазе, в свою очередь, являются единственными положительными корнями уравнения

$$\alpha_k(\gamma_k) \beta_k(-\gamma_k) = 1,$$

где  $\alpha_k(s) = (\lambda_0 + \lambda_k)/(\lambda_0 + \lambda_k + s)$  — преобразование Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) функции распределения (ФР) интервалов времени между поступлениями заявок в узел на  $k$ -й фазе, а  $\beta_k(s) = (\lambda_0/(\lambda_0 + \lambda_k))e^{-sb_k} + (\lambda_k/(\lambda_0 + \lambda_k))e^{-sd_k}$  — ПЛС ФР длительности обслуживания заявок.



## 4 Численный эксперимент

Интенсивность запросов на совершение вертикального хэндовера зависит от местности, типа устройств UE, возможностей оператора связи, плотности мобильных пользователей и других параметров. В таблице приведены средние значения времен обслуживания сообщений в узлах (основной трафик). Некоторые сообщения обслуживаются дольше остальных в связи с их функциональными особенностями и большим объемом, при применении метода следует использовать данные статистических наблюдений.

На рис. 4 представлены результаты анализа времени переключения при вертикальном хэндовере для трех вариантов соотношения интенсивностей основного и фонового трафиков: 1 —  $\lambda_k = \lambda_0$ ; 2 —  $\lambda_k = 10\lambda_0$ ; 3 —  $\lambda_k = 100\lambda_0$ . Среднее время обслуживания фонового трафика  $d_k = 2$  мс.

Анализ времени переключения показал, что дополнительный трафик со средним временем об-

служивания несущественно влияет на время переключения, когда интенсивность этого трафика имеет тот же порядок, что и интенсивность основного трафика (кривые 1 и 2), и проявляется, когда отношения интенсивностей основного и фонового трафиков различаются на два порядка (кривые 3 на рис. 4).

На рис. 5 показана зависимость среднего значения и 95%-ного квантиля времени переключения при вертикальном хэндовере для трех значений средней длительности обслуживания сообщения фонового трафика  $d_k = 10, 20$  и  $50$  мс, интенсивности входящего основного и фонового трафика равны,  $\lambda_k = \lambda_0$ .

При одинаковой интенсивности фонового и основного трафика и увеличении среднего времени обслуживания фонового трафика до 50 мс наблюдается резкое увеличение времени переключения при вертикальном хэндовере (кривые 3 на рис. 5). Однако при среднем времени обслужи-

Средние времена обслуживания

Функциональные узлы	Среднее время обслуживания $\mu_i^{-1}$ , мс	Источники данных для численного эксперимента
I — UE	77,5 для (24); 28,5 для (26); 2 для остальных	[19]
II — ANDSF	70	Считается, как HSS/AAA
III — ePDG	2	Считается, как P-GW
IV — eNB	4	[20]
V — MME	15 для (27); 1 для остальных	[20, 21]
VI — S-GW	2	[19]
VII — P-GW	2	[19]
VIII — hPCRF	70	Считается, как HSS/AAA
IX — HSS/AAA	70	[22]

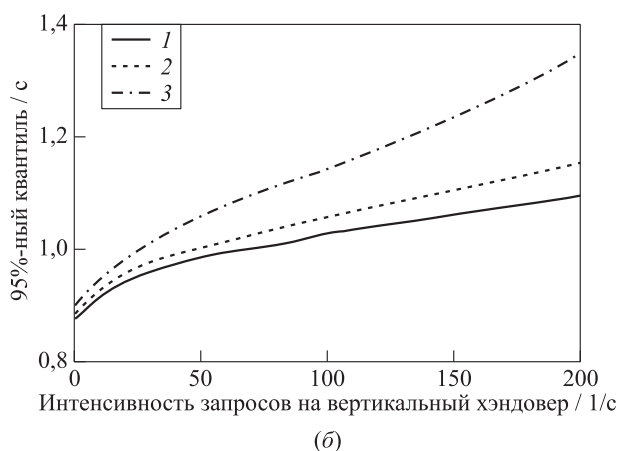
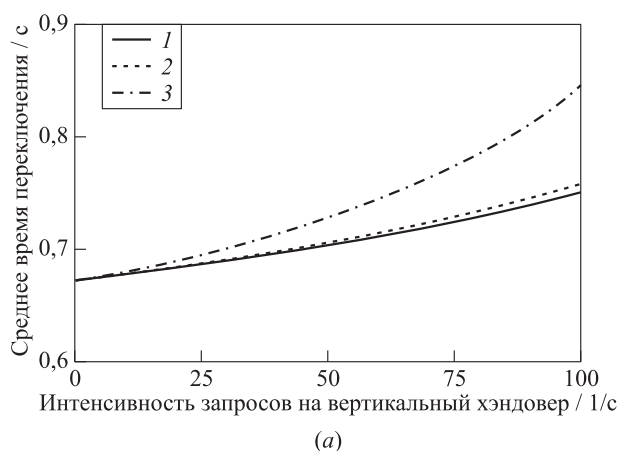
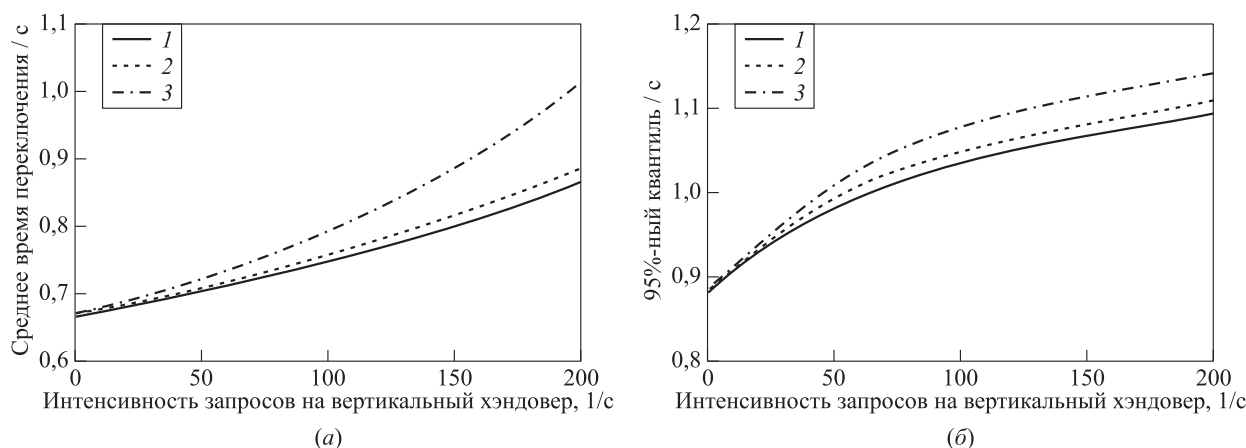


Рис. 4 Среднее время переключения (а) и 95%-ный квантиль времени переключения (б): 1 —  $\lambda_k = \lambda_0$ ; 2 —  $\lambda_k = 10\lambda_0$ ; 3 —  $\lambda_k = 100\lambda_0$



**Рис. 5** Среднее время переключения (а) и 95%-ный квантиль времени переключения: 1 —  $d_k = 10$  мс; 2 — 20; 3 —  $d_k = 50$  мс

вания фонового трафика до 20 мс фоновый трафик практически не влияет на время переключения при вертикальном хэндовере (кривые 1 и 2 на рис. 5).

Рекомендуемый метод оценки позволяет учесть влияние фонового трафика и на отдельные узлы сети, участвующие в процедуре. Тем не менее по результатам проведения статистических наблюдений на реальных сетях связи указанная рекомендация может уточняться.

## 5 Заключение

Применение процедуры вертикального хэндовера в гетерогенных беспроводных сетях в сочетании с использованием многорежимных абонентских устройств открывает широкие возможности по дифференцированному доступу абонентов к ресурсам сетей.

В статье разработана процедура обмена сигнальными сообщениями для ВНО из беспроводной локальной сети в сеть LTE, предложен аналитический метод оценки времени переключения. При этом пользователями могут быть как устройства пользователей, так и «умные» устройства, автоматически взаимодействующие по принципу M2M (Machine-to-Machine).

В дальнейших исследованиях планируется применить представленный метод для оценки времени переключения при обратной процедуре из сетей подвижной беспроводной связи LTE в сеть WLAN.

## Литература

1. Astely D., Dahlman E., Fodor G., Parkvall S., Sachs J. LTE release 12 and beyond // IEEE Commun. Mag.,

2013. Vol. 51. No. 7. P. 154–160. doi: 10.1109/MCOM.2013.6553692.

2. Горбунова А. В., Зарядов И. С., Матюшенко С. И., Самуйлов К. Е., Шоргин С. Я. Аппроксимация времени отклика системы облачных вычислений // Информатика и её применения, 2015. Т. 9. Вып. 3. С. 32–38.
3. Вихрова О. Г., Самуйлов К. Е., Сопин Э. С., Шоргин С. Я. К анализу показателей качества обслуживания в современных беспроводных сетях // Информатика и её применения, 2015. Т. 9. Вып. 4. С. 48–55.
4. Гайдамака Ю. В., Андреев С. Д., Сопин Э. С., Самуйлов К. Е., Шоргин С. Я. Анализ характеристик интерференции в модели взаимодействия устройств с учетом среды распространения сигнала // Информатика и её применения, 2016. Т. 10. Вып. 4. С. 2–10.
5. Кучерявый А. Е., Маколкина М. А., Киричек Р. В. Тактильный Интернет. Сети связи со сверхмалыми задержками // Электросвязь, 2016. № 1. С. 44–46.
6. Kellokoski J., Koskinen J., Nyrhinen R., Hämmäläinen T. Efficient handovers for machine-to-machine communications between IEEE 802.11 and 3GPP evolved packed core networks // IEEE Conference (International) on Green Computing and Communications Proceedings. — Besançon, 2012. P. 722–725.
7. Ahmed L., Boulahia L. M., Gaiti D. Enabling vertical handover decisions in heterogeneous wireless networks: A state-of-the-art and a classification // IEEE Commun. Surv. Tut., 2014. Vol. 16. No. 2. P. 776–781.
8. Bukhari J., Akkari N. QoS based approach for LTE-WiFi handover // 7th Conference (International) on Computer Science & Information Technology Proceedings. — Elsevier, 2016. P. 1–6.
9. Gondim P. R. L., Trineto J. B. M. DSMIP and PMIP for mobility management of heterogeneous access networks: Evaluation of authentication delay // IEEE Globecom Workshops Proceedings. — Anaheim, 2012. P. 308–313.
10. Do-Hyung K., Won-Tae K., Hwan-Gu L., Sun-Ja K., Cheol-Hoon L. A performance evaluation of vertical handover architecture with low latency handover // Conference

- (International) on Convergence and Hybrid Information Technology Proceedings. — Dusan, 2008. P. 66–69.
11. Tsagkaropoulos M., Politis I., Tselios C., Dagiuklas T., Kotsopoulos S. Service continuity over intertechnology RATs // 16th IEEE Workshop (International) on Computer Aided Modeling and Design of Communication Links and Networks Proceedings. — Kyoto, 2011. P. 117–121.
  12. Márquez-Barja J., Calafate C. T., Cano J.-C., Manzoni P. An overview of vertical handover techniques: Algorithms, protocols and tools // Comput. Commun., 2011. Vol. 34. P. 985–997.
  13. Гребешков А. Ю. Оценка целесообразности обработки заявки для предоставления услуги в реконфигурируемых сетях следующего поколения // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт, 2014. № 8. С. 24–27.
  14. Grebeshkov A., Zaripova E., Roslyakov A., Samouylov K. Modelling of vertical handover from untrusted WLAN network to LTE // 31st European Conference on Modelling and Simulation Proceedings, 2017. P. 694–700.
  15. Lampropoulos G., Passas N., Mekaros L., Kaloxylas A. Handover management architectures in integrated WLAN // IEEE Commun. Surv. Tut., 2005. Vol. 7. No. 4. P. 30–44.
  16. 3GPP TS 23.402 Technical specification 3GPP; TS Group Services and System Aspects; Architecture enhancements for non-3GPP accesses. Release 14, 2016. <https://portal.3gpp.org/desktopmodules/Specifications/SpecificationDetails.aspx?specificationId=850>.
  17. 3GPP TS 33.402 Technical specification 3GPP; TS Group Services and System Aspects; 3GPP System Architecture Evolution (SAE); Security aspects of non-3GPP accesses. Release 14, 2016. <https://portal.3gpp.org/desktopmodules/Specifications/SpecificationDetails.aspx?specificationId=2297>.
  18. Gaidamaka Yu., Zaripova E. Session setup delay estimation methods for IMS-based IPTV services // Internet of things, smart spaces, and next generation networks and systems / Eds. S. Balandin, S. Andreev, Y. Koucheryavy. — Lecture notes in computer science ser. — Springer, 2014. Vol. 8638. P. 408–418.
  19. Nikaein N., Krco S. Latency for real-time machine-to-machine communication in LTE-based system architecture // 17th European Wireless Conference on Sustainable Wireless Technologies Proceedings. — Vienna, Austria: IEEE, 2011. P. 1–6.
  20. Cardona N., Monserrat J. F., Cabrejas J. Enabling technologies for 3GPP LTE-advanced networks // LTE-advanced and next generation wireless networks / Eds. G. de la Roche, A. A. Glazunov, B. Allen. — Chichester, U.K.: John Wiley and Sons, 2013. P. 3–34.
  21. Prados-Garzon J., Ramos-Munoz J. J., Ameigeiras P., Andres-Maldonado P., Lopez-Soler J. M. Latency evaluation of a virtualized MME // Wireless Days Proceedings. — Toulouse, France: IEEE, 2016. P. 1–3.
  22. Granlund D., Holmlund P., Åhlund C. Opportunistic mobility support for resource constrained sensor devices in smart cities // Sensors, 2015. Vol. 15. No. 3. P. 5112–5135.

Поступила в редакцию 31.05.17

---

---

## ANALYSIS OF VERTICAL HANDOVER TIME IN HETEROGENEOUS WIRELESS NETWORKS

A. Yu. Grebeshkov<sup>1</sup>, Yu. V. Gaidamaka<sup>2,3</sup>, O. G. Vikhrova<sup>2</sup>, and E. R. Zaripova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23 Tolstoy Str., Samara 443010, Russian Federation

<sup>2</sup>Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation

<sup>3</sup>Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** In a heterogeneous wireless network, connectivity is simultaneously available using different radio networks with overlapping coverage areas. A mobile user equipment with a multiple mode card that can work under various frequency bands and modulation schemes can switch from one technology to another in order to maintain communication. This procedure known as a vertical handover (VHO) provides the benefit of utilizing the higher bandwidth and lower cost of wide local area networks as well as better mobility support and larger coverage of cellular networks. The authors investigate details of the VHO procedure from WLAN (Wireless Local Area Network) to the 3GPP Long Term Evolution (LTE). The VHO procedure includes 40 signaling messages, which are responsible for authorization and resource allocation in the target LTE network. The authors analyze the VHO sojourn time and its 95 percent quantile using a multiphase queuing system with background traffic.

**Keywords:** heterogeneous wireless network; cellular network; LTE; mobility; session setup procedure; connection reliability; connection availability; performance measure

**DOI:** 10.14357/19922264170409

## Acknowledgments

The publication was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project No. 2.882.2017/4.6).

## References

- Astely, D., E. Dahlman, G. Fodor, S. Parkvall, and J. Sachs. 2013. LTE release 12 and beyond. *IEEE Commun. Mag.* 51(7):154–160. doi: 10.1109/MCOM.2013.6553692.
- Gorbunova, A. V., I. S. Zaryadov, S. I. Matyushenko, K. E. Samouylov, and S. Ya. Shorgin. 2015. Approksimatsiya vremeni otklika sistemy oblachnykh vychisleniy [The approximation of response time of a cloud computing system]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(3):32–38.
- Vikhrova, O. G., K. E. Samouylov, E. S. Sopin, and S. Ya. Shorgin. 2015. K analizu pokazateley kachestva obsluzhivaniya v sovremennykh besprovodnykh setyakh [On performance analysis of modern wireless networks]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 9(4):48–55.
- Gaidamaka, Yu. V., S. D. Andreev, E. S. Sopin, K. E. Samouylov, and S. Ya. Shorgin. 2016. Analiz kharakteristik interferentsii v modeli vzaimodeystviya ustroystv s uchetom sredy rasprostraneniya signala [Interference analysis of the device-to-device communications model with regard to a signal propagation environment]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 10(4):2–10.
- Koucheryaviy, A. E., M. A. Makolkina, and R. V. Kirichek. 2016. Taktil'nyy Internet. Seti svyazi so sverkhmalymi zaderzhkami [Tactile Internet. Ultra-low latency networks]. *Elekrosvyaz' [Telecomm. Radio Eng.]* 1:44–46.
- Kellokoski, J., J. Koskinen, R. Nyrhinen, and T. Hämäläinen. 2012. Efficient handovers for machine-to-machine communications between IEEE 802.11 and 3GPP evolved packed core networks. *IEEE Conference (International) on Green Computing and Communications Proceedings.* Besançon. 722–725.
- Ahmed, L., L. M. Boulahia, and D. Gaiti. 2014. Enabling vertical handover decisions in heterogeneous wireless networks: A state-of-the-art and a classification. *IEEE Commun. Surv. Tut.* 16(2):776–781.
- Bukhari, J., and N. Akkari. 2016. QoS based approach for LTE-WiFi handover. *7th Conference (International) on Computer Science and Information Technology Proceedings.* Elsevier. 1–6.
- Gondim, P. R. L., and J. B. M. Trineto. 2012. DSMIP and PMIP for mobility management of heterogeneous access networks: Evaluation of authentication delay. *IEEE Globecom Workshops Proceedings.* Anaheim. 308–313.
- Do-Hyung, K., K. Won-Tae, L. Hwan-Gu, K. Sun-Ja, and L. A. Cheol-Hoon. 2008. Performance evaluation of vertical handover architecture with low latency handover. *Conference (International) on Convergence and Hybrid Information Technology Proceedings.* Dusan. 66–69.
- Tsagaropoulos, M., I. Politis, C. Tselios, T. Dagiuklas, and S. Kotsopoulos. 2011. Service continuity over intertechnology RATs. *16th IEEE Workshop (International) on Computer Aided Modeling and Design of Communication Links and Networks Proceedings.* Kyoto. 117–121.
- Márquez-Barja, J., C. T. Calafate, J.-C. Cano, and P. Manzoni. 2011. An overview of vertical handover techniques: Algorithms, protocols and tools. *Comput. Commun.* 34:985–997.
- Grebeskov, A. Yu. 2014. Otsenka tselesoobraznosti obrabotki zayavki dlya predostavleniya uslugi v rekonfiguriruemyykh setyakh sleduyushchego pokoleniya [Estimation of processing feasibility for service provision application in reconfigurable Next Generation Networks]. *T-Comm: Telekommunikatsii i transport [T-Comm: Telecommunications and Transport]* 8:24–27.
- Grebeskov, A., E. Zaripova, A. Roslyakov, and K. Samouylov. Modelling of vertical handover from untrusted WLAN network to LTE. *31st European Conference on Modelling and Simulation Proceedings.* 694–700.
- Lampropoulos, G., N. Passas, L. Mekaros, and A. Kaloyilos. 2005. Handover management architectures in integrated WLAN. *IEEE Commun. Surv. Tut.* 7(4):30–44.
- 3GPP TS 23.402. 2016. Technical specification 3rd Generation Partnership Project; Technical Specification Group Services and System Aspects; Architecture enhancements for non-3GPP accesses. Release 14. Available at: <https://portal.3gpp.org/desktopmodules/Specifications/SpecificationDetails.aspx?specificationId=850> (accessed May 20, 2017).
- 3GPP TS 33.402. 2016. Technical specification 3rd Generation Partnership Project; Technical Specification Group Services and System Aspects; 3GPP System Architecture Evolution (SAE); Security aspects of non-3GPP accesses. Release 14. Available at: <https://portal.3gpp.org/desktopmodules/Specifications/SpecificationDetails.aspx?specificationId=2297> (accessed May 20, 2017).
- Gaidamaka, Yu., and E. Zaripova 2014. Session setup delay estimation methods for IMS-based IPTV services. Eds. S. Balandin, S. Andreev, and Y. Koucheryavy. Lecture notes in computer science ser. 8638:408–418.
- Nikaein, N., and S. Krco. 2011. Latency for real-time machine-to-machine communication in LTE-based system architecture. *17th European Wireless Conference on Sustainable Wireless Technologies Proceedings.* Vienna, Austria: IEEE. 1–6.
- Cardona, N., J. F. Monserrat, and J. Cabrejas. 2013. Enabling technologies for 3GPP LTE-advanced networks. *LTE-Advanced and next generation wireless networks.* Eds. G. de la Roche, A. A. Glazunov, and B. Allen. Chichester, U.K.: John Wiley and Sons. 3–34.

21. Prados-Garzon, J., J. J. Ramos-Munoz, P. Ameigeiras, P. Andres-Maldonado, and J. M. Lopez-Soler. 2016. Latency evaluation of a virtualized MME. *Wireless Days Proceedings*. Toulouse, France: IEEE. 1–3.
22. Granlund, D., P. Holmlund, and C. Åhlund. 2015. Opportunistic mobility support for resource constrained sensor devices in smart cities. *Sensors* 15(3):5112–5135.

Received May 31, 2017

## Contributors

**Grebeshkov Alexander Yu.** (b. 1967) — Candidate of Science (PhD) in technology, senior scientist, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23 Tolstoy Str., Samara 443010, Russian Federation, grebeshkov-ay@psuti.ru

**Gaidamaka Yuliya V.** (b. 1971) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; gaydamaka\_yuv@rudn.university

**Vikhrova Olga G.** (b. 1990) — PhD student, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; vikhrova\_og@rudn.university

**Zaripova Elvira R.** (p. 1979) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; zaripova\_er@rudn.university



# АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕССА ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ ПОДВИЖНЫМ ПОЛЬЗОВАТЕЛЯМ В СОТЕ СЕТИ LTE\*

В. А. Наумов<sup>1</sup>, Е. В. Мокров<sup>2</sup>, К. Е. Самуйлов<sup>3</sup>

**Аннотация:** Целью исследования является анализ среднего времени передачи данных в сети мультимедийного вещания с учетом перемещения пользователей в пределах соты сети LTE (long-term evolution), разбитой на несколько зон с различным уровнем качества обслуживания. Проводится анализ данной характеристики в зависимости от объема передаваемых данных и от числа пользователей в соте. Рассмотрены три различные модели движения пользователей в пределах соты. Для вычисления среднего времени передачи данных используется аппарат марковских процессов.

**Ключевые слова:** мультимедийное вещание; гетерогенная беспроводная сеть; показатели качества обслуживания; управляющий марковский процесс; модели движения; среднее время передачи; двойственный процесс; сеть массового обслуживания

**DOI:** 10.14357/19922264170410

## 1 Введение

В данной работе рассматривается модель качества передачи данных подвижным пользователям в сети мобильной связи. Основное внимание при этом уделяется динамике движения пользователей внутри соты мобильной связи. Сота разделена на несколько зон, отличающихся качеством обслуживания (channel quality indicator, CQI), между которыми перемещаются пользователи, при этом рассмотрены три различные модели движения пользователей между областями CQI. Получено среднее время передачи данных пользователям соты в зависимости от объема передаваемых данных и от числа пользователей в пределах соты.

Данная задача решена с помощью жидкостного процесса накопления, случайного процесса, различные варианты которого широко используются для моделирования производственных процессов и процессов передачи информации [1]. Однако большинство имеющихся результатов относятся к случаю, когда управляющий скоростью накопления процесс является марковским. В данном же случае, как будет показано далее, процесс, при наличии в системе более одного пользователя, таковым не является. Случай системы с одним пользователем изучен довольно хорошо [2, 3], но даже этот простой случай описывается довольно сложным процессом. Однако в данной ситуации представляет интерес случай с несколькими пользова-

телями, когда система описывается несколькими процессами рождения и гибели.

## 2 Описание модели

Рассмотрим отдельную соту мобильной связи, разбитую на  $M$  областей CQI с различным уровнем качества обслуживания, по которой перемещаются  $N$  пользователей, причем в момент времени  $t$  в  $m$ -м CQI находится  $\mathcal{J}_m(t)$  абонентов. Пользователи независимо перемещаются по соте согласно одной и той же модели движения, не покидая пределов соты. В соте ведется передача данных некоторого объема по мультимедийному всем абонентам, находящимся в соте. Примером такой передачи может служить обновление программного обеспечения. Объем данных, переданный в системе за время  $t$ , описывается формулой:

$$F(t) = \int_0^t C(u) du.$$

где  $C(u)$  — скорость передачи в момент  $t$ .

В  $m$ -м CQI максимальная возможная скорость приема данных пользователем ограничена значением  $r_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ , причем чем дальше находится CQI от центра соты, тем меньше максимальная возможная скорость приема данных для находящихся в нем пользователей. В связи с тем что передача происходит по технологии мультимедийного, ско-

\* Публикация подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект 2.882.2017/4.6).

<sup>1</sup> Исследовательский институт инноваций, г. Хельсинки, Финляндия, valeriy.naumov@pfu.fi

<sup>2</sup> Российский университет дружбы народов, mokrov\_ev@rudn.university

<sup>3</sup> Российский университет дружбы народов; Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, samuylov\_ke@rudn.university

рость передачи  $C(t) = \min_m \{r_m : \mathcal{J}_m(t) > 0\}$  является кусочно-постоянной и в каждый момент времени определяется как минимальная из максимальных возможных скоростей приема пользователями данных.

Так как процесс  $C(t)$  при наличии в системе  $N > 1$  пользователей не является марковским, в качестве управляющего процесса вместо  $C(t)$  будем использовать марковский процесс  $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_M(t))$ , зная состояние которого, можно определить состояние процесса  $C(t)$ . Компоненты  $X_m(t)$  этого процесса указывают на число абонентов в каждом CQI в момент времени  $t$ . Такой управляющий процесс  $\mathbf{X}(t)$  имеет пространство состояний

$$\mathcal{X} = \left\{ (n_1, \dots, n_M) \mid n_i = 0, \dots, N, i = 1, \dots, M, \sum_{i=1}^M n_i = N \right\},$$

при этом число состояний процесса равно  $|\mathcal{X}| = C_{M+N-1}^N$ .

Процесс  $\mathbf{X}(t)$  можно рассматривать как процесс, описывающий некоторую замкнутую сеть массового обслуживания с  $N$  заявками и  $M$  узлами неограниченной емкости. В этой сети длительности обслуживания заявок в узле  $i$  имеют экспоненциальное распределение с параметром  $\tau_i^{-1}$ , а матрица вероятностей переходов заявок по узлам имеет следующий вид:

$$P_{ij} = \begin{cases} \alpha_i, & j = i + 1; \\ \beta_i, & j = i - 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отсюда можно получить вид матрицы интенсивностей переходов процесса  $\mathbf{X}(t)$ , которая в случае системы с  $N$  пользователями имеет вид:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{cases} \frac{i_m \alpha_m}{\tau_m}, & j = i + e_m; \\ \frac{i_m \beta_m}{\tau_m}, & j = i - e_m; \\ -\sum_{m=1}^M \frac{i_m}{\tau_m}, & j = i; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \\ m = 1, \dots, M, i, j \in \mathcal{X}. \end{cases}$$

Процесс  $(\mathbf{X}(t), F(t))$  является марковским процессом и обладает следующим свойством:

$$P \{ \mathbf{X}(t+h) = \mathbf{j}, F(t+h) < y \mid \mathbf{X}(h) = \mathbf{i}, F(h) = x \} = P \{ \mathbf{X}(t) = \mathbf{j}, F(t) < y \mid \mathbf{X}(0) = \mathbf{i}, F(0) = x \}.$$

Это означает, что  $(\mathbf{X}(t), F(t))$  является процессом, однородным по второй компоненте, а  $F(t)$  — процессом с независимыми приращениями, заданным на цепи Маркова  $\mathbf{X}(t)$  [4, 5].

Обозначим через  $T(\mathbf{x})$  момент первого достижения процессом  $F(t)$  уровня  $\mathbf{x}$ ,  $T(\mathbf{x}) = \inf \{t \mid F(t) \geq \mathbf{x}\}$ ,  $\mathbf{Y}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(T(\mathbf{x}))$ , и заметим, что неравенство  $F(t) \leq \mathbf{x}$  равносильно неравенству  $T(\mathbf{x}) \geq t$ . Таким образом, процесс  $(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), T(\mathbf{x}))$ , так же как и  $(\mathbf{X}(t), F(t))$ , является процессом с независимыми приращениями, заданным на цепи Маркова [4, 5]. Далее будем называть процесс  $(\mathbf{Y}(\mathbf{x}), T(\mathbf{x}))$  двойственным процессу  $(X(t), F(t))$  [6].

Обозначим через  $\mathbf{B}$  матрицу интенсивностей переходов процесса  $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$ . Если  $\mathbf{Y}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}$  в некотором интервале  $a \leq x \leq b$ , то  $\mathbf{X}(t) = \mathbf{n}$  и процесс  $F(t)$  возрастает со скоростью  $r(\mathbf{n})$  в интервале времени  $T(a) \leq t \leq T(b)$ . Следовательно,  $T(b) = T(a) + (b - a)/r(\mathbf{n})$  и, значит,  $T(x)$  возрастает на интервале  $a \leq x \leq b$  со скоростью  $1/r(\mathbf{n})$ . Поэтому среднее время пребывания процесса  $\mathbf{X}(t)$  в состоянии  $\mathbf{n}$  в  $r(\mathbf{n})$  раз меньше среднего времени пребывания процесса  $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$  в этом состоянии. Соответственно, интенсивность выхода  $a_{\mathbf{n}} = -a_{\mathbf{n}\mathbf{n}}$  процесса  $\mathbf{X}(t)$  из состояния  $\mathbf{n}$  связана с интенсивностью выхода  $b_{\mathbf{n}} = -b_{\mathbf{n}\mathbf{n}}$  процесса  $\mathbf{Y}(x)$  из состояния  $\mathbf{n}$  равенством  $a_{\mathbf{n}} = b_{\mathbf{n}} r_{\mathbf{n}}$ . При этом процессы  $\mathbf{X}(t)$  и  $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$  имеют одинаковые вероятности переходов  $a_{ij}/a_i = b_{ij}/b_i$  в момент выхода из состояния  $\mathbf{i}$ . Таким образом, матрицы интенсивностей переходов этих процессов связаны простым равенством  $\mathbf{B} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}$ , а матрица переходных вероятностей процесса  $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$  дается формулой  $\mathbf{Q}(x) = e^{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}x}$ .

Матрица преобразований Лапласа условных функций распределения времени передачи данных  $\Phi(x, s) = (\phi_{ij}(x, s))$ ,

$$\phi_{ij} = M (I(\mathbf{Y}(x) = \mathbf{j}) \exp(sT(x)) \mid \mathbf{Y}(0) = \mathbf{i}, T(0) = 0), \mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathcal{J},$$

может быть записана как

$$\Phi(x, s) = e^{(\mathbf{B} - s\mathbf{R})t}.$$

Для матриц условных центральных моментов  $W^{(k)}(t)$  времени  $T(x)$  передачи информации объема  $x$

$$w_{\mathbf{i}\mathbf{j}}^{(k)}(x) = M (I(\mathbf{Y}(x) = \mathbf{j}) T^k(x) \mid \mathbf{X}(0) = \mathbf{i}, T(0) = 0),$$

согласно [6], справедлива следующая рекуррентная формула:

$$\mathbf{W}^0(x) = \mathbf{Q}(x);$$

$$\mathbf{W}^{(k)}(x) = k \int_0^x \mathbf{W}^{(k-1)}(s) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}(x-s) ds, \quad k > 0.$$

Используя операцию свертки «\*», матрицу  $\mathbf{W}^{(k)}(t)$  можно в замкнутом виде записать как

$$\mathbf{W}^{(k)}(t) = k! (\mathbf{P}(t) \mathbf{R}^{-1}) * (\mathbf{P}(t) \mathbf{R}^{-1}) * \dots * (\mathbf{P}(t) \mathbf{R}^{-1}) * \mathbf{P}(t),$$

где матрица  $(\mathbf{P}(t) \mathbf{R}^{-1})$  встречается  $k$  раз.

Так как процессы  $\mathbf{X}(t)$  и  $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$  имеют одно и то же начальное распределение  $\mathbf{p}$ , формула для нахождения  $k$ -го центрального момента  $w^{(k)}(x)$  момента  $T(x)$  достижения уровня  $x$  имеет следующий вид:

$$w^{(k)}(x) = k! \mathbf{p} (\mathbf{Q}(x) \mathbf{R}^{-1})^{*k} \mathbf{1},$$

где  $\mathbf{1}$  есть вектор из единиц.

Таким образом, алгоритм нахождения среднего времени передачи данных размером  $x$  можно записать в следующем виде.

**Шаг 1.** Задать начальные данные:

- число уровней качества обслуживания (CQI)  $M$ ;
- число пользователей в соте  $N$ ;
- вероятности переходов каждого пользователя между CQI  $\alpha_i, \beta_i, i = 1, \dots, M$ ;
- среднее время нахождения пользователя в каждом CQI  $\tau_i, i = 1, \dots, M$ ;
- скорость передачи данных в каждом CQI  $r_i, i = 1, \dots, M$ .

Получить матрицу интенсивностей переходов пользователя между CQI.

**Шаг 2.** Найти вектор стационарных вероятностей  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_M)$  из уравнения

$$\begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{p} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{p} \mathbf{1} = 1. \end{cases}$$

**Шаг 3.** Найти матрицу интенсивностей переходов двойственного процесса  $\mathbf{B} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}$ , где  $\mathbf{R} = \text{diag}(r_i), i = 1, \dots, M$ .

**Шаг 4.** Найти матрицу вероятностей переходов двойственного процесса  $\mathbf{Q}(x) = e^{\mathbf{B}x}$ .

**Шаг 5.** Найти математическое ожидание времени передачи данных  $w(x) = \mathbf{p} (\mathbf{Q}(x) \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{1}$ .

### 3 Численный анализ

В данном разделе рассмотрен численный пример расчета среднего времени передачи данных в системе в зависимости от их объема и от числа пользователей в системе для трех моделей движения: случайного блуждания, движения Леви и броуновского движения. Модель случайных блужданий дает грубую оценку процесса движения. Модель броуновского движения наиболее подходит для описания случайного хаотического перемещения пользователей в пределах соты. Движение Леви является обобщением модели броуновского движения, дающим более реалистичные результаты.

В табл. 1 представлены средние времена пребывания пользователей в каждом CQI и вероятности переходов в соседние CQI для различных моделей движения, полученные посредством имитационного моделирования движения пользователей в соте. В численном примере рассматривается случай  $M = 4$ , наиболее близких к краю соты CQI. Такое упрощение вызвано экспоненциальным ростом числа состояний введенного процесса и, как следствие, размерности матрицы вероятностей переходов в зависимости от числа пользователей и от числа CQI, поскольку для полного хранения только одной такой матрицы при рассмотрении всех 15 CQI для тех же данных требуется порядка 200 ТБ памяти. Выбор наиболее далеких от центра соты CQI позволяет получить оценку худшего случая времени передачи.

Для четырех дальних CQI при скоростях, взятых из табл. 2, можно получить графики среднего времени передачи данных для различных полос и значениях размера загрузочного блока, равном 5 МБ. Таким образом, соответствующие скорости расчи-

**Таблица 1** Значения переходных вероятностей для процесса  $\mathbf{X}(t)$  для различных моделей движения пользователей

$i$	$\beta$	$\alpha$	$\tau$
Движение Леви			
1	0	1	16,709408
2	0,5044487	0,4955512	2,0139282
3	0,4931353	0,5068646	1,9840439
4	1	0	1,6421568
Случайные блуждания			
1	0	1	19,576702
2	0,5216453	0,4783546	2,4197101
3	0,5090238	0,4909761	2,2763908
4	1	0	2,375875
Броуновское движение			
1	0	1	16,555193
2	0,5048854	0,4951146	2,0691345
3	0,5069506	0,4930493	2,0785105
4	1	0	2,0804090

**Таблица 2** Скорости передачи данных при различных уровнях качества

CQI	$c_i$ , бит/с/Гц
1	0,1523
2	0,2344
3	0,377
4	0,6016

тываются как  $r_i = c_i b$ , где  $c_i$  — это скорость из табл. 2, а  $b$  соответствует рассматриваемой ширине полосы. Значения скоростей, приходящихся на 1 Гц, взяты из [7].

Рисунок 1 показывает среднее время передачи данных в системе при наличии в ней  $N = 20$  пользователей в зависимости от объема передаваемых данных для различной ширины полосы. Можно видеть, что при заданном числе пользователей в сети среднее время передачи данных линейно зависит от объема передаваемых данных. Другими словами, среднее время передачи данных при неизменном числе пользователей в сети не зависит от их модели движения. Это также подтверждается тем, что результаты для всех трех моделей движения для заданных значений полностью совпали.

На рис. 2 представлены результаты для передачи данных фиксированного объема  $x = 25$  МБ по полосе 15 МГц в зависимости от числа пользователей в системе. Можно видеть, что при увеличении числа пользователей в системе время передачи стремится к константе. Время передачи данных для рассмотренного примера не превосходит 3 с. Также можно сделать вывод о наличии максимального необходимого для рассмотрения числа пользователей, перемещающихся в пределах соты  $N_0$ , при превышении которого достаточно рассматривать систему

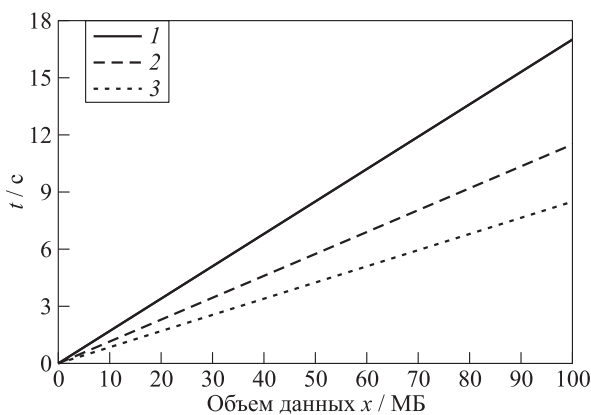
с числом пользователей, равным  $N_0$ , так как дальнейшее увеличение не внесет существенных изменений.

Также можно видеть, что, как говорилось ранее, модель случайных блужданий, являясь наиболее грубым приближением процесса для трех рассмотренных моделей движения, дает оценку среднего времени передачи сверху, в то время как броуновское движение и движение Леви практически совпадают.

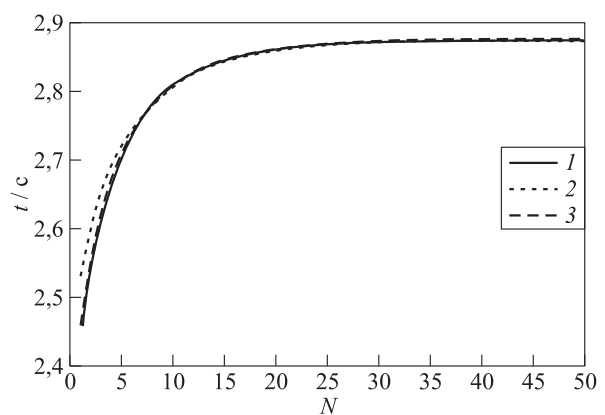
## 4 Заключение

В представленной статье с помощью аппарата управляющих марковских процессов построена модель для анализа характеристики среднего времени передачи данных в сети гетерогенной беспроводной сети LTE по технологии мультимедиа с учетом перемещения абонентов между областями с различным качеством обслуживания внутри соты. Проведен анализ полученной характеристики в зависимости от объема передаваемых данных и от числа пользователей в системе.

Результаты численного анализа, представленные в работе, показывают, что при постоянном числе пользователей в системе время передачи данных не зависит от выбранной модели движения, а зависит только от объема передаваемых данных. Также было показано, что при увеличении числа пользователей в сети для заданного количества CQI существует максимальное достаточное для рассмотрения число пользователей, при превышении которого рассматриваемая характеристика претерпевает минимальные изменения. В дальнейшем планируются исследования, позволяющие получить рассматри-



**Рис. 1** Зависимость времени передачи от объема передаваемых данных: 1 — 10 МГц; 2 — 15; 3 — 20 МГц



**Рис. 2** Зависимость времени передачи от числа пользователей: 1 — движение Леви; 2 — случайные блуждания; 3 — Броуновское движение

ваемую характеристику для соты, разбитой на большее число областей CQI. Отдельным направлением может также стать расширение сценария на случай перемещения абонентов за пределы соты. Кроме того, можно рассмотреть другие модели движения и другие характеристики для описанной системы.

## Литература

1. Howard R. A. Dynamic probabilistic systems. Vol. II: Semi-Markov and decision processes. — New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 1971. 564 p.
2. Blaabjerg S., Anderson H., Anderson H. Approximating the heterogeneous fluid queue with a birth-death fluid queue // IEEE T. Commun., 1995. Vol. 43. No. 5. P. 1884–1887.
3. Van Doorn E. A., Scheinhardt W. R. W. Analysis of birth-death fluid queues // Applied Mathematics Workshop Proceedings. — Taejon, Korea, 1996. Vol. 5. P. 13–29.
4. Ежов И. И., Скороход А. В. Марковские процессы, однородные по второй компоненте // Теория вероятностей и ее применения, 1969. Т. 14. Вып. 1. С. 3–14; Вып. 4. С. 679–692.
5. Cinlar E. Markov additive processes // Z. Wahrscheinlichkeit. Verw. Gebiete, 1972. Vol. 24. P. 85–93; 95–121.
6. Naumov V., Emstad P. Analysis of losses in a bufferless transmission link // Managing traffic performance in converged networks / Eds. L. Mason, T. Drwiege, J. Yan. — Lecture notes in computer science ser. — Springer, 2007. Vol. 4516. P. 913–924.
7. 3GPP TS 25.214 V8.9.0. 3rd Generation Partnership Project. Technical Specification Group Radio Access Network. Physical layer procedures (FDD). Release 8. — Valbonne, France: 3GPP, March 2010. 94 p.

Поступила в редакцию 31.05.17

## PERFORMANCE MEASURES ANALYSIS OF DATA TRANSFER PROCESS TO MOBILE USERS IN LTE CELL

V. A. Naumov<sup>1</sup>, E. V. Mokrov<sup>2</sup>, and K. E. Samouylov<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Service Innovation Research Institute (PIKE), 8A Annankatu, 5th floor, Helsinki 00120, Finland

<sup>2</sup>Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation

<sup>3</sup>Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

**Abstract:** The goal of the study is to analyze the average transmission time in multicasting heterogeneous wireless networks, considering user movements within a cell under the condition that the cell can be divided into several areas with different channel quality. This performance measure is analyzed against the volume of transmitted data and number of users in a cell. Three different motion models describing user movements within a cell are studied. In order to find out the average transmission time, an approach based on Markov control processes was implemented.

**Keywords:** multicasting; heterogeneous wireless network; quality of service; Markov control process; motion model; average transmission time; dual process; queuing network

**DOI:** 10.14357/19922264170410

## Acknowledgments

The publication was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project No. 2.882.2017/4.6).

## References

1. Howard, R. A. 1971. *Dynamic probabilistic systems. Vol. II: Semi-Markov and decision processes*. New York, NY: John Wiley & Sons. 564 p.
2. Blaabjerg, S., H. Anderson, and H. Anderson. 1995. Approximating the heterogeneous fluid queue with a birth-death fluid queue. *IEEE T. Commun.* 43(5):1884–1887. doi: 10.1109/26.387416.
3. Van Doorn, E. A., and W. R. W. Scheinhardt. 1996. Analysis of birth-death fluid queues, *Applied Mathematics Workshop Proceedings*. Taejon, Korea. 5:13–29.
4. Ezhov, I. I., and A. V. Skorokhod. 1969. Markov processes with homogeneous second component. *Theor. Probab.*



- Appl.* 14(1):1–13 (doi: 10.1137/1114001); 14(4):652–667 (doi: 10.1137/1114081).
5. Cinlar, E. 1972. Markov additive processes. *Z. Wahrscheinlichkeit.* 24:85–93; 95–121.
  6. Naumov, V., and P. Emstad. 2007. Analysis of losses in a bufferless transmission link. *Managing traffic performance in converged networks.* Eds. L. Mason, T. Drwiege, and J. Yan. Lecture notes in computer science ser. Springer. 4516:913–924.
  7. 3GPP TS 25.214 V8.9.0. March 2010. 3rd Generation Partnership Project. Technical Specification Group Radio Access Network. Physical layer procedures (FDD). Release 8. Valbonne, France: 3GPP. 94 p.

Received May 31, 2017

## Contributors

**Naumov Valeriy A.** (b. 1950) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, scientific director, Service Innovation Research Institute (PIKE), 8A Annankatu, 5th floor, Helsinki 00120, Finland; valeriy.naumov@pfu.fi

**Mokrov Evgeniy V.** (b. 1988) — PhD student, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; mokrov.ev@rudn.university

**Samouylov Konstantin E.** (b. 1955) — Doctor of Science in technology, professor, Head of Department, Director of Institute of Applied Mathematics and Telecommunications, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya Str., Moscow 117198, Russian Federation; senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; samuylov\_ke@rudn.university

# РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ГРУЗОПЕРЕВОЗКАМИ НА УЧАСТКЕ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ СЕТИ С УЧЕТОМ СЛУЧАЙНЫХ ФАКТОРОВ\*

М. В. Буянов<sup>1</sup>, С. В. Иванов<sup>2</sup>, А. И. Кибзун<sup>3</sup>, А. В. Наумов<sup>4</sup>

**Аннотация:** Предлагается математическая модель назначения локомотивов для перевозки грузовых составов. Целью оптимизации в модели является минимизация числа задействованных для перевозки составов локомотивов за счет выбора маршрутов составов и локомотивов. Приводится детерминированный алгоритм получения субоптимального решения, а также алгоритм, реализующий схему оперативного планирования. Предлагается использование случайного параметра, моделирующего задержку готовности состава к отправлению. Проводится численный эксперимент в условиях неполной информированности. Численный эксперимент проведен на примере данных Московской железной дороги (МЖД). Сравниваются результаты, полученные в детерминированной и стохастической постановках.

**Ключевые слова:** математическое моделирование; оптимизация; планирование перевозок; оперативное планирование

DOI: 10.14357/19922264170411

## 1 Введение

Проблема организации перевозок на железнодорожном транспорте затрагивалась во многих работах, среди которых можно выделить [1–8]. В этих работах описана структура грузовых перевозок на железнодорожном транспорте и предложены различные математические модели организации грузовых перевозок. В работе развивается предложенная ранее в [7] детерминированная модель оптимизации назначения локомотивов на сформированные составы. При этом учитывается влияние на модель случайных факторов, приводящих к задержке готовности состава к отправлению.

Необходимо отметить, что в процессе осуществления грузовых перевозок возникает множество случайных факторов, влияющих на работу локомотивов, таких как задержки формирования составов, задержки в движении поездов, аварии, неопределенное поведение диспетчеров, ошибки машинистов и т. д. Таким образом, детерминированное решение, полученное в [7], не может быть реализовано на практике и требуется более реалистичный стохастический подход. Однако учет всех существующих случайных факторов является очень трудоемкой задачей и приведет к большим трудностям при получении решения, в связи с чем предлагается рассмотреть факторы, влияющие на время готовности состава к отправлению.

В работе описываются основные случайные факторы, приводящие к задержкам по времени, влияющим на время формирования составов. Предлагается эвристический алгоритм поиска субоптимального решения задачи. Проводится численный эксперимент с учетом случайных факторов на примере данных МЖД. Приведенные в статье результаты сравниваются с решением, полученным ранее авторами [7] в детерминированной постановке.

## 2 Основные определения и постановка задачи

В основе модели, предложенной в [7], лежит взвешенный ориентированный граф  $G = (V, A)$ , где  $V$  — множество вершин;  $A$  — множество дуг. Вершинами графа  $G$  являются значимые станции. Значимыми называются станции, на которых формируются грузовые составы (сортировочные станции), и станции смены локомотивной тяги. Некоторые значимые станции являются станциями-депо, соответствующее подмножество вершин  $V$  обозначим через  $D$ . Множеству дуг соответствуют перегоны, соединяющие значимые станции.

Локомотивы могут передвигаться только по определенным маршрутам (так называемым плечам), в связи с чем в [7] вводятся следующие определения.

\*Результаты работы получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки № 2.2461.2017/ПЧ. Результаты работы получены при поддержке РФФИ и ОАО «РЖД» в рамках научного проекта № 17-20-03050 офи\_м\_РЖД.

<sup>1</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), buyanovmikhailv@gmail.com

<sup>2</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), sergeyivanov89@mail.ru

<sup>3</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), kibzun@mail.ru

<sup>4</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), naumovav@mail.ru

**Определение 1.** Назовем плечом  $P$  последовательность дуг  $a_1, \dots, a_{I_P}$  графа  $G$ , удовлетворяющую следующим условиям:

- (1) все дуги различны:  $a_i \neq a_j, i \neq j, i, j \in \{1, I_P\}$ ;
- (2) первая вершина первой дуги в последовательности совпадает с последней вершиной последней дуги последовательности, является станцией-депо и отлична от всех промежуточных вершин последовательности:  $v_1 = v_{I_P} \in D, v_i \neq v_1$  для  $i = \overline{2, I_P - 1}$ .

Также рассматриваются подплечи и простые подплечи, определенные следующим образом.

**Определение 2.** Любую подпоследовательность соседних дуг  $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$  ( $1 \leq i < j \leq I_P$ ), образующих плечо, назовем подплечом данного плеча. Любую дугу  $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ , входящую в некоторое плечо  $P$ , назовем простым подплечом плеча  $P$ .

Пусть  $L$  — множество всех локомотивов, приписанных к рассматриваемым станциям-депо  $D$ . Для каждого локомотива  $l \in L$  задано множество допустимых плеч  $\overline{\mathcal{P}}_l$ , по которым он может передвигаться. Каждому множеству  $\overline{\mathcal{P}}_l, l \in L$ , ставится в соответствие множество  $\mathcal{P}_l$ , составленное из всех простых подплеч, входящих в плечи множества  $\overline{\mathcal{P}}_l$ . Предполагается, что для каждого локомотива  $l \in L$  задана функция весовых норм  $w_l(\cdot): \mathcal{P}_l \rightarrow \mathbb{R}$ , ставящая в соответствие простым подплечам плеча  $\overline{\mathcal{P}}_l$  максимально допустимую для перевозки массу состава.

Пусть  $S$  — множество грузовых составов. Каждый состав  $s \in S$  характеризуется массой  $w^s$ , начальной станцией  $v_o^s$ , станцией назначения  $v_f^s$ , временем формирования  $t_o^s$ , временем  $\tau_f^s$ , до которого необходимо прибыть на станцию назначения, т.е. каждому составу соответствует пятерка  $(w^s, v_o^s, t_o^s, v_f^s, \tau_f^s)$ . По сути, данные характеристики определяют план перевозок.

Движение локомотивов и составов по заданному маршруту может осуществляться только в определенные промежутки времени. Совокупность маршрута и времени будем называть ниткой. По аналогии с подплечами и простыми подплечами введем в рассмотрение поднитки и простые поднитки. Приведем определения нитки, поднитки и простой поднитки, описанные в [7]:

**Определение 3.** Ниткой  $N$  назовем упорядоченное множество четверок  $(v_1, t_1, v_2, \tau_2), (v_2, t_2, v_3, \tau_3), \dots, (v_{I_N-1}, t_{I_N-1}, v_{I_N}, \tau_{I_N})$ , удовлетворяющее условиям:

- (1)  $v_i \in V, i = \overline{1, I_N}, t_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, I_N - 1}, \tau_i \in \mathbb{R}, i = \overline{2, I_N}$ ;
- (2)  $(v_i, v_{i+1}) \in A, i = \overline{1, I_N - 1}$ ;

$$(3) t_i < \tau_{i+1}, i = \overline{1, I_N - 1};$$

$$(4) \tau_i \leq t_i, i = \overline{2, I_N}.$$

Во введенном определении величина  $t_i$  соответствует времени отправления со станции  $v_i$ , а  $\tau_{i+1}$  — времени прибытия на станцию  $v_{i+1}$ . Приведенные условия выражают естественные свойства движения поездов, заключающиеся в том, что движение может осуществляться только по перегонам (условия 1 и 2), время отправления со станции не может быть позже времени прибытия на следующую станцию (условие 3), время прибытия на станцию не может быть позже времени отправления с той же станции (условие 4).

**Определение 4.** Каждую подпоследовательность соседних четверок, образующих нитку  $N$ , назовем подниткой. Каждую четверку  $(v_i, t_i, v_{i+1}, \tau_{i+1}), i = \overline{1, I_N - 1}$ , составляющую нитку  $N$ , назовем простой подниткой.

Пусть имеется множество  $\overline{\mathcal{N}}$  ниток. Сопоставим каждому элементу  $N$  данного множества множество  $\mathcal{F}(N)$ , являющееся неупорядоченным множеством простых подниток, составляющих нитку  $N$ . Множество всех простых подниток, полученных из множества ниток  $\overline{\mathcal{N}}$ , обозначим через  $\mathcal{N}$ , т.е.

$$\mathcal{N} = \bigcup_{N \in \overline{\mathcal{N}}} \mathcal{F}(N).$$

Важно отметить, что каждая простая поднитка проходит только по одной из дуг графа.

На множестве  $2^L \times \mathcal{N}$ , являющемся декартовым произведением всех возможных сочетаний локомотивов и множества простых подниток, определим функцию  $W(\pi_n)$ , задающую максимальную массу состава, которую может перевести соответствующая комбинация локомотивов  $\pi_n \subset L$  по заданной простой поднитке  $n \in \mathcal{N}$ . Очевидно, если  $\pi_n = l \in L$ , где  $n = (v, t, v', \tau)$  и  $(v, v') \in \mathcal{P}_l$ , то  $W(\pi_n) = w_l((v, v'))$ . Комбинация локомотивов  $\pi_n$  называется составным локомотивом и используется для перевозки состава посредством их совместной работы.

Поскольку движение локомотивов осуществляется только по ниткам и по плечам, приведем определение допустимого маршрута оборота локомотива из [7]. В данном определении учтем также, что локомотив через интервалы времени  $T^{\text{ТО}}$  (48 ч) должен проходить техосмотр (ТО) продолжительностью  $t^{\text{ТО}}$  (8 ч). Будем считать, что каждый локомотив  $l \in L$  в начальный момент времени характеризуется временем  $\tau_l^{\text{ТО}}$ , прошедшим с момента последнего ТО. Если локомотив в начальный момент времени находится на ТО, то величина  $\tau_l^{\text{ТО}}$  принимает отрицательное значение, равное по модулю времени до окончания ТО.

**Определение 5.** Допустимым маршрутом оборота  $M_l$  локомотива  $l$  относительно множества плеч  $\overline{\mathcal{P}}_l$  назовем последовательность простых подниток  $(v_1, t_1, v_2, \tau_2), (v_2, t_2, v_3, \tau_3), \dots, (v_{I_l-1}, t_{I_l-1}, v_{I_l}, \tau_{I_l})$ , удовлетворяющую условиям:

- (1)  $\tau_i \leq t_i, i = \overline{2, I_l - 1}$ ;
- (2)  $(v_i, v_{i+1}) \in \mathcal{P}_l, i = \overline{1, I_l - 1}$ ;
- (3) существует возрастающая последовательность  $i_1, \dots, i_{f_l}$  чисел, выбранных из множества  $\{2, 3, \dots, I_l\}$  таким образом, что
  - (3.1)  $\tau_l^{\text{ТО}} + \tau_{i_1} \leq T^{\text{ТО}}$ ;
  - (3.2)  $t_{i_j} - \tau_{i_j} \geq t^{\text{ТО}}, j = \overline{1, f_l - 1}$ ;
  - (3.3)  $\tau_{i_j} - t_{i_{j-1}} \leq T^{\text{ТО}}, j = \overline{2, f_l}$ ;
  - (3.4)  $\tau_{I_l} - t_{i_{f_l}} \leq T^{\text{ТО}}$ , если  $f_l \neq I_l$ .

Условие 1 требует, чтобы время прибытия на станцию не было раньше времени отправления с той же станции. Условие 2 ограничивает возможные передвижения локомотива только движением по плечам. Условие 3 требует прохождения ТО через установленные промежутки времени. Последовательности моментов времени  $t_{i_1}, \dots, t_{i_{f_l}}$  соответствуют моментам начала ТО. В условии 3.1 требуется, чтобы время ухода на первое ТО не превышало  $T^{\text{ТО}}$  с момента предыдущего ТО. Согласно условию 3.2 время прохождения ТО не может быть меньше  $t_l^{\text{ТО}}$ . Из условия 3.3 следует, что время между началом движения после ТО и уходом на следующее ТО не может быть больше  $T^{\text{ТО}}$ . Согласно условию 3.4 время начала движения после последнего ТО должно быть не позже, чем за время  $T^{\text{ТО}}$  до окончания рассматриваемого периода планирования движения.

Заметим, что маршрут оборота является пространственно-временным понятием. Множество допустимых маршрутов оборота локомотива  $l$  обозначим через  $\mathcal{M}_l$ . Начальную и конечную станции маршрута оборота  $M_l$  обозначим через  $v_o(M_l)$  и  $v_f(M_l)$  соответственно, время начала первой нитки данного маршрута оборота обозначим через  $t_o(M_l)$ , время прибытия на станцию назначения — через  $\tau_f(M_l)$ .

Введем определение допустимого рейса состава, которое так же, как маршрут оборота локомотива, является пространственно-временной характеристикой и было ранее описано в [7].

**Определение 6.** Допустимым рейсом  $R_s$  состава  $s \in S$  назовем последовательность простых подниток  $(v_1, t_1, v_2, \tau_2), (v_2, t_2, v_3, \tau_3), \dots, (v_{I_s-1}, t_{I_s-1}, v_{I_s}, \tau_{I_s})$ , удовлетворяющую условиям:

- (1)  $v_1 = v_o^s$ ;
- (2)  $v_{I_s} = v_f^s$ ;
- (3)  $\tau_i \leq t_i, i = \overline{2, I_s - 1}$ ;
- (4)  $t_o^s \leq t_1$ ;
- (5)  $\tau_f^s \geq \tau_{I_s}$ .

Условия 1 и 2 определяют начальную и конечную станции рейса, условие 3 задает естественные ограничения на время отправления и прибытия, условия 4 и 5 требуют выполнения перевозок согласно плану.

Множество допустимых рейсов состава  $s$  обозначим через  $\mathcal{R}_s$ .

Так же как и для ниток, определим множество  $\mathcal{F}(M_l)$  всех простых подниток, составляющих маршрут оборота  $M_l$  локомотива  $l, l \in L$ , и множество  $\mathcal{F}(R_s), s \in S$ , всех простых подниток, составляющих рейс  $R_s$  состава  $s$ .

Для каждой простой поднитки  $n \in \mathcal{N}$  и каждого набора маршрутов оборота локомотивов  $M = \{M_l\}_{l \in L}$  определим множество  $\pi_n(M)$ , составленное из всех локомотивов, передвигающихся по простой поднитке  $n$  при наборе маршрутов оборота локомотивов  $M$ :

$$l \in \pi_n(M) \Leftrightarrow n \in \mathcal{F}(M_l).$$

Рассмотрим некоторый участок железнодорожной сети с графом  $G = (V, A)$ , определенным выше. Пусть задано множество локомотивов  $L$ , множество составов  $S$ , множество ниток  $\overline{\mathcal{N}}$  и соответствующих простых подниток  $\mathcal{N}$ , функция  $W(\cdot)$  весовых норм составных локомотивов. Для каждого локомотива  $l \in L$  определено множество плеч  $\overline{\mathcal{P}}_l$  и простых подплеч  $\mathcal{P}_l$ .

В начальный момент времени некоторые локомотивы могут находиться в движении, поэтому будем считать, что локомотив  $l \in L$  можно отправить только с некоторой фиксированной станции  $v_0^l$  после момента времени  $t_0^l$ . Пусть  $|L|$  — число локомотивов в множестве  $L$ , имеющих непустой маршрут оборота.

Пусть для каждого состава  $s \in S$  задано множество ниток  $\overline{\mathcal{N}}_s \subset \overline{\mathcal{N}}$ , по которым он может быть перевезен. Через  $\mathcal{N}_s$  обозначим множество соответствующих простых подниток. Данные ограничения связаны с тем, что некоторые нитки могут быть использованы только для перевозки составов определенного рода.

Пусть  $M = \{M_l\}_{l \in L}$  — выбираемый набор маршрутов оборота всех локомотивов;  $R = \{R_s\}_{s \in S}$  — выбираемый набор рейсов всех составов;  $\mathcal{M} = \{M_l\}_{l \in L}$  — множество допустимых маршрутов оборота всех локомотивов;  $\mathcal{R} = \{R_s\}_{s \in S}$  — множество допустимых рейсов всех составов.

Требуется найти такой набор  $M$  маршрутов оборота локомотивов и такой набор  $R$  рейсов составов, при котором общее число  $|L|$  локомотивов, используемых для перевозки составов, будет минимальным, при этом все рейсы составов будут покрыты маршрутами локомотивов.

В [7] была предложена следующая постановка задачи:

$$|L| \rightarrow \min_{M \in \mathcal{M}, R \in \mathcal{R}} \quad (1)$$

при ограничениях

$$M_l \in \mathcal{M}_l, \quad l \in L; \quad (2)$$

$$R_s \in \mathcal{R}_s, \quad s \in S; \quad (3)$$

$$\bigcup_{s \in S} \mathcal{F}(R_s) \subset \bigcup_{l \in L} \mathcal{F}(M_l); \quad (4)$$

$$\mathcal{F}(R_s) \cap \mathcal{F}(R_{s'}) = \emptyset, \quad s \neq s', \quad s, s' \in S; \quad (5)$$

$$W(\pi_n) \geq w^s, \quad n \in \mathcal{F}(R_s), \quad s \in S; \quad (6)$$

$$\mathcal{F}(M_l) \subset \mathcal{N}, \quad l \in L; \quad (7)$$

$$\mathcal{F}(R_s) \subset \mathcal{N}_s, \quad s \in S; \quad (8)$$

$$v_0(M_l) = v_0^l; \quad (9)$$

$$t_0(M_l) \geq t_0^l. \quad (10)$$

Условия (2) и (3) значат, что рассматриваются только допустимые маршруты локомотивов и рейсы составов, в частности те, для которых существуют допустимые плечи. Также заметим, что допустимость рейсов составов требует, чтобы был выполнен план перевозок в установленный срок.

Условие (7) требует, чтобы маршруты оборота локомотивов составлялись только из простых подниток, поскольку множество  $\bigcup_{l \in L} \mathcal{F}(M_l) \subset \mathcal{N}$  составлено из простых подниток, входящих в какой-либо маршрут оборота локомотива. Условие (8) задает аналогичное требование для рейсов составов, а кроме этого оно ограничивает выбор допустимых ниток для перевозки состава. Условие (4) означает, что все простые поднитки, образующие рейс некоторого состава, используются для движения некоторого локомотива, т. е. все составы перевозятся локомотивами. Также из этого условия следует, что локомотивы могут передвигаться по простым подниткам, по которым не движутся составы. Таким образом, каждой задействованной нитке соответствует либо состав с локомотивом (возможно, с несколькими локомотивами), либо локомотив, движущийся порожняком.

Условие (5) означает, что рейсы составов не могут пересекаться, т. е. одну простую поднитку нельзя использовать для передвижения двух составов. Поскольку локомотивы могут ехать в сплотке или с составом (так называемый вспомогательный пробег), то подобное условие для локомотивов отсутствует.

Условие (6) требует, чтобы были выполнены весовые нормы составных локомотивов при перевозке составов, т. е. составной локомотив  $\pi_n$ , используемый на простой поднитке  $n \in \mathcal{F}(R_s)$ , по которой перевозится состав  $s$ , должен иметь возможность перевозить состав массой  $W(\pi_n)$ , не меньшей чем масса  $w^s$  состава  $s$ .

Условия (9) и (10) задают начальное состояние локомотивов.

Заметим также, что множество составов  $S$  и множество ниток  $\bar{\mathcal{N}}$  определяются суточным планом перевозок и количеством суток, на которые осуществляется планирование.

Сформулированная задача предполагает оптимизацию как по маршрутам оборота локомотивов, так и по рейсам составов. Однако на практике нитки уже сформированы под конкретные составы, поэтому в дальнейшем будем считать, что множество допустимых рейсов  $\mathcal{R}_s$  состава  $s \in S$  состоит из одного рейса. Таким образом, задача сводится к назначению локомотивов для перевозки составов с заданными рейсами, т. е. к поиску набора маршрутов  $M$ .

Для исследования существования решения задачи необходимо определить, является ли набор ниток достаточным для осуществления плана перевозок. Решение данной задачи сравнимо с решением исходной задачи. Ниже приведен эвристический алгоритм решения задачи, который в ряде случаев позволяет находить допустимое решение задачи. Вопрос о единственности решения не является актуальным с практической точки зрения, так как достаточно найти хотя бы одно решение, обеспечивающее минимальное значение целевой функции. Вычислительная сложность данной задачи в работе не исследуется, однако можно заметить, что время перебора всех допустимых маршрутов локомотивов и рейсов составов зависит экспоненциально от объема исходных данных задачи.

### 3 Алгоритм решения детерминированной задачи

Опишем алгоритм получения субоптимального решения задачи (1). Будем считать, что рейсы всех составов определены, т. е. для каждого состава определена нитка, по которой он движется. В основе алгоритма лежит идея о максимальном использовании локомотива с минимальным временем начала движения. Решение предполагает неограниченное число локомотивов в начальный момент времени в каждом депо, однако даже такое предположение позволяет получить лучший, в сравнении с реальным движением, результат. Для простоты изло-



жения алгоритмов при их построении не учитываются ограничения на массу перевозимых составов и опускается описание алгоритма проведения ТО. При наличии ограничений на массу составов необходимо осуществлять поиск не только простых локомотивов  $l \in L$ , но и составных локомотивов, т. е. комбинаций нескольких локомотивов.

### 3.1 Алгоритм назначения

Пусть задано непустое множество составов  $S = \{s_i \mid i = \overline{1, |S|}\}$  с непустыми рейсами. Пусть  $v_f^l$  и  $\tau^l$  — конечная станция маршрута оборота  $M_l$  (либо начальная станция в случае пустого маршрута) и время прибытия на эту станцию локомотива  $l \in L$ . Для корректной работы алгоритма необходимо, чтобы элементы множества  $S$  были упорядочены по возрастанию времени отправления составов. Данный алгоритм является упрощенной версией алгоритма в [7], при этом для ряда примеров решения, получаемые с помощью данных алгоритмов, совпадают.

### 3.2 Поиск составной нитки

Для осуществления перегонки локомотива необходимо найти нитку  $N^*$ , соединяющую станцию  $v_f^l$ , на которой находится локомотив  $l$ , и станцию  $v_o(n)$ , с которой отправляется простая поднитка  $n$ . Пусть  $t(n)$  — время начала движения по простой поднитке  $n$ ,  $\tau(n)$  — время окончания простой поднитки  $n$ , а  $\tau^l$  — время остановки локомотива на станции  $v_f^l$ . Через  $\mathcal{N}_a$  обозначим множество простых подниток, соответствующих дуге  $a \in A$ .

Сопоставим каждой дуге графа  $G$  весовую характеристику, равную среднему времени движения по ней:

$$w_a = \frac{1}{|\mathcal{N}_a|} \sum_{n \in \mathcal{N}_a} (\tau(n) - t(n)). \quad (11)$$

Полагаем  $N^*$  равной нитке, проходящей по кратчайшему пути в графе  $G$ , взвешенном согласно (11), соединяющему станции  $v_f^l$  и  $v_o(n)$ , с временем начала не ранее  $\tau^l$  и временем окончания не позднее  $t(n)$ . Для поиска кратчайших путей между вершинами взвешенного ориентированного графа можно использовать, например, алгоритм Флойда–Уоршелла [9].

## 4 Статистическое моделирование

В процессе осуществления грузовых перевозок возникает множество случайных факторов, влияющих на работу локомотивов, таких как задержки формирования составов, задержки в движении поездов и другие нештатные ситуации. В связи с этим детерминированное решение, полученное в [7], не может быть реализовано на практике. Будем моделировать задержки во времени формирования состава.

Задержки во времени готовности состава к отпавлению могут возникать в результате множества причин. Такими причинами могут стать, например, ошибки при планировании работы станции, включающие в себя как работу маневровых локомотивов, так и, например, неверную очередность формирования и расформирования составов, задержки в прибытии вагонов (грузов), участвующих

### Алгоритм 1

0. Полагаем  $i := 1, j := 1, k := 1$ .
1. Зафиксируем локомотив  $l_k \in L$ , состав  $s_i \in S$  и простую поднитку из рейса состава  $n_j = (v_o(n_j), t(n_j), v_f(n_j), \tau(n_j))$ ,  $n_j \in \mathcal{F}(R_{s_i})$ , переходим к шагу 3.
2. Если  $k > |L|$ , то берем новый локомотив  $L := L \cup \{l_k\}$ ,  $i := 1, j := 1$  и повторяем шаг 2; если  $i > |S|$ , то переходим к следующему локомотиву  $k := k + 1, i := 1, j := 1$  и повторяем шаг 2; если  $j > |\mathcal{F}(R_{s_i})|$ , то переходим к следующему составу  $i := i + 1, j := 1$  и повторяем шаг 2. Переходим к шагу 3.
3. Если  $\tau^{l_k} \leq t(n_j)$ ,  $(v_o(n_j), v_f(n_j)) \in \mathcal{P}_{l_k}$ , переходим к шагу 4. Иначе переходим к шагу 2.
4. Если  $v_f^{l_k} \neq v_o(n_j)$ , выполняем поиск нитки  $N^*$  для перегонки локомотива  $l_k$  к началу простой поднитки  $n_j$ , согласно подразделу 3.2 Если  $v_f^{l_k} = v_o(n_j)$ , полагаем  $N^* := \emptyset$ . Если нитка  $N^*$  найдена, переходим к шагу 5, иначе переходим к шагу 2.
5. Внесем найденную простую поднитку  $n_j$  и, если необходимо, соответствующую ей нитку для перегонки  $N^*$  в маршрут локомотива  $M_{l_k} = M_{l_k} \cup N^* \cup \{n_j\}$ . Уберем простую поднитку  $n$  из рейса состава  $R_{s_i} := R_{s_i} \setminus \{n_j\}$ , если  $\mathcal{F}(R_{s_i}) = \emptyset$ , то уберем состав из множества рассматриваемых  $S := S \setminus \{s_i\}$ . Если  $S = \emptyset$ , переходим к шагу 6, иначе переходим к шагу 2.
6. Окончание алгоритма, получено субоптимальное решение задачи (1).

в составообразовании на станцию отправления, нарушение технических нормативов в результате человеческого фактора, погодных и иных явлений и т. д. В общем случае все описанные факторы в том или ином виде приводят к изменению времени готовности состава к отправке. Таким образом, сведем учет всех случайных факторов, связанных с задержками по времени, к одной случайной величине, моделирующей задержку формирования состава.

Для моделирования случайных задержек по времени будем использовать случайную величину  $\xi_s$ , имеющую экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda_s$ , которое обозначается через  $E(\lambda_s)$ . Для моделирования случайных задержек в транспортных системах традиционно используют экспоненциально распределенные случайные величины. Например, в [10] на основе статистического анализа данных был предложен экспоненциальный закон распределения времени задержки прибытия в аэропорт самолета, выполняющего рейс по расписанию.

Помимо долгосрочного планирования перевозок, которое главным образом позволяет проводить оценку важных эксплуатационных показателей работы железной дороги, также существует так называемое оперативное планирование, которое является основным инструментом организации железнодорожных перевозок. Отметим, что в работе [7] решается задача долгосрочного планирования.

Оперативное планирование на железнодорожном транспорте состоит из нескольких этапов.

1. Разработка и утверждение плана перевозок на период времени, равный  $T$ .

2. Корректировка сформированного плана перевозок с учетом фактического расположения локомотивов и составов, а также общего состояния железнодорожной сети через интервалы времени  $\Delta T$ .

Будем считать, что точное время готовности состава к отправлению известно в текущий момент времени на период планирования  $\Delta T$ , поэтому схема оперативного управления подвижным составом заключается в последовательном решении детерминированной задачи формирования маршрутов движения локомотивов согласно алгоритму 1 через промежутки времени  $\Delta T$  с учетом точного знания времени готовности составов к отправлению на время  $\Delta T$  вперед и планового времени готовности составов к отправлению в оставшийся период времени планирования. При этом в качестве начальных условий решения задачи о назначении локомотивов каждый раз принимается фактическое расположение локомотивов на железнодорожной сети, сложившееся на момент корректировки с учетом всех показателей функционирования локомотивов (необходимость прохождения ТО, плечи и т. д.).

Опишем эвристический алгоритм поиска субоптимального решения задачи назначения локомотивов для осуществления грузоперевозок по железнодорожной сети, реализующий схему оперативного планирования. Пусть  $T_o$  — время начала моделирования. Пусть  $S_i$  — множество составов, которые необходимо перевезти в интервал времени  $[T_o + i\Delta T, T_o + (i+1)\Delta T + T]$ , где  $i = 0, \lfloor T_m/(\Delta T) \rfloor$ . Множества  $S_i$  становятся известными за время  $\Delta T$  до начала соответствующего интервала. Пусть для

---

### Алгоритм 2

---

0. Полагаем  $i := 0$ .

1. Из множества составов  $S_i$  выберем подмножество  $S_i^{\Delta T}$  такое, что для всех  $s \in S_i^{\Delta T}$  выполнено  $T_o + i\Delta T \leq t_o^s \leq T_o + (i+1)\Delta T$ . Пусть теперь для каждого состава  $s$  из множества  $S_i^{\Delta T}$  задано время фактической готовности к отправлению  $\tau_o^s = t_o^s + \xi_s$ . Переходим к шагу 2.
  2. Определим рейсы составов. Для каждого состава  $s \in S_i^{\Delta T}$  выберем нитку  $n \in \overline{N}_s$  такую, чтобы разница во времени отправления  $t(n)$  по нитке  $n$  и времени фактической готовности  $\tau_o^s$  состава  $s$  к отправлению была минимальной, и внесем ее в рейс состава  $R_s := R_s \cup \{n\}$ . Для  $s \in S_i \setminus S_i^{\Delta T}$  выберем нитку  $n \in \overline{N}_s$  такую, чтобы разница во времени отправления  $t(n)$  по нитке  $n$  и планируемого времени формирования  $t_o^s$  состава  $s$  была минимальной, и внесем ее в рейс состава  $R_s := R_s \cup \{n\}$ . Переходим к шагу 3.
  3. Для полученного множества составов  $S_i$  с заданными рейсами и множества локомотивов  $L$  выполним назначение локомотивов согласно подразд. 3.1. Зафиксируем маршруты локомотивов на момент времени  $T_o + i\Delta T$ , т. е. уберем из маршрутов локомотивов все простые поднитки со временем отправления, превышающим  $T_o + i\Delta T$ . Переходим к шагу 4.
  4. Примем  $i := i + 1$ . Если  $i > \lfloor T_m/(\Delta T) \rfloor$ , переходим к шагу 5, иначе переходим к шагу 1.
  5. Окончание алгоритма, получено субоптимальное решение.
-

**Таблица 1** Характеристики входных данных

Число станций	Число станций-депо	Число сортировочных станций	Число составов в суточном задании	Число ниток на сутки	Период моделирования $T_m$ , сут	Дискретность оперативного управления $\Delta T$ , ч
40	16	16	598	1254	10	3

каждого состава  $s \in S_i$  задано планируемое время формирования  $t_o^s$ . Обозначим через  $\bar{N}_s$  множество ниток, по которым может быть перевезен состав  $s$  из расчета планируемого времени формирования.

Описанный выше алгоритм позволяет получить субоптимальное решение задачи (1) при условии неопределенности во времени готовности состава, используя принцип оперативного планирования. Неопределенность заключается в отсутствии точной информации о времени готовности составов к отправлению на весь рассматриваемый период планирования. Согласно принципу оперативного планирования производится многократная корректировка плана перевозок через интервалы времени  $\Delta T$ . В каждый рассматриваемый интервал времени имеется точная информация о времени готовности составов только из этого интервала, для остальных известно только планируемое время готовности, которое может сильно отличаться от фактического.

Проверим адекватность решения, получаемого с помощью алгоритма 2, в случае стохастической постановки с учетом случайного времени формирования составов. Численный эксперимент проводился на примере данных участка МЖД за определенный период времени. Характеристики входных данных приведены в табл. 1.

Вычисления были проведены с учетом ограничений на ТО. Предполагается, что локомотивы должны проходить ТО продолжительностью не менее 8 ч не позже, чем через 48 ч после предыдущего ТО.

Согласно алгоритму 2, составление рейса состава происходит при помощи выбора ближайшей по времени отправления нитки относительно фактического времени формирования. Параметр  $\lambda_s$  распределения случайной величины  $\xi_s$  зависит от множества факторов, например числа вагонов в составе, структуры станции и др. Так как описанная модель не включает в себя процесс составления, вагонопотоки и станционные работы, вопрос выбора  $\lambda_s$  остается вне рамок данной работы. Оценки параметров  $\lambda_s$  получены исходя из обработки реальных статистических данных.

Численный эксперимент проводился с исходными данными, представленными в табл. 1. Для

**Таблица 2** Сравнение результатов

Вариант	Число локомотивов	Число перевезенных составов	Максимальное время задержки состава, ч
Решение из [7]	369	5920	0
$T = 12$	405	5710	6,3
$T = 24$	440	5783	5,1
$T = 48$	422	5659	6,7

каждого  $T \in \{12 \text{ ч}, 24 \text{ ч}, 48 \text{ ч}\}$  выполнено 100 реализаций алгоритма. Кроме основного критерия, числа используемых локомотивов, также оценены выполнение плана перевозок и максимальное время задержки составов. Для каждого  $T$  представим в табл. 2 средние значения для основного критерия и описанных характеристик.

Из табл. 2 видно, что значение критерия относительно детерминированной постановки показало среднее изменение в большую сторону не более чем на 20%. При этом менее 7% составов не было перевезено, что объясняется недостатком ниток. Максимальное время задержки составов при этом достигало около 7 ч. В реальных условиях управления грузовыми перевозками такие составы отправляются вне нормативных ниток. Относительные доли основных характеристик движения локомотивов, а именно: время, проведенное в работе (полезный пробег); время, затраченное на проведение ТО; время, затраченное на перегонки (холостой пробег), а также время простоя — не изменились.

Общий локомотивный парк на МЖД составляет около 900 локомотивов, ежедневно используется примерно 700 локомотивов. В результате численного эксперимента в худшем случае ( $T = 24 \text{ ч}$ ) получено 440 локомотивов, что в сравнении с реальными данными является очень хорошим показателем. Однако следует заметить, что такие показатели, с одной стороны, связаны с наличием некоторой части неперевазанных составов в результате полученного решения, а с другой стороны, возможно, не всеми нюансами функционирования системы железнодорожных перевозок, учтенными в виде ограничений в рассматриваемой модели. Тем не менее полученные результаты показывают, что учет слу-

чайных факторов необходим в подобных моделях, поскольку оказывает значительное влияние (порядка 20%) на основные показатели функционирования системы даже с учетом нового предложенного алгоритма оперативного управления.

## 5 Заключение

В работе описана и исследована математическая модель назначения локомотивов для перевозок составов. Результаты численных экспериментов показали, что случайные возмущения, связанные со временем формирования составов, имеют влияние порядка 20% на значение основного критерия и характеристики движения локомотивов, что подтверждает сравнение с результатами, полученными в [7], а также создает дополнительную проблему — нехватку ниток для перевозки всех составов. В дальнейших исследованиях планируется изучить влияние других случайных факторов на эффективность использования локомотивного парка. Также планируется учесть необходимость прохождения нескольких видов технического обслуживания, ограничения на тип тяги локомотива и массу перевозимого состава и другие факторы.

## Литература

1. Бельй О. В., Кокурин И. М. Организация грузовых железнодорожных перевозок: пути оптимизации // Транспорт Российской Федерации, 2011. № 4(35). С. 28–30.
2. Кибзун А. И., Наумов А. В., Иванов С. В. Двухуровневая задача оптимизации деятельности железнодорожно-го транспортного узла // Управление большими системами, 2012. № 38. С. 140–160.
3. Лазарев А. А., Мусатова Е. Г. Целочисленные постановки задачи формирования железнодорожных составов и расписания их движения // Управление большими системами, 2012. № 38. С. 161–169.
4. Лазарев А. А., Мусатова Е. Г., Гафаров Е. Р., Кварацхелия А. Г. Теория расписаний. Задачи железнодорожного планирования. — М.: ИПУ РАН, 2012. 92 с.
5. Гайнанов Д. Н., Иванов С. В., Кибзун А. И., Осокин А. В. Модель оптимального назначения локомотивов при формировании грузовых составов // Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте: Тр. 4-й науч.-технич. конф. с междунар. участием. — М.: НИИАС, 2015. С. 45–47.
6. Sacchiani V., Galli L., Toth P. A tutorial on non-periodic train timetabling and platforming problems // EURO J. Transportation Logistics, 2015. Vol. 4. No. 3. P. 285–320.
7. Azanov V. M., Buyanov M. V., Gaynanov D. N., Ivanov S. V. Algorithm and software development to allocate locomotives for transportation of freight trains // Bull. South Ural State University. Ser. Math. Modelling Programming Computer Software, 2016. Vol. 9. No. 4. P. 73–85.
8. Азанов В. М., Буянов М. В., Иванов С. В., Кибзун А. И., Наумов А. В., Гайнанов Д. Н. Оптимизация локомотивного парка, предназначенного для перевозки грузовых составов // Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте: Тр. 5-й науч.-технич. конф. с междунар. участием. — М.: НИИАС, 2016. С. 94–96.
9. Floyd R. W. Algorithm 97 — shortest path // Comm. ACM, 1962. Vol. 5. No. 6. P. 345.
10. Кибзун А. И., Наумов А. В., Уланов С. В. Стохастический алгоритм управления летным парком авиакомпании // Автоматика и телемеханика, 2000. № 8. С. 126–136.

Поступила в редакцию 17.04.17

---

---

# DEVELOPMENT OF THE MATHEMATICAL MODEL OF CARGO TRANSPORTATION CONTROL ON A RAILWAY NETWORK SEGMENT TAKING INTO ACCOUNT RANDOM FACTORS

M. V. Buyanov, S. V. Ivanov, A. I. Kibzun, and A. V. Naumov

Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Highway, Moscow 125993, Russian Federation

**Abstract:** A mathematical model for the assignment of locomotives for the transport of freight trains is proposed. In the model, the purpose of optimization is to minimize the number of locomotives involved in transportation of trains due to the choice of routes for trains and locomotives. A deterministic algorithm for obtaining a suboptimal solution is given as well as an algorithm that implements the operational planning scheme. It is proposed to use



a random parameter that simulates the delay in the readiness of a train for departure. The numerical experiment was performed in conditions of incomplete information using the data of the Moscow Railway. The results obtained in deterministic and stochastic statements are compared.

**Keywords:** mathematical modeling; optimization; transportation planning; operational planning

**DOI:** 10.14357/19922264170411

## Acknowledgments

This work is a part of Project No. 2.2461.2017 supported by the Russian Ministry of Education and Science. This work is supported by the Russian Foundation for Basic Research and Russian Railways (project 17-20-03050 ofi\_m\_RZhD).

## References

1. Belyy, O. V., and I. M. Kokurin. 2011. Organizatsiya gruzovykh zheleznodorozhnykh perevozok: puti optimizatsii [Organization of freight rail transportation: Ways to optimize]. *Transport Rossiyskoy Federatsii* [Transport of the Russian Federation] 4(35):28–30.
2. Kibzun, A. I., A. V. Naumov, and S. V. Ivanov. 2012. Dvukhurovnevaya zadacha optimizatsii deyatelnosti zheleznodorozhnogo transportnogo uzla [Bilevel optimization problem for railway transport hub planning]. *Upravlenie bol'shimi sistemami* [Large Scale Systems Control] 38:140–160.
3. Lazarev, A. A. and E. G. Musatova. 2012. Tselochislennye postanovki zadachi formirovaniya zheleznodorozhnykh sostavov i raspisaniya ikh dvizheniya [Integer formulations of freight train design and scheduling problems]. *Upravlenie bol'shimi sistemami* [Large Scale Systems Control] 38:161–169.
4. Lazarev, A. A., E. G. Musatova, E. R. Gafarov, and A. G. Kvarachelija. 2012. *Teoriya raspisaniy. Zadachi zheleznodorozhnogo planirovaniya* [Theory of schedules. Railway planning problems]. Moscow: IPU RAN. 92 p.
5. Gaynanov, D. N., S. V. Ivanov, A. I. Kibzun, and A. V. Osokin. 2015. Model' optimal'nogo naznacheniya lokomotivov pri formirovanii gruzovykh sostavov [Model of the optimal assignment of locomotives in the formation of freight trains]. *Tr. 4-y nauchn.-tekhnich. konf. s mezhdunarodnym uchastiem "Intellektual'nye sistemy upravleniya na zheleznodorozhnom transporte"* [4th Scientific and Technical Conference with International Participation "Intelligent Control Systems in Railway Transport" Proceedings]. Moscow. 45–47.
6. Cacchiani, V., L. Galli, and P. Toth. 2015. A tutorial on non-periodic train timetabling and platforming problems. *EURO J. Transportation Logistics* 4(3):285–320.
7. Azanov, V. M., M. V. Buyanov, D. N. Gaynanov, and S. V. Ivanov. 2016. Algorithm and software development to allocate locomotives for transportation of freight trains. *Bull. South Ural State University. Ser. Math. Modelling Programming Computer Software* 9(4):73–85.
8. Azanov, V. M., M. V. Buyanov, S. V. Ivanov, A. I. Kibzun, A. V. Naumov, and D. N. Gaynanov. 2016. Optimizatsiya lokomotivnogo parka, prednaznachennogo dlya perevozki gruzovykh sostavov [Optimization of locomotive fleet intended for transportation of freight trains]. *Tr. 5-y nauchn.-tekhnich. konf. s mezhdunarodnym uchastiem "Intellektual'nye sistemy upravleniya na zheleznodorozhnom transporte"* [5th Scientific and Technical Conference with International Participation "Intelligent Control Systems in Railway Transport" Proceedings]. Moscow. 94–96.
9. Floyd, R. W. 1962. Algorithm 97: Shortest path. *Comm. ACM* 5(6):345.
10. Kibzun, A. I., A. V. Naumov, and S. V. Ulanov. 2000. A stochastic control algorithm for aircraft allocation. *Automat. Rem. Contr.* 61(8):1355–1363.

Received April 17, 2017

## Contributors

**Buyanov Mikhail V.** (b. 1994) — PhD student, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Highway, Moscow 125993, Russian Federation; buyanovmikhailv@gmail.com

**Ivanov Sergey V.** (b. 1989) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Highway, Moscow 125993, Russian Federation; sergeyivanov89@mail.ru

**Kibzun Andrey I.** (b. 1951) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Head of Department, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Highway, Moscow 125993, Russian Federation; kibzun@mail.ru

**Naumov Andrey V.** (b. 1966) — Doctor of Science in physics and mathematics, associate professor, professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Highway, Moscow 125993, Russian Federation; naumovav@mail.ru



# ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ\*

Ю. И. Битюков<sup>1</sup>, Е. Н. Платонов<sup>2</sup>

**Аннотация:** Задачи многих дисциплин могут привести к дифференциальным и интегральным уравнениям. В простых случаях такие уравнения могут быть решены аналитически, но в более сложных приходится находить приближенные решения этих уравнений. В последнее время большую популярность получили методы, основанные на использовании вейвлетов. Среди применяемых были вейвлеты Дебеша, койфлеты и т. д. Недостаток таких вейвлетов состоит в том, что у них нет аналитического выражения. Поэтому возникают большие сложности при интегрировании и дифференцировании выражений, содержащих эти вейвлеты. В данной статье представлены алгоритмы численного решения линейных интегральных и дифференциальных уравнений, основанные на сплайн-вейвлетах на отрезке. Представленные алгоритмы обобщают известные методы, основанные на вейвлетах Хаара, которые являются частным случаем сплайн-вейвлетов. Результаты статьи применяются для анализа линейных систем управления с сосредоточенными параметрами.

**Ключевые слова:** сплайн-вейвлет; дифференциальные уравнения; интегральные уравнения

**DOI:** 10.14357/19922264170412

## 1 Введение

Для численного решения линейных интегральных уравнений традиционно применяется метод, основанный на замене интегрального уравнения алгебраической системой линейных уравнений с помощью применения квадратурной формулы. Матрица такой системы имеет большой размер, и, как следствие, для нахождения решения требуется большое число арифметических операций.

В [1] было предложено использовать вейвлеты Хаара для приближенного решения интегрального уравнения, что приводило к системе линейных уравнений с разреженной матрицей. Получаемое приближенное решение было кусочно-непрерывным.

В [2] показано, что, если использовать вместо вейвлетов Хаара сплайн-вейвлеты на отрезке, матрица системы линейных уравнений получается псевдоразреженной, т. е. имеет очень много малых по модулю элементов.

В данной статье будут обобщены результаты работ [1, 3–6] и развиты результаты работы [2] для получения приближенных решений любого класса гладкости линейных интегральных и дифференциальных уравнений. В качестве примера рассмотрим анализ линейной системы управления с сосредоточенными параметрами.

## 2 Сплайн-вейвлеты на отрезке

В этом разделе кратко рассмотрим подход к построению вейвлет-систем на отрезке, предложенный в [7]. Пусть действительная функция  $\varphi$  принадлежит действительному пространству  $L^2(\mathbf{R})$ , удовлетворяет равенству

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} u_k \varphi(2x - k), \quad u_k \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

и имеет компактный носитель, содержащийся в отрезке  $[a; b]$ . Обозначим  $\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k)$ ,  $x \in [a; b]$ . Функция  $\varphi$  в теории вейвлетов называется масштабирующей, а равенство (1) — масштабным соотношением [8]. Ясно, что отличными от нуля на отрезке  $[a; b]$  будет лишь конечное число таких функций. Пусть для определенности это будут функции  $\varphi_{j,0}, \varphi_{j,1}, \dots, \varphi_{j,n_j-1}$ .

Если рассмотреть линейные пространства  $V_j = \text{lin} \{ \varphi_{j,0}, \varphi_{j,1}, \dots, \varphi_{j,n_j-1} \}$ ,  $\dim V_j = n_j$ , то в силу равенства (1) будет выполняться  $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L^2[a; b]$ . Поэтому  $\varphi_{j-1,k} = \sum_{s=0}^{n_j-1} p_{s,k} \varphi_{j,s}$ .

Как и в [7], введем обозначения:

$$\Phi_j(x) = (\varphi_{j,0}(x), \varphi_{j,1}(x), \dots, \varphi_{j,n_j-1}(x));$$

$$P_j = (p_{s,k})_{s=0, k=0}^{n_j-1, n_j-1}.$$

Тогда  $\Phi_{j-1} = \Phi_j P_j$ .

\* Результаты работы получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки № 2.2461.2017/ПЧ.

<sup>1</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), yib72@mail.ru

<sup>2</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), en.platonov@gmail.com

Обозначим символом  $W_{j-1}$  ортогональное дополнение к пространству  $V_{j-1}$  в пространстве  $V_j$ . Поскольку  $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$  и  $W_{j-1} \subset V_j$ , то  $W_{j-1}$  — конечномерное пространство  $W_j = \text{lin} \{ \psi_{j,0}, \psi_{j,1}, \dots, \psi_{j,m_j-1} \}$ ,  $\dim W_j = m_j$  и  $\psi_{j-1,k} = \sum_{s=0}^{n_j-1} q_{s,k}^j \varphi_{j,s}$ . Функции  $\psi_{j,k}$  называются вейвлетами, а пространства  $W_j$  называются вейвлет-пространствами.

Снова введем в рассмотрение матрицы [7]:

$$\Psi_j(x) = (\psi_{j,0}(x), \psi_{j,1}(x), \dots, \psi_{j,m_j-1}(x)) ;$$

$$Q_j = \left( q_{s,k}^j \right)_{s=0,k=0}^{n_j-1, m_j-1}$$

Тогда  $\Psi_{j-1} = \Phi_j Q_j$ . Следует заметить, что  $n_j + m_j = n_{j+1}$ . Пусть  $f \in L^2(X)$  и  $\Pi_j : L^2(X) \rightarrow V_j$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Pi_j f &= \sum_{k=0}^{n_j-1} c_{jk} \varphi_{jk} = \Pi_{j-1} f + \Pi_{j-1}^W f = \\ &= \sum_{k=0}^{n_{j-1}-1} c_{j-1,k} \varphi_{j-1,k} + \sum_{k=0}^{m_{j-1}-1} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}. \end{aligned}$$

Данное равенство можно переписать в матричном виде, если ввести в рассмотрение векторы  $C_j = (c_{j,0}, \dots, c_{j,n_j-1})^T$ ,  $D_j = (d_{j,0}, \dots, d_{j,m_j-1})^T$ . Первый вектор описывает приближение функции  $f$ , а второй вектор представляет собой вейвлет-коэффициенты, которые характеризуют отклонение  $\Pi_{j-1} f$  от  $\Pi_j f$ . Как показано в [7], имеет место равенство  $C_j = P_j C_{j-1} + Q_j D_{j-1}$ . По данному равенству можно восстановить приближение  $\Pi_j f$  по более грубому приближению  $\Pi_{j-1} f$  и вейвлет-коэффициентам.

Поскольку линейные операторы (проекторы)  $V_j \rightarrow V_{j-1}$ ,  $V_j \rightarrow W_{j-1}$  определяются некоторыми матрицами  $A_j$ ,  $B_j$ , то  $C_{j-1} = A_j C_j$ ,  $D_{j-1} = B_j C_j$ .

Под вейвлет-преобразованием функции  $f$  будем понимать нахождение векторов  $C_0$ ,  $D_0$ ,  $D_1, \dots, D_{j-1}$ . Матрицы  $Q_j$  и  $P_j$  известны как фильтры синтеза. Матрицы  $A_j$  и  $B_j$  известны как фильтры анализа. Множество  $\{A_j, B_j, P_j, Q_j\}$  называется банком фильтров.

Как показано в [7], между матрицами  $A_j$ ,  $B_j$  и  $P_j$ ,  $Q_j$  существует следующая связь:

$$\begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} = (P_j Q_j)^{-1}.$$

Посмотрим теперь, как определить матрицу  $Q_j$ . Введем следующее обозначение. Если  $f = (f_1, \dots, f_r)$ ,  $g = (g_1, \dots, g_r)$  — некоторые векторы, то  $[(f, g)] = ((f_i, g_j))_{i,j=1}^r$  — матрица скалярных произведений. Как показано в [7], матрица  $Q_j$  удовлетворяет следующему уравнению:  $P_j^T [(\Phi_j, \Phi_j)] Q_j = 0$ .

Перейдем теперь к сплайн-вейвлетами на отрезке. Определим В-сплайны порядка  $n$  как свертку [9]:

$$N_n = N_{n-1} * N_0, \quad N_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 1); \\ 0, & x \notin [0; 1). \end{cases}$$

Как показано в [9], если определить функцию  $\varphi(x) = N_n(x)$ , то она удовлетворяет равенству  $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (C_{n+1}^k / 2^n) \varphi(2x - k)$ , где  $C_{n+1}^k = (n+1)! / (k!(n+1-k)!)$ . В [10] представлен банк фильтров, соответствующий функции  $\varphi(x) = N_n(x)$ , а именно: справедливы следующие результаты.

**Лемма 2.1.** Функция  $\varphi(x) = N_n(x)$  определяет последовательность подпространств

$$V_{\alpha,0} \subset V_{\alpha,1} \subset \dots,$$

$$V_{\alpha,j} = \text{lin} \{ \varphi_{j,-n}, \varphi_{j,-n+1}, \dots, \varphi_{j,2^j \alpha(n+1)-1} \}$$

пространства  $L^2[0; \alpha(n+1)]$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots$ , такую, что  $\bigcup_{j=0}^{+\infty} V_{\alpha,j} = L^2[0; \alpha(n+1)]$ .

**Лемма 2.2.** Имеет место равенство  $\sum_{k=-n}^{2^j \alpha(n+1)-1} \varphi_{j,k}(x) \equiv 2^{j/2}$ ,  $x \in [0; \alpha(n+1)]$ . Если  $V_{\alpha,j} = V_{\alpha,j-1} \oplus W_{\alpha,j-1}$ , то  $\dim W_{\alpha,j-1} = 2^{j-1} \alpha(n+1)$ .

Пусть  $\lambda_{m,k} = \int_k^{k+1} N_n(z) N_n(z-m) dz$ ,  $m = -n, \dots, n$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , и  $\omega_{i,k} = \omega_{k,i} = \sum_{s=n-i+1}^n \lambda_{k-i,s}$ ,  $\theta_{i,k} = \theta_{k,i} = \sum_{s=0}^{n-k} \lambda_{i-k,s}$ ,  $1 \leq i \leq k \leq n$ . Введем в рассмотрение вектор  $p \in \mathbf{R}^{2^j \alpha(n+1)+n}$ , который определим равенством:

$$p = \begin{cases} \left( C_{n+1}^0 \dots C_{n+1}^k C_{n+1}^k \dots C_{n+1}^0 0 \dots 0 \right)^T, & \text{если } n = 2k; \\ \left( C_{n+1}^0 \dots C_{n+1}^k C_{n+1}^{k+1} C_{n+1}^k \dots C_{n+1}^0 0 \dots 0 \right)^T, & \text{если } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Определим оператор сдвига  $R_s: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$  следующим правилом:

$$R_s a = \begin{cases} \left( \underbrace{0 \dots 0}_s a_1 \dots a_{m-s} \right)^T, & \text{если } 0 \leq s < m; \\ \left( a_{|s|+1} \dots a_m 0 \dots 0 \right)^T, & \text{если } -m < s < 0; \\ \emptyset, & \text{если } |s| \geq m, \end{cases}$$

где

$$a = (a_1, \dots, a_m)^T.$$

**Лемма 2.3.** Матрицы  $P_j$  и  $[(\Phi_j, \Phi_j)]$  для последовательности подпространств  $V_{\alpha,0} \subset V_{\alpha,1} \subset \dots$  имеют вид:

$$P_j = \frac{1}{2^{n+1/2}} (R_{-n} p R_{-n+2} p \cdots R_{n-2+2^j \alpha(n+1)} p);$$

$$[(\Phi_j, \Phi_j)] = (d_1 \cdots d_n q R_1 q \cdots \cdots R_{2^j \alpha(n+1) - n - 1} q u_1 \cdots u_n)^T,$$

где

$$d_s = (\omega_{1,s} \omega_{2,s} \cdots \omega_{n,s} q_{n-s+1} \cdots q_n 0 \cdots 0)^T;$$

$$u_s = (0 \cdots 0 q_n \cdots q_s \theta_{1,s} \cdots \theta_{n,s})^T;$$

$$q = (q_n q_{n-1} \cdots q_1 q_0 q_1 \cdots q_{n-1} q_n 0 \cdots 0)^T \in \mathbf{R}^{2^j \alpha(n+1) + n}, \quad q_k = (N_n(\cdot), N_n(\cdot - k)).$$

Матрица, транспонированная к  $T_j = P_j^T [(\Phi_j, \Phi_j)] = 2^{-n-1/2} (t_{i,s})_{i=1,s=1}^{2^{j-1} \alpha(n+1) + n, 2^j \alpha(n+1) + n}$ , имеет вид:

$$T_j^T = \frac{1}{2^{n+1/2}} (L_1 \cdots L_n w R_2 w \cdots \cdots R_{2^j \alpha(n+1) - 2n - 2} w L_{2^{j-1} \alpha(n+1) + 1} \cdots \cdots L_{2^{j-1} \alpha(n+1) + n}),$$

где

$$w = (p^T R_{-2n} q p^T R_{-2n+1} q \cdots p^T R_{n+1} q 0 \cdots 0)^T \in \mathbf{R}^{2^j \alpha(n+1) + n};$$

$$L_i = \begin{aligned} &= \left( (R_{-n+2i-2} p)^T d_1 \cdots (R_{-n+2i-2} p)^T d_n 0 \cdots 0 \right)^T + \\ &\quad + (R_n \circ R_{-3n+2i-2}) w, \quad i = 1, \dots, n; \\ L_{i+1} &= \left( 0 \cdots 0 (R_{-n+2i} p)^T u_1 \cdots (R_{-n+2i} p)^T u_n \right)^T + \\ &\quad + (R_n \circ R_{-n+2i}) w, \\ &\quad i = 2^{j-1} \alpha(n+1), \dots, n-1 + 2^{j-1} \alpha(n+1). \end{aligned}$$

С использованием леммы 2.3 в [10] найдены  $2^{j-1} \alpha(n+1)$  линейно независимых решений  $h_s = (h_{1,s}, h_{2,s}, \dots, h_{2^j \alpha(n+1) + n, s})^T$  системы линейных уравнений  $T_j h_s = 0$ . Эти решения и представляют собой столбцы матрицы  $Q_j = (h_1, \dots, h_{2^{j-1} \alpha(n+1)})$ . Столбцы  $h_s$  выбирались таким образом, чтобы функции

$$\psi_{j-1,s}(x) = \Phi_j(x) h_s = \sum_{i=1}^{2^j \alpha(n+1) + n} h_{i,s} \varphi_{j,-n+(i-1)}(x)$$

по возможности представляли собой сдвинутые версии одной функции, т. е. имели бы одну форму (за исключением, конечно, граничных вейвлетов).

Введем сокращенные обозначения для матриц, составленных из элементов матрицы  $T_j$ :

$$T_j \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{i_1, j_1} \cdots t_{i_1, j_m} \\ \vdots \\ t_{i_k, j_1} \cdots t_{i_k, j_m} \end{pmatrix}.$$

Для внутренних вейвлетов (носитель содержится в отрезке  $[0; \alpha(n+1)]$ ):

$$h_s = (0, \dots, 0, h_{2s-n-1, s}, \dots, h_{2s+2n, s}, 0, \dots, 0)^T, \quad s = n+1, \dots, 2^{j-1} \alpha(n+1) - n,$$

где  $T_j \begin{pmatrix} s-n, \dots, s+2n \\ 2s-n-1, \dots, 2n+2s \end{pmatrix} (h_{2s-n-1, s}, \dots, h_{2s+2n, s})^T = 0$ .

Решения, соответствующие граничным вейвлетам, выбираются следующим образом. Для  $s = 1, 2, \dots, n$  положим

$$h_s = (0, \dots, 0, h_{s,s}, \dots, h_{2n+2s, s}, 0, \dots, 0)^T,$$

где  $T_j \begin{pmatrix} 1, \dots, s+2n \\ s, \dots, 2s+2n \end{pmatrix} (h_{s,s}, \dots, h_{2s+2n, s})^T = 0$ . Для  $s = 2^{j-1} \alpha(n+1) - n + 1, \dots, 2^{j-1} \alpha(n+1)$  положим

$$h_s = (0, \dots, 0, h_{2s-n-1, s}, \dots, h_{2^{j-1} \alpha(n+1) + n + s, s}, 0, \dots, 0)^T,$$

где

$$T_j \begin{pmatrix} s-n, \dots, n+2^{j-1} \alpha(n+1) \\ 2s-n-1, \dots, 2^{j-1} \alpha(n+1) + n + s \end{pmatrix} = (h_{2s-n-1, s}, \dots, h_{2^{j-1} \alpha(n+1) + n + s, s})^T.$$

Кратко рассмотрим применение вейвлет-систем на отрезке к построению двумерных вейвлетов на прямоугольной области. Пусть даны последовательности  $V_{0,i} \subset V_{1,i} \subset \dots \subset V_{j,i} \subset \dots$  конечномерных подпространств  $L^2[a_i; b_i]$ , масштабирующие функции  $\varphi^{(i)}$  и банки фильтров  $P_{j,i}, Q_{j,i}, A_{j,i}, B_{j,i}, i = 1, 2$ . Стандартный подход к построению многомерных вейвлет-систем — это взятие тензорных произведений функций из одномерных базисов [11]. Определим подпространства  $V_j^2 = V_{j,1} \otimes V_{j,2} = \text{lin} \{f_1 \otimes f_2 : f_1 \in V_{j,1}, f_2 \in V_{j,2}\}$ , где функция  $f_1 \otimes f_2$  определяется правилом  $f_1 \otimes f_2(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ . Ясно, что функции  $\varphi_{j,k}^{(1)} \otimes \varphi_{j,s}^{(2)}$  образуют базис в пространстве  $V_j^2$ . Вейвлет-пространства  $W_j^2$  определяются следующим образом:

$$V_j^2 = V_{j-1}^2 \oplus W_{j-1}^2.$$

Следующие две леммы очевидны.

**Лемма 2.4.** Пусть  $f \in L^2[0; n+1]$ , тогда  $\Pi_j f = \Phi_j C_j^*$ , где  $C_j^* = [(\Phi_j, \Phi_j)]^{-1} [(f, \Phi_j)]$ . При этом

$$\|f - \Pi_j f\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - [(f, \Phi_j)]^T [(\Phi_j, \Phi_j)] [(f, \Phi_j)].$$

**Лемма 2.5.** Пусть  $f \in L^2([a_1; b_1] \times [a_2; b_2])$  и  $\Pi_j^{(2)} : L^2([a_1; b_1] \times [a_2; b_2]) \rightarrow V_j^2$  — проектор. Если

$$G_j = \left( \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} \varphi_{j,s}^{(1)}(x) \varphi_{j,k}^{(2)}(y) f(x, y) dy \right)_{s,k=0}^{n_{j,1}-1, n_{j,2}-1},$$

то  $\Pi_j^{(2)} f(x, y) = \Phi_j^{(1)}(x) C_j (\Phi_j^{(2)}(y))^T$ , где  $\Phi_j^{(i)} = (\varphi_{j,0}^{(i)} \dots \varphi_{j,n_j,i-1}^{(i)})$ , а матрица  $C_j$  определяется равенством:

$$C_j = \left[ (\Phi_j^{(1)}, \Phi_j^{(1)}) \right]^{-1} G_j \left[ (\Phi_j^{(2)}, \Phi_j^{(2)}) \right]^{-1}.$$

### 3 Интегралы от сплайн-вейвлетов

Пусть  $Q_j = (h_1^j, \dots, h_{2^{j-1}(n+1)}^j)$ , где  $h_s^j = (h_{1,s}^j, h_{2,s}^j, \dots, h_{2^j(n+1)+n,s}^j)^T$ . Тогда, согласно результатам предыдущего раздела,

$$\psi_{j-1,s}(x) = \begin{cases} \sum_{i=s}^{2s+2n} h_{i,s}^j \varphi_{j,-n+i-1}(x), & s = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=2s-n-1}^{2s+2n} h_{i,s}^j \varphi_{j,-n+i-1}(x), & s = n+1, \dots, 2^{j-1}(n+1) - n; \\ \sum_{i=2s-n-1}^{2^{j-1}(n+1)+n+s} h_{i,s}^j \varphi_{j,-n+i-1}(x), & s = 2^{j-1}(n+1) - n + 1, \dots, 2^{j-1}(n+1). \end{cases} \quad (2)$$

Так же, как и в работах [1, 3–6], для удобства введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} w_l(x) &= \varphi_{0,l-n-1}, \quad l = 1, 2, \dots, 2n+1, \\ w_l(x) &= \psi_{j,s}(x), \quad l = 2^j(n+1) + n + s, \\ & \quad j = 0, 1, \dots, s = 1, \dots, 2^j(n+1). \end{aligned}$$

На рис. 1 представлены графики некоторых функций  $w_l$  для случая  $n = 5$ .

Пусть  $J \geq 0$ ,  $\Pi_J : L^2[0; n+1] \rightarrow V_J$  — проектор и  $M = 2^J(n+1) + n$ . Обозначим  $H_J = (w_1 \dots w_M)$  и введем в рассмотрение матрицу скалярных произведений  $[(H_J, H_J)]$ . В лемме 2.3 представлены матрицы скалярных произведений  $[(\Phi_k, \Phi_k)]$  для всех  $k = 0, 1, \dots$ . Замечая, что  $\Psi_k = \Phi_{k+1} Q_{k+1}$  и  $[(\Psi_k, \Psi_k)] = Q_{k+1}^T [(\Phi_{k+1}, \Phi_{k+1})] Q_{k+1}$ , получаем матрицу:

$$[(H_J, H_J)] = \begin{pmatrix} [(\Phi_0, \Phi_0)] & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & Q_1^T [(\Phi_1, \Phi_1)] Q_1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & Q_J^T [(\Phi_J, \Phi_J)] Q_J \end{pmatrix}.$$

Так как  $V_J = V_0 \oplus W_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus W_{J-1}$ , то для  $f \in L^2[0; n+1]$  имеем  $\Pi_J f = \sum_{l=1}^M c_l w_l = H_J C_J$ , где  $C_J = (c_1 \dots c_M)^T$ . Как и в работах [1, 3–6], определим функции:

$$\xi_{1,l}(x) = \int_0^x w_l(t) dt; \quad (3)$$

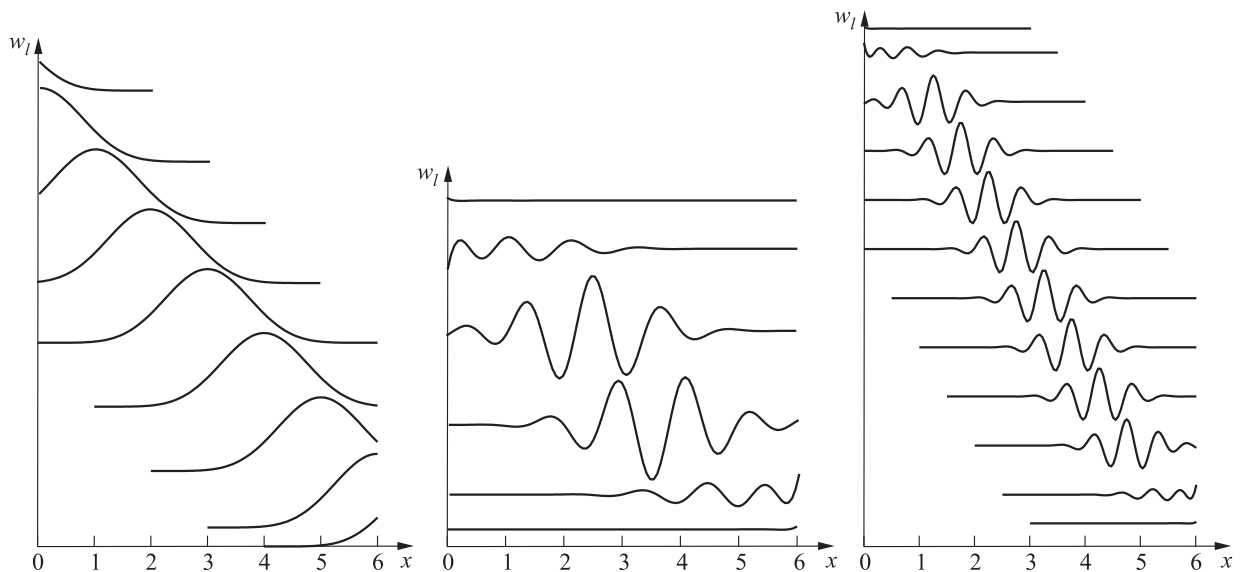


Рис. 1 Графики функций  $w_l$  для  $n = 5$

$$\begin{aligned} \xi_{\nu+1,l}(x) &= \int_0^x \xi_{\nu,l}(t) dt = \\ &= \frac{1}{\nu!} \int_0^x (x-t)^\nu w_l(t) dt, \quad \nu = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Согласно определению функций  $w_l$  и равенств (2) функция  $\xi_{\nu+1,l}(x)$  представляет собой линейную комбинацию функций

$$\eta_{n,\nu}^{j,s}(x) = \int_0^x (x-t)^\nu N_n(2^j t - s) dt.$$

**Лемма 3.1.** *Имеет место следующее рекуррентное соотношение:*

$$\begin{aligned} \eta_{n,\nu}^{j,s}(x) &= \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} N_n(-s) + \\ &+ \frac{2^j}{\nu+1} \left( \eta_{n-1,\nu+1}^{j,s}(x) - \eta_{n-1,\nu+1}^{j,s+1}(x) \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_{0,\nu}^{j,s}(x) &= \\ &= \begin{cases} \frac{(x-a)^{\nu+1} - (x-b)^{\nu+1}}{\nu+1}, \\ \text{если } [a; b] = [0; x] \cap \left[ \frac{s}{2^j}; \frac{s+1}{2^j} \right] \neq \emptyset; \\ 0, \text{ если } [a; b] = [0; x] \cap \left[ \frac{s}{2^j}; \frac{s+1}{2^j} \right] = \emptyset. \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

**Доказательство.** По свойству В-сплайнов [9] имеет место равенство:

$$N'_n(x) = N_{n-1}(x) - N_{n-1}(x-1).$$

Следовательно, по формуле интегрирования по частям получаем:

$$\begin{aligned} \eta_{0,\nu}^{j,s}(x) &= -\frac{(x-t)^{\nu+1}}{\nu+1} N_n(2^j t - s) \Big|_0^x + \\ &+ 2^j \int_0^x \frac{(x-t)^{\nu+1}}{\nu+1} (N_{n-1}(2^j t - s) - \\ &- N_{n-1}(2^j t - s - 1)) dt = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1} N_n(-s) + \\ &+ \frac{2^j}{\nu+1} \left( \eta_{n-1,\nu+1}^{j,s}(x) - \eta_{n-1,\nu+1}^{j,s+1}(x) \right). \end{aligned}$$

Равенство (6) очевидно.  $\square$

Формулы (5) и (6) позволяют находить значение функции  $\eta_{n,\nu}^{j,s}(x)$  в любой точке без интегрирования. Итак, для  $l = 1, 2, \dots, 2n + 1$  получаем:

$$\xi_{\nu+1,l}(x) = \frac{1}{\nu!} \eta_{n,\nu}^{0,l-n-1}(x), \quad l = 1, 2, \dots, 2n + 1.$$

Для  $l = 2^j(n+1) + n + s, j = 0, 1, \dots, s = 1, \dots, \dots, 2^j(n+1)$  получаем:

$$\begin{aligned} \xi_{\nu+1,l}(x) &= \\ &= \begin{cases} \frac{2^{(j+1)/2}}{\nu!} \sum_{i=s}^{2s+2n} h_{i,s}^{j+1} \eta_{n,\nu}^{j+1,-n+i-1}(x), \\ \hspace{15em} s = 1, \dots, n; \\ \frac{2^{(j+1)/2}}{\nu!} \sum_{i=2s-n-1}^{2s+2n} h_{i,s}^{j+1} \eta_{n,\nu}^{j+1,-n+i-1}(x), \\ \hspace{15em} s = n + 1, \dots, 2^j(n+1) - n; \\ \frac{2^{(j+1)/2}}{\nu!} \sum_{i=2s-n-1}^{2^j(n+1)+n+s} h_{i,s}^{j+1} \eta_{n,\nu}^{j+1,-n+i-1}(x), \\ \hspace{15em} s = 2^j(n+1) - n + 1, \dots, 2^j(n+1). \end{cases} \end{aligned}$$

Полученные равенства справедливы при всех  $\nu = 0, 1, \dots$

## 4 Применение сплайн-вейвлетов к решению линейных интегральных и дифференциальных уравнений

В проекционных методах решения линейных уравнений рассматриваются два уравнения [12]: первое — в полном нормированном пространстве  $X$ :

$$Kx \equiv x - \lambda Hx = f; \quad (7)$$

второе — в его полном подпространстве  $V_j$ :

$$K_j x_j \equiv x_j - \lambda H_j x_j = \Pi_j f, \quad (8)$$

где  $H$  — непрерывный линейный оператор в  $X$ ;  $H_j$  — непрерывный линейный оператор в  $V_j$ . Уравнение (7) называется точным, а уравнение (8) — приближенным. При этом предполагается, что выполнены следующие условия.

- 1. Условие близости операторов  $H$  и  $H_j$ .** Для любого  $x_j \in V_j$  выполняется  $\|\Pi_j H x_j - H_j x_j\| \leq \rho_j \|x_j\|$ .
- 2. Условие хорошей аппроксимации элементов вида  $Hx$  элементами из  $V_j$ .** Для любого  $x \in X$  существует  $x_j \in V_j$  такой, что  $\|Hx - x_j\| \leq \rho_{1,j} \|x\|$ .
- 3. Условие хорошей аппроксимации свободного члена точного уравнения.** Существует элемент  $f_j \in V_j$  такой, что  $\|f - f_j\| \leq \rho_{2,j} \|f\|$ . В отличие от предыдущих условий  $\rho_{2,j}$  здесь, вообще говоря, зависит от  $f$ .



Как показано в [12], если оператор  $K$  имеет непрерывный обратный, уравнение (7) имеет решение и  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \rho_j = 0$ ,  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \rho_{1,j} = 0$ ,  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \rho_{2,j} = 0$ , то  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|x - x_j\| = 0$ , где  $x_j$  — решение уравнения (8).

Рассмотрим сначала линейное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода. С помощью замены переменной такое уравнение можно свести к следующему:

$$u(x) - \lambda \int_0^{n+1} U(x,t)u(t) dt = f(x), \quad x, t \in [0; n+1].$$

Пусть  $\varphi(x) = N_n(x)$ ,  $V_0 \subset V_1 \subset \dots$  — соответствующая последовательность конечномерных подпространств пространства  $L^2[0; n+1]$ . Пусть  $X = L^2[0; n+1]$ . Операторы  $K : X \rightarrow X$ ,  $H : X \rightarrow X$  и  $H_j : V_j \rightarrow V_j$  определим равенствами:

$$Ku(\cdot) = u(\cdot) - \lambda \int_0^{n+1} U(\cdot, t)u(t) dt;$$

$$Hu(\cdot) = \int_0^{n+1} U(\cdot, t)u(t) dt;$$

$$H_j = \Pi_j \circ H,$$

где  $U \in L^2([0; n+1]^2)$ . Условие близости операторов  $H$  и  $H_j$  выполняется с  $\rho_j = 0$ . Пусть  $u \in X$  и  $u_j(\cdot) = \int_0^{n+1} \Pi_j^{(2)} U(\cdot, t)u(t) dt \in V_j$ . Тогда  $\rho_{1,j} = \|U - \Pi_j^{(2)} U\|_{L^2([0; n+1]^2)}$  и  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \rho_{1,j} = 0$ . Следовательно, условие хорошей аппроксимации элементов вида  $Hu$  элементами из  $V_j$  также выполняется. Наконец, для произвольного  $f \in X$ ,  $f \neq 0$ , возьмем  $f_j = \Pi_j f$ , а  $\rho_{2,j} = \|f - \Pi_j f\|_{L^2([0; n+1])} / \|f\|_{L^2([0; n+1])}$ . Тогда  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \rho_{2,j} = 0$ .

Решение приближенного уравнения

$$u_J - \lambda \Pi_J \circ H u_J = \Pi_J f \quad (9)$$

будем искать в виде  $u_J = \sum_{l=1}^M c_l w_l = H_J C_J$ , где  $M = 2^J(n+1) + n$ . Тогда уравнение (9) можно переписать в виде системы линейных уравнений для определения коэффициентов  $c_l$ :

$$\sum_{l=1}^M c_l (w_l, w_s) - \lambda \sum_{l=1}^M c_l \int_0^{n+1} dx \int_0^{n+1} U(x,t)w_l(t)w_s(x) dt = (f, w_s),$$

$$s = 1, 2, \dots, M.$$

Это и есть система метода Галеркина. Перепишем ее в матричном виде:

$$C_J [(H_J, H_J)] - \lambda G_J = F_J, \quad (10)$$

где

$$C_J = (c_1 \dots c_M);$$

$$F_J = ((f, w_1) \dots (f, w_M))^T;$$

$$G_J = (g_{l,s})_{l,s=1}^M,$$

$$g_{l,s} = \int_0^{n+1} dx \int_0^{n+1} U(x,t)w_l(t)w_s(x) dt.$$

Аналогично рассматривается линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$u(x) - \lambda \int_0^x U(x,t)u(t) dt = f(x), \quad x, t \in [0; n+1].$$

Операторы  $K : X \rightarrow X$ ,  $H : X \rightarrow X$  и  $H_j : V_j \rightarrow V_j$  определим равенствами:

$$Ku(x) = u(x) - \lambda \int_0^x U(x,t)u(t) dt;$$

$$Hu(x) = \int_0^x U(x,t)u(t) dt;$$

$$H_j = \Pi_j \circ H.$$

Величины  $\rho_j$ ,  $\rho_{1,j}$  и  $\rho_{2,j}$  остаются теми же, что и для уравнения Фредгольма. Таким образом, система Галеркина для данного уравнения имеет вид:

$$\sum_{l=1}^M c_l (w_l, w_s) - \lambda \sum_{l=1}^M c_l \int_0^{n+1} dx \int_0^x U(x,t)w_l(t)w_s(x) dt = (f, w_s), \quad s = 1, 2, \dots, M. \quad (11)$$

Матричный вид системы (11) совпадает с (10), где

$$G_J = (g_{s,l})_{s,l=1}^M, \quad g_{s,l} = \int_0^{n+1} dx \int_0^x U(x,t)w_l(t)w_s(x) dt.$$

Рассмотрим теперь линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(k)} + a_1(x)y^{(k-1)} + \dots + a_k(x)y = f(x) \quad (12)$$

с непрерывными коэффициентами  $a_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  и начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(k-1)}(0) = y_{k-1}. \quad (13)$$

Если обозначить  $y^{(k)}(x) = u(x)$ , то задача (12)–(13) сводится к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода. Следовательно, приближенное решение задачи (12)–(13) можно искать в виде:

$$y_J(x) = \sum_{s=1}^M c_s \xi_{k,s}(x) + y_{k-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + y_{k-2} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} + \dots + y_0,$$

где функции  $\xi_{k,s}(x)$  определены равенствами (3) и (4), а коэффициенты  $c_s$  определяются из системы линейных уравнений:

$$\sum_{s=1}^M c_s (\xi_{k,s} + a_1 \xi_{k-1,s} + \dots + a_k w_s, w_l) = (f, w_l), \quad l = 1, \dots, M.$$

При этом  $\lim_{J \rightarrow +\infty} \|y_J - y\|_{C^{k-1}[0;n+1]} = 0$ , где  $y(x)$  — точное решение задачи (12)–(13).

**Пример 4.1.** Рассмотрим нестационарную систему автоматического управления, поведение которой описывается дифференциальным уравнением:

$$\sum_{k=0}^5 a_k(t) x^{(k)}(t) = g(t),$$

где коэффициенты  $a_k(t)$  определяются из следующего выражения:

$$\begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \\ a_5(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5596 & 1,8918 & 2,5825 & 1,7855 & 0,6277 & 0,0909 \\ 0,7113 & 2,3843 & 3,222 & 2,1975 & 0,7588 & 0,1065 \\ 0,3717 & 1,2333 & 1,6449 & 1,1038 & 0,3728 & 0,0507 \\ 0,1002 & 0,3278 & 0,43 & 0,2827 & 0,093 & 0,0122 \\ 0,014 & 0,0449 & 0,0576 & 0,0369 & 0,0118 & 0,0015 \\ 0,0008 & 0,0025 & 0,0031 & 0,0019 & 0,006 & 0,00007 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \\ t^4 \\ t^5 \end{pmatrix}.$$

Найти реакцию системы на входное воздействие:

$$g(t) = (85,7661 + 338,5984t + 497,0437t^2 + 406,9496t^3 + 186,9354t^4 + 46,7809t^5 + 4,8258t^6) e^{-4t}.$$

Начальные условия нулевые. Интервал исследования —  $[0; 5]$  с.

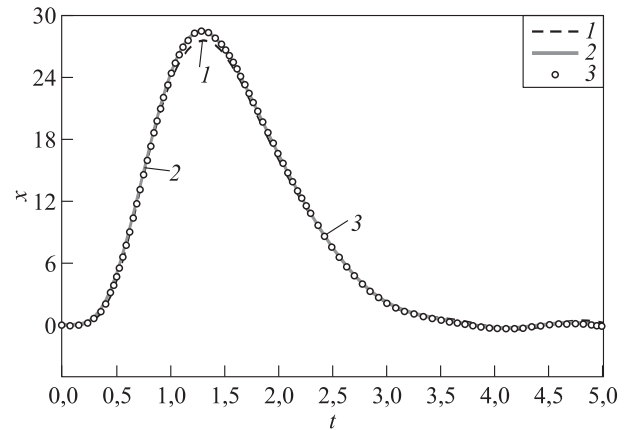
**Решение.** Так как начальные условия нулевые, приближенное решение данной задачи будем искать в виде

$$x_J(t) = \sum_{s=1}^M c_s \xi_{5,s}(t),$$

где коэффициенты  $c_1, \dots, c_M$  определяются из системы линейных уравнений:

$$\sum_{s=1}^{2^J(n+1)+n} c_s \left( a_5 w_s + \sum_{k=0}^4 a_k \xi_{5-k,s}, w_l \right) = (g, w_l), \quad l = 1, \dots, 2^J(n+1) + n.$$

На рис. 2 показаны графики третьего и пятого приближений  $x_2(t)$  (1),  $x_4(t)$  (2) и график сеточной функции  $\{(t_i, \tilde{x}_i)\}$  (3), полученной методом Рунге–Кутты. □



**Рис. 2** Графики приближений  $x_2(t)$  (1),  $x_4(t)$  (2) и график сеточной функции  $\{(t_i, \tilde{x}_i)\}$  (3), полученной методом Рунге–Кутты

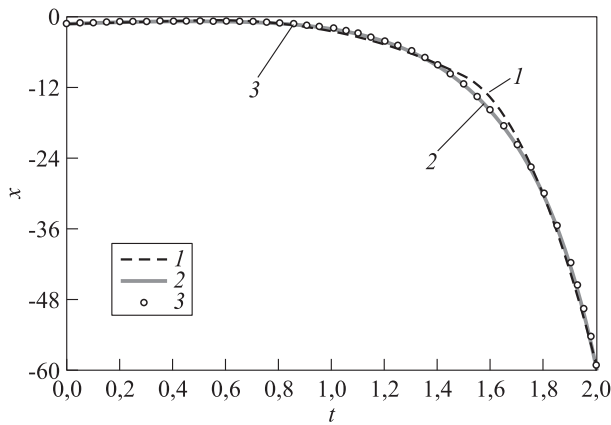
**Пример 4.2.** Поведение линейной нестационарной системы описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & 1-t \\ 1+t & t-t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}.$$

Найти реакцию системы на входное воздействие:

$$g_1(t) = 0,23315158t^9 - 3,89665t^8 + 26,4309725t^7 - 93,4794t^6 + 183,95t^5 - 200,83t^4 + 122,255277t^3 - 50,135386t^2 + 13,095959t - 2,8237;$$

$$g_2(t) = -0,071962459t^{13} + 1,3465024t^{12} - 10,98105044t^{11} + 51,1908385t^{10} - 150,5098287t^9 + 291,295256t^8 - 378,61242t^7 + 336,683591t^6 -$$



**Рис. 3** Графики приближений  $x_0(t)$  (1),  $x_2(t)$  (2) и график сеточной функции  $\{(t_i, \tilde{x}_i)\}$  (3), полученной методом Рунге–Кутты

$$- 213,9681871t^5 + 106,48891t^4 - 47,3676t^3 + 19,56997t^2 - 3,863587t - 0,0004283$$

для начальных условий  $x(0) = -1$  и  $y(0) = 2$  на временном интервале  $[0; 2]$  с.

**Решение.** Приближенное решение будем искать в виде:

$$x_J(t) = -1 + \sum_{s=1}^M c_s \xi_{1,s}(t);$$

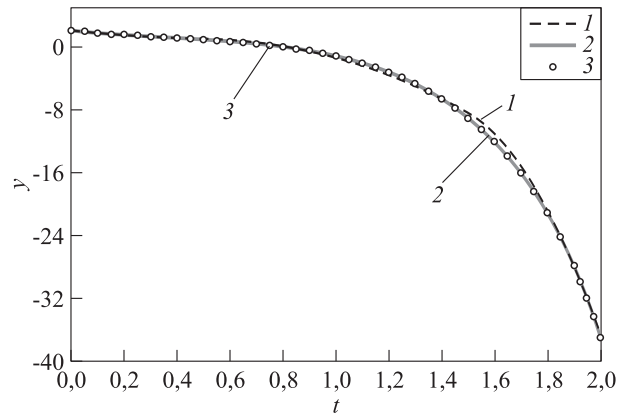
$$y_J(t) = 2 + \sum_{s=1}^M c_{M+s} \xi_{1,s}(t),$$

где  $M = 2^J(n + 1) + n$ , а коэффициенты  $c_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, 2M$ , определяются из системы линейных уравнений:

$$\sum_{s=1}^M c_s \left( (w_s, w_l) - \int_0^{n+1} t^2 \xi_{1,s}(t) w_l(t) dt \right) - \sum_{s=1}^M c_{M+s} \int_0^{n+1} (1-t) \xi_{1,s}(t) w_l(t) dt = \int_0^{n+1} (t^2 g_1(t) - t^2 + 2(1-t)) w_l(t) dt,$$

$$l = 1, 2, \dots, M;$$

$$\sum_{s=1}^M c_s \int_0^{n+1} (1+t) \xi_{1,s}(t) w_l(t) dt + \sum_{s=1}^M c_{M+s} \left( \int_0^{n+1} (t-t^2) \xi_{1,s}(t) w_l(t) dt - (w_s, w_l) \right) =$$



**Рис. 4** Графики приближений  $y_0(t)$  (1),  $y_2(t)$  (2) и график сеточной функции  $\{(t_i, \tilde{y}_i)\}$  (3), полученной методом Рунге–Кутты

$$= \int_0^{n+1} (2t^2 - t + 1 - g_1(t) - t g_2(t)) w_l(t) dt,$$

$$l = 1, 2, \dots, M.$$

На рис. 3 и 4 показаны графики первого и третьего приближений  $x_0(t)$ ,  $y_0(t)$  (1),  $x_2(t)$ ,  $y_2(t)$  (2) и графики сеточных функций  $\{(t_i, \tilde{x}_i)\}$ ,  $\{(t_i, \tilde{y}_i)\}$  (3), полученные методом Рунге–Кутты. □

## 5 Заключение

В данной статье были обобщены известные методы применения вейвлетов Хаара к приближенному решению линейных интегральных и дифференциальных уравнений. Эти методы получаются из представленных здесь при  $n = 0$ , что и соответствует вейвлетам Хаара. В отличие от вейвлетов Хаара, где приближения решения интегрального уравнения получаются кусочно-постоянными, а приближения решения дифференциального уравнения принадлежат классу гладкости  $C^{k-1}$ , где  $k$  — порядок уравнения, использование сплайн-вейвлет дает возможность строить приближения любого класса гладкости  $C^n$ .

## Литература

1. Lepik Ü. Application of the Haar wavelet transform to solving integral and differential equations // Proc. Est. Acad. Sci. Ph., 2007. Vol. 56. P. 28–46.
2. Блатов И. А., Рогова Н. В. Полуортгональные сплайновые вейвлеты и метод Галеркина численного моде-

- лирования тонкопроволочных антен // Вычисл. матем. и матем. физ., 2013. Т. 53. № 5. С. 727–736.
3. Lepik Ü. Numerical solution of differential equations using Haar wavelets // *Math. Comput. Simulat.*, 2005. Vol. 68. P. 127–143.
  4. Lepik Ü. Numerical solution of evolution equations by the Haar wavelet method // *Appl. Math. Comput.*, 2007. Vol. 185. P. 695–704.
  5. Lepik Ü. Haar wavelet method for solving higher order differential equations // *Int. J. Math. Comput.*, 2008. Vol. 1. No. 8. P. 84–94.
  6. Lepik Ü., Hein H. Haar wavelets with applications. — Berlin: Springer, 2014. 207 p.
  7. Finkelstein A., Salesin D. H. Multiresolution curves // *SIGGRAPH Proceedings*. — New York, NY, USA: ACM, 1994. P. 261–268.
  8. Frazier M. W. An introduction to wavelets through linear algebra. — New York, NY, USA: Springer, 1999. 503 p.
  9. Chui Ch. K. An introduction to wavelets. — Boston, MA, USA: Academic Press, 1991. 412 p.
  10. Bityukov Yu. I., Akmaeva V. N. The use of wavelets in the mathematical and computer modelling of manufacture of the complex-shaped shells made of composite materials // *Bull. South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2016. Vol. 9. No. 3. P. 5–16.
  11. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. — М.: Физматлит, 2005. 612 с.
  12. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. 744 с.

Поступила в редакцию 21.03.17

---

---

## THE USE OF WAVELETS FOR THE CALCULATION OF LINEAR CONTROL SYSTEMS WITH LUMPED PARAMETERS

Yu. I. Bityukov and E. N. Platonov

Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Highway, Moscow 125993, Russian Federation

**Abstract:** In many disciplines, problems appear which can be formulated with the aid of differential or integral equations. In simpler cases, such equations can be solved analytically, but for more complicated cases, numerical procedures are needed. In recent times, the wavelet-based methods have gained great popularity, where different wavelet families such as Daubechies, Coiflet, etc. wavelets are applied. A shortcoming of these wavelets is that they do not have an analytic expression. For this reason, differentiation and integration of these wavelets are very complicated. The paper presents algorithms for the numerical solution of linear integral and differential equations based on spline wavelets on the interval. The algorithms generalize the well-known methods based on Haar wavelets, which are a particular case of spline wavelets. The results presented can be applied for the analysis of linear systems with lumped parameters.

**Keywords:** spline wavelet; differential equation; integral equation

**DOI:** 10.14357/19922264170412

### Acknowledgments

This work is a part of Project No. 2.2461.2017 supported by the Russian Ministry of Education and Science.

### References

1. Lepik, Ü. 2007. Application of the Haar wavelet transform to solving integral and differential equations. *Proc. Est. Acad. Sci. Ph.* 56:28–46.
2. Blatov, I. A., and N. V. Rogova. 2013. Application of semi-orthogonal spline wavelets and Galerkin method to the numerical simulation of thin wire antennas. *Comp. Math. Math. Phys.* 53(5):564–572.
3. Lepik, Ü. 2005. Numerical solution of differential equations using Haar wavelets. *Math. Comput. Simulat.* 68:127–143.
4. Lepik, Ü. 2007. Numerical solution of evolution equations by the Haar wavelet method. *Appl. Math. Comput.* 185:695–704.
5. Lepik, Ü. 2008. Haar wavelet method for solving higher order differential equations. *Int. J. Math. Comput.* 1(8):84–94.
6. Lepik, Ü, and H. Hein. 2014. *Haar wavelets with applications*. Berlin: Springer. 207 p.
7. Finkelstein, A., and D. H. Salesin. 1994. Multiresolution curves. *SIGGRAPH Proceedings*. New York, NY: ACM. 261–268.

8. Frazier, M.W. 1999. *An introduction to wavelets through linear algebra*. New York, NY: Springer. 503 p.
9. Chui, Ch. K. 1991. *An introduction to wavelets*. Boston, MA: Academic Press. 412 p.
10. Bitjukov, Yu. I., and V. N. Akmaeva. 2016. The use of wavelets in the mathematical and computer modelling of manufacture of the complex-shaped shells made of composite materials. *Bull. South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software* 9(3):5–16.
11. Novikov, I. Ya., V. Yu. Protasov, and M. A. Skopina. 2005. *Teoriya vspleskov* [The theory of wavelets]. Moscow: Fizmatlit. 612 p.
12. Kantorovich, L. V., and G. P. Akilov. 1977. *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis]. Moscow: Nauka. 744 p.

*Received March 21, 2017*

## Contributors

**Bitjukov Yuri I.** (b. 1972) — Doctor of Science in technology, associate professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Highway, Moscow 125993, Russian Federation; yib72@mail.ru

**Platonov Evgeny N.** (b. 1976) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoye Highway, Moscow 125993, Russian Federation; en.platonov@gmail.com



# ГАММА-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ В БАЙЕСОВСКИХ МОДЕЛЯХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ\*

А. А. Кудрявцев<sup>1</sup>, А. И. Титова<sup>2</sup>

**Аннотация:** Рассматривается байесовский подход к построению моделей теории массового обслуживания и надежности. Байесовский подход является целесообразным при изучении систем, характеристики которых меняются в моменты времени, неизвестные исследователю, или же при изучении больших совокупностей однотипных систем. В рамках этого подхода для классических постановок задач предполагается, что основные параметры системы не являются заданными, но при этом известны их априорные распределения. За счет рандомизации параметров системы различные ее характеристики, например коэффициент загрузки, также становятся случайными. В работе вводится понятие гамма-экспоненциальной функции, приводятся ее свойства, а также конкретные результаты для вероятностных характеристик коэффициента загрузки и вероятности «непотери» вызова в случае, когда в качестве пары априорных распределений параметров системы  $M/M/1/0$  рассматриваются экспоненциальное распределение и распределение Вейбулла.

**Ключевые слова:** байесовский подход; системы массового обслуживания; надежность; смешанные распределения; распределение Вейбулла; экспоненциальное распределение; гамма-экспоненциальная функция

**DOI:** 10.14357/19922264170413

## 1 Введение

Зачастую при описании математических моделей функционирования различных объектов их жизненный цикл зависит от параметров, «способствующих» и «препятствующих» функционированию. В моделях структур и систем массового обслуживания к параметрам, «способствующим» функционированию, можно отнести интенсивность обслуживания запросов, а к параметрам, «препятствующим» функционированию, — интенсивность входящего потока требований. При этом нетрудно заметить, что для исследования результатов работы системы важны не столько значения параметров, сколько их соотношение.

Далее будет рассмотрена система массового обслуживания  $M/M/1/0$ , одним из основных показателей которой является ее коэффициент загрузки  $\rho$ . Значение коэффициента загрузки определяется как отношение параметра входящего потока  $\lambda$  к параметру обслуживания  $\mu$ . От величины  $\rho$  зависят многие характеристики разнообразных систем массового обслуживания, в том числе вероятность «непотери» вызова  $\pi = \mu/(\lambda + \mu) = 1/(1 + \rho)$ .

В рамках байесовского подхода к постановкам классических задач массового обслуживания и надежности предполагается, что конкретные значе-

ния параметров  $\lambda$  и  $\mu$  неизвестны, однако имеется информация об их априорных распределениях [1].

Зачастую в байесовских постановках задач массового обслуживания результаты описываются в терминах специальных функций, например в терминах бета-функции и интегральной показательной функции при рассмотрении общего эрланговского случая [2]. При рассмотрении общего бета-распределения [3] или же бета-равномерного [4] распределения параметров в байесовской модели рекуррентного роста надежности результаты выражаются через обобщенную гипергеометрическую функцию.

В ходе исследований, касающихся вероятностных характеристик коэффициента загрузки  $\rho$  и вероятности «непотери» вызова  $\pi$  в случае, когда в качестве пары априорных распределений параметров системы  $\lambda$  и  $\mu$  рассматриваются экспоненциальное распределение и распределение Вейбулла, были получены результаты, не выражающиеся в терминах элементарных функций. В связи с этим предлагается рассмотреть новую специальную функцию, упоминаний об аналитическом виде и свойствах которой не было обнаружено в классических книгах, посвященных специальным функциям (см., например, [5–7]).

\*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 17-07-00577).

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, nubigena@mail.ru

<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, onkelskroot@gmail.com

## 2 Основные результаты

Введем следующие обозначения. Через  $M(\theta)$  обозначим экспоненциальное распределение с параметром  $\theta > 0$ , а через  $W(p, \alpha)$  — распределение Вейбулла с плотностью  $w_{p,\alpha}(x)$ , имеющей вид:

$$w_{p,\alpha}(x) = \frac{px^{p-1}e^{-(x/\alpha)^p}}{\alpha^p}, \quad x > 0, p > 0, \alpha > 0.$$

Назовем функцию вида

$$\text{Ge}_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Gamma(\alpha k + \beta), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0, \beta > 0,$$

гамма-экспоненциальной функцией.

**Теорема 1.** Гамма-экспоненциальная функция обладает следующими свойствами:

1.  $\text{Ge}_{\alpha,\beta}(x)$  сходится абсолютно на всей прямой при  $0 \leq \alpha < 1, \beta > 0$  и на интервале  $(-1, 1)$  при  $\alpha = 1, \beta > 0$ ; сходится условно в точке  $x = -1$  при  $\alpha = 1, 0 < \beta < 1$ ; сходится только в точке  $x = 0$  при  $\alpha > 1, \beta > 0$ .
2.  $\text{Ge}_{\alpha,\beta}(x)$  непрерывна в области сходимости.
3.  $\text{Ge}_{1,n+1}(x) = (x^n/(1-x))_x^{(n)}, |x| < 1$ . В частности,  $\text{Ge}_{1,1}(x) = 1/(1-x)$  и  $\text{Ge}_{1,2}(x) = 1/(1-x)^2, |x| < 1$ .
4.  $\text{Ge}_{\alpha,\beta}^{(n)}(x) = \text{Ge}_{\alpha,\alpha n + \beta}(x)$  в области сходимости.
5.  $\text{Ge}_{\alpha,\beta}(0) = \Gamma(\beta), \alpha \geq 0, \beta > 0$ .
6.  $\text{Ge}_{0,\beta}(x) = \Gamma(\beta)e^x, x \in \mathbb{R}, \beta > 0$ .
7.  $\text{Ge}_{\alpha,1}(x) = 1 + \alpha x \text{Ge}_{\alpha,\alpha}(x), x \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ .
8.  $\text{Ge}_{\alpha,\beta}(x) = \Gamma(\beta - 1) + \alpha x \text{Ge}_{\alpha,\alpha + \beta - 1}(x) + (\beta - 1) \text{Ge}_{\alpha,\beta - 1}(x), x \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0, \beta > 1$ .
9.  $\text{Ge}_{q,q+1}(-x^q) = \text{Ge}_{1/q,1/q+1}(-1/x)/(qx^{q+1}), x > 0, q > 1$ .
10.  $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha^k/k!) \text{Ge}_{1/p,(k+p)/p}(-\alpha) = 1, \alpha > 0, p > 1$ .

**Доказательство.** Свойство 1 следует из соотношения (6.1.46) в [7]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n + \alpha)n^{\beta - \alpha}}{\Gamma(n + \beta)} = 1,$$

формулы Даламбера и признака Лейбница. Свойства 3–8 проверяются непосредственно. Свойство 9 следует из соотношения:

$$\begin{aligned} \text{Ge}_{q,q+1}(-x^q) &= \int_0^{\infty} e^{-(xt)^q} t^q e^{-t} dt = \\ &= \frac{1}{qx^{q+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1/x)^k}{k!} \int_0^{\infty} z^{(k+1)/q} e^{-z} dz. \end{aligned}$$

Для обоснования свойства 10 достаточно рассмотреть случайную величину  $N$ , имеющую смешанное пуассоновское распределение со структурным распределением Вейбулла, для которой справедливо:

$$\begin{aligned} P(N = k) &= \frac{p}{\alpha^p k!} \int_0^{\infty} e^{-\lambda - (\lambda/\alpha)^p} \lambda^{k+p-1} d\lambda = \\ &= \frac{\alpha^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{n!} \int_0^{\infty} t^{(n+k)/p} e^{-t} dt = \\ &= \frac{\alpha^k}{k!} \text{Ge}_{1/p,(k+p)/p}(-\alpha). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Приведем два утверждения, в которых параметры входящего потока  $\lambda$  и обслуживания  $\mu$  в модели  $M/M/1/0$  имеют экспоненциальное распределение и распределение Вейбулла.

**Теорема 2.** Пусть параметр входящего потока  $\lambda$  имеет экспоненциальное распределение  $M(\theta), \theta > 0$ , а параметр обслуживания  $\mu$  имеет распределение Вейбулла  $W(p, \alpha), p > 1, \alpha > 0$ , причем  $\lambda$  и  $\mu$  независимы. Тогда при  $x > 0$  функция распределения, плотность и моменты коэффициента загрузки  $\rho$  имеют вид:

$$\begin{aligned} F_{\rho}(x) &= 1 - \text{Ge}_{1/p,1}(-\theta\alpha x); \\ f_{\rho}(x) &= \theta\alpha \text{Ge}_{1/p,1/p+1}(-\theta\alpha x); \\ E\rho^n &= \frac{n!}{(\theta\alpha)^n} \Gamma\left(1 - \frac{n}{p}\right), \quad p > n, \end{aligned}$$

а функция распределения и плотность вероятности «непотери» вызова  $\pi$  при  $x \in (0, 1)$  определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} F_{\pi}(x) &= \text{Ge}_{1/p,1}\left(-\frac{\theta\alpha(1-x)}{x}\right); \\ f_{\pi}(x) &= \frac{\theta\alpha}{x^2} \text{Ge}_{1/p,1/p+1}\left(-\frac{\theta\alpha(1-x)}{x}\right). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Заметим, что при  $x > 0$

$$\begin{aligned} F_{\rho}(x) &= \int_0^{\infty} \frac{p}{\alpha} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{p-1} e^{-(u/\alpha)^p} (1 - e^{-ux\theta}) du = \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(-\theta x)^k}{k!} u^k e^{-(u/\alpha)^p} d\left(\frac{u}{\alpha}\right)^p = \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(-\theta x)^k}{k!} (\alpha t^{1/p})^k e^{-t} dt = \\ &= 1 - \text{Ge}_{1/p,1}(-\theta\alpha x), \end{aligned}$$

откуда, воспользовавшись свойством 4 теоремы 1, получаем выражение для  $f_\rho(x)$ .

Вычислим момент  $n$ -го порядка для коэффициента загрузки. Имеем:

$$\begin{aligned} E \rho^n &= \int_0^\infty x^n \theta \alpha \text{Ge}_{1/p, 1/p+1}(-\theta \alpha x) dx = \\ &= \theta \alpha \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\{-\theta \alpha t^{1/p} x\} t^{1/p} e^{-t} x^n dt dx = \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(\theta \alpha)^n t^{n/p}} \times \\ &\times \int_0^\infty \exp\{-\theta \alpha t^{1/p} x\} (\theta \alpha t^{1/p} x)^n d(\theta \alpha t^{1/p} x) dt = \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{(\theta \alpha)^n} \int_0^\infty e^{-t} t^{-n/p} dt = \frac{n!}{(\theta \alpha)^n} \Gamma\left(1 - \frac{n}{p}\right), \\ & \qquad \qquad \qquad p > n. \end{aligned}$$

Теперь получим функцию распределения для вероятности «непотери» вызова  $\pi$ . Имеем:

$$\begin{aligned} F_\pi(x) &= 1 - P\left(\rho < \frac{1-x}{x}\right) = \\ &= \text{Ge}_{1/p, 1}\left(-\frac{\theta \alpha (1-x)}{x}\right), \quad x \in (0, 1), \end{aligned}$$

откуда, воспользовавшись свойством 4 теоремы 1, получаем выражение для  $f_\pi(x)$ .

Теорема доказана.

**Теорема 3.** Пусть параметр входящего потока  $\lambda$  имеет распределение Вейбулла  $W(q, \theta)$ ,  $0 < q < 1$ ,  $\theta > 0$ , а параметр обслуживания  $\mu$  имеет экспоненциальное распределение  $M(\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ , причем  $\lambda$  и  $\mu$  независимы. Тогда при  $x > 0$  функция распределения, плотность и математическое ожидание коэффициента загрузки  $\rho$  имеют вид:

$$\begin{aligned} F_\rho(x) &= 1 - \text{Ge}_{q, 1}\left(-\frac{x^q}{(\alpha \theta)^q}\right); \\ f_\rho(x) &= \frac{q x^{q-1}}{(\theta \alpha)^q} \text{Ge}_{q, q+1}\left(-\frac{x^q}{(\alpha \theta)^q}\right); \\ E \rho &= (\theta \alpha)^q \Gamma(1 - q), \end{aligned}$$

а функция распределения и плотность вероятности «непотери» вызова  $\pi$  при  $x \in (0, 1)$  определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} F_\pi(x) &= \text{Ge}_{q, 1}\left(-\frac{(1-x)^q}{(\alpha \theta x)^q}\right); \\ f_\pi(x) &= \frac{q}{(\theta \alpha)^q x^2} \left(\frac{1-x}{x}\right)^{q-1} \text{Ge}_{q, q+1}\left(-\frac{(1-x)^q}{(\alpha \theta x)^q}\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Для  $x > 0$  имеем:

$$\begin{aligned} F_\rho(x) &= \int_0^\infty \left(1 - e^{-(ux/\theta)^q}\right) \alpha e^{-\alpha u} du = \\ &= 1 - \int_0^\infty e^{-\alpha u} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (ux/\theta)^{qk}}{k!} d(\alpha u) = \\ &= 1 - \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{tx}{\alpha \theta}\right)^{qk} e^{-t} dt = \\ & \qquad \qquad \qquad = 1 - \text{Ge}_{q, 1}\left(-\frac{x^q}{(\alpha \theta)^q}\right). \end{aligned}$$

Выражение для  $f_\rho(x)$  получается из свойства 4 теоремы 1. Найдем  $n$ -й момент коэффициента загрузки. Имеем:

$$\begin{aligned} E \rho^n &= \\ &= \int_0^\infty \frac{q x^{n+q-1}}{(\alpha \theta)^q} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{qk}}{(\alpha \theta)^{qk} k!} \int_0^\infty t^{q(k+1)} e^{-t} dt dx = \\ &= \int_0^\infty \frac{q}{(\theta \alpha)^q} \int_0^\infty \exp\left\{-\left(\frac{tx}{\alpha \theta}\right)^q\right\} x^{q+n-1} t^q e^{-t} dt dx = \\ &= \int_0^\infty \frac{t^q e^{-t}}{(\theta \alpha)^q} \int_0^\infty \exp\left\{-\left(\frac{t}{\alpha \theta}\right)^q z\right\} z^{(n-1)/q+1} dz dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{\theta \alpha}{t}\right)^{n+q-1} \int_0^\infty e^{-u} u^{(n-1)/q+1} du dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{\theta \alpha}{t}\right)^{n+q-1} \Gamma\left(\frac{n-1}{q} + 2\right) dt = \\ & \qquad \qquad \qquad = (\theta \alpha)^{n+q-1} \Gamma\left(\frac{n-1}{q} + 2\right) \Gamma(2 - n - q), \end{aligned}$$

откуда получаем, что существует только момент первого порядка при  $0 < q < 1$ .

Для функции распределения вероятности «непотери» вызова  $\pi$  справедливо:

$$\begin{aligned} F_\pi(x) &= 1 - P\left(\rho < \frac{1-x}{x}\right) = \\ &= \text{Ge}_{q, 1}\left(-\frac{(1-x)^q}{(\alpha \theta x)^q}\right), \quad x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Выражение для  $f_\pi(x)$  получается из соответствующего свойства  $\text{Ge}_{\alpha, \beta}(x)$ .

Теорема доказана.

**Замечание.** В теоремах 2 и 3 при  $p = 1$  и  $q = 1$  распределение Вейбулла  $W(1, \alpha)$  совпадает с экспоненциальным распределением  $M(1/\alpha)$ . Результаты для общего экспоненциального случая были получены ранее в работе [2].

**Следствие.** Из доказанных выше теорем следует, что гамма-экспоненциальная функция также обладает свойствами:

11.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Ge}_{\alpha, 1}(x) = 0, 0 \leq \alpha < 1;$
12.  $\int_0^{+\infty} \text{Ge}_{\alpha, \alpha+1}(-x) dx = 1, 0 < \alpha < 1;$
13.  $\text{Ge}_{\alpha, \alpha+1}(x) > 0, x \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1;$
14.  $\text{Ge}_{\alpha, 1}(x)$  строго монотонна на всей прямой при  $0 \leq \alpha < 1.$

## Литература

1. Кудрявцев А. А., Шоргин С. Я. Байесовские модели в теории массового обслуживания и надежности. — М.: ФИЦ ИУ РАН, 2015. 76 с.
2. Кудрявцев А. А., Шоргин В. С., Шоргин С. Я. Байесовские модели массового обслуживания и надежности: общий эрланговский случай // Информатика и её применения, 2009. Т. 3. Вып. 4. С. 30–34.
3. Жаворонкова Ю. В., Кудрявцев А. А., Шоргин С. Я. Байесовская рекуррентная модель роста надежности: бета-распределение параметров // Информатика и её применения, 2014. Т. 8. Вып. 2. С. 48–54.
4. Жаворонкова Ю. В., Кудрявцев А. А., Шоргин С. Я. Байесовская рекуррентная модель роста надежности: бета-равномерное распределение параметров // Информатика и её применения, 2015. Т. 9. Вып. 1. С. 98–105.
5. Artin E. The gamma function. — New York, NY, USA: Holt, Rinehart and Winston, 1964. 39 p.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. / пер. с англ.— М.: Наука, 1973. 296 с. (Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. Vol. 1. — New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1953. 302 p.)
7. Abramowitz M., Stegun I. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. — New York, NY, USA: Dover Publications, 1974. 1046 p.

Поступила в редакцию 12.06.17

## GAMMA-EXPONENTIAL FUNCTION IN BAYESIAN QUEUEING MODELS

A. A. Kudryavtsev and A. I. Titova

Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

**Abstract:** This paper considers the Bayesian approach to queueing theory and reliability theory. The Bayesian approach is useful for studying systems with alternating characteristics, the changes in which happen at the moments of time unpredictable for a researcher, or large groups of systems of the same type. In the framework of this approach, it is assumed that key parameters of classical systems are not given and only their *a priori* distributions are known. By randomizing the system's parameters, the authors randomize its characteristics, for instance, the traffic intensity. The gamma-exponential function and some of its properties are introduced as well as the results for probability characteristics of the system's traffic intensity and the probability that the claim received by the system will not be lost in the cases of the exponential and Weibull *a priori* distributions of  $M/M/1/0$  system's parameters.

**Keywords:** Bayesian approach; queueing systems; reliability; mixed distribution; Weibull distribution; exponential distribution; gamma-exponential function

**DOI:** 10.14357/19922264170413

## Acknowledgments

The work was partly supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 17-07-00577).

## References

1. Kudryavtsev, A. A., and S. Ya. Shorgin. 2015. *Bayesovskie modeli v teorii massovogo obsluzhivaniya i nadezhnosti* [Bayesian models in mass service and reliability theories]. Moscow: FRC CSC RAS. 76 p.
2. Kudryavtsev, A. A., V. S. Shorgin, and S. Ya. Shorgin. 2009. *Bayesovskie modeli massovogo obsluzhivaniya i nadezh-*

- nosti: obshchiiy erlangovskiy sluchay [Bayesian queueing and reliability models: General Erlang case]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 3(4):30–34.
3. Zhavoronkova, Iu. V., A. A. Kudryavtsev, and S. Ya. Shor-gin. 2014. Bayesovskaya rekurrentnaya model' rosta na-dezhnosti: beta-raspredelenie parametrov [Bayesian re-current model of reliability growth: Beta-distribution of parameters]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 8(2):48–54.
  4. Zhavoronkova, Iu. V., A. A. Kudryavtsev, and S. Ya. Shor-gin. 2015. Bayesovskaya rekurrentnaya model' rosta na-dezhnosti: beta-ravnomernoe raspredelenie parametrov [Bayesian recurrent model of reliability growth: Beta-uniform distribution of parameters]. *Informatika i ee Prime-neniya — Inform. Appl.* 9(1):98–105.
  5. Artin, E. 1964. *The gamma function*. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston. 39 p.
  6. Bateman, H., and A. Erdelyi. 1953. *Higher transcendental functions*. Vol. 1. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co., Inc. 302 p.
  7. Abramowitz, M., and I. Stegun. 1974. *Handbook of math-ematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. New York, NY: Dover Publications, Inc. 1046 p.

Received June 12, 2017

## Contributors

**Kudryavtsev Alexey A.** (b. 1978) — Candidate of Sciences (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; nubigena@mail.ru

**Titova Anastasiia I.** (b. 1995) — student, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; onkelskroot@gmail.com



# STUDY OF THE MMPP/GI/ $\infty$ QUEUEING SYSTEM WITH RANDOM CUSTOMERS' CAPACITIES

E. Lisovskaya<sup>1</sup>, S. Moiseeva<sup>1</sup>, M. Pagano<sup>2</sup>, and V. Potatueva<sup>1</sup>

**Abstract:** A queueing system with an infinite number of servers is considered. Customers arrive in the system according to a Markov Modulated Poisson Process (MMPP). Each customer carries a random quantity of work (capacity of the customer). In this study, service time does not depend on the customers' capacities; the latter are used just to fix some additional features of the system's evolution. It is shown that the joint probability distribution of the customers' number and total capacities in the system is two-dimensional Gaussian under the asymptotic condition of an infinitely growing service time. Simulation results allow determining the applicability area of the asymptotic result.

**Keywords:** infinite-server queueing system; random capacity of customers; Markov Modulated Poisson Process

**DOI:** 10.14357/19922264170414

## 1 Introduction

Queueing systems represent a powerful mathematical tool for investigating the performance of a wide variety of real-life systems, ranging from telecommunication networks to financial markets, from computer architectures to supply chain management and airplane traffic control, just to cite a few. Analytical tractability of the corresponding models strongly depends on the nature of the underlying processes (Poisson arrivals have many nice features that strongly simplify the analysis) and on the system geometry.

Although physical resources are always finite, quite often it is easier to study queueing systems in which the corresponding parameters assume infinite values. For instance, the overflow probability is often used as an upper bound for the loss probability in finite-buffer queues and, indeed, asymptotic results are available even for strongly non-Markovian systems [1]. Moreover, infinite-server queueing systems may be applicable in case of models with a limited number of server devices as described in [2].

In this work, an infinite-server queueing system, fed by non-Poisson arrivals with random customers' capacities, is considered. Queues with random customers' capacities are useful for analysis and design issues in high-performance computer and communication systems, in which service time and customer volume are the independent quantities (see [3, 4] and references therein). For instance, in [3], performance analysis of LTE (Long Term Evolution) networks is carried out

in terms of flow-level dynamics and the amount of required radio resources does not depend on the duration of the flow. Such queues are also important in modeling devices, where it is necessary to calculate a sufficient volume of buffer for data storing [5, 6]. The results for single-server queues with limited buffer and LIFO (last in, first out) service discipline were presented in [7], where algorithms for the calculation of stationary characteristics were derived.

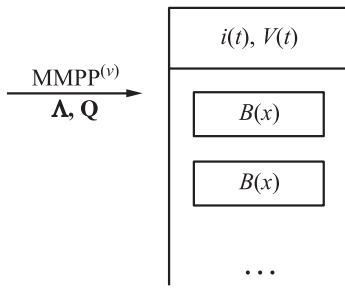
A new trend in the study of queueing systems is the analysis of the systems with non-Poisson arrivals and nonexponential service time. So, in the works [2, 8–11], queues with renewal arrivals, Markovian Arrival processes (MAP), and MMPP are studied under various asymptotic conditions. The main contribution of this paper consists in extending such analysis, focusing on the properties of the bidimensional process describing the number of customers and the total capacity in the system when an infinite-server queue is fed by MMPP arrivals with random capacities and nonexponential service time distribution.

## 2 Mathematical Model

Consider a queue with infinite number of servers (Fig. 1) and assume that customers arrive according to an MMPP. The input process is defined by its generator matrix  $\mathbf{Q} = \|q_{ij}\|$  of size  $K \times K$  and the conditional rates  $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ , typically composed into the diagonal matrix  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_K\}$ . Denote the underlying

<sup>1</sup>Tomsk State University, 36 Lenin ave., Tomsk 634050, Russian Federation

<sup>2</sup>University of Pisa, 16 Via Caruso, Pisa 56122, Italy



**Figure 1** Queue MMPP/GI/∞ with random customers' capacities

Markov chain of the MMPP as  $k(t) \in 1, 2, \dots, K$ . Let each customer has some random capacity  $v > 0$  with distribution function  $G(y)$ . An arriving customer instantly occupies a server in the system and its service time has distribution function  $B(x)$ ; when the service is completed, the customer leaves the system. Customers' capacities and service times are mutually independent and do not depend on the epochs of customers' arrivals.

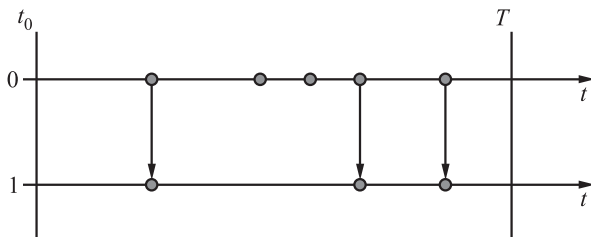
Denote by  $i(t)$  and  $V(t)$  the number of customers in the system at time  $t$  and their total capacity, respectively. Let us obtain the probabilistic characteristics of two-dimensional process  $\{i(t), V(t)\}$ . This process is not Markovian; therefore, the dynamic screening method has been used for its investigation.

Consider two time axes that are numbered as 0 and 1 (Fig. 2). Let axis 0 shows the epochs of customers' arrivals, while axis 1 corresponds to the screened process.

Let us introduce a function  $S(t)$  (dynamic probability) that satisfies the condition  $0 \leq S(t) \leq 1$ . Let us assume that a customer, arriving in the system at time  $t$ , is screened to axis 1 with probability  $S(t)$ , and not screened with probability  $1 - S(t)$ .

Let the system be empty at moment  $t_0$  and let us fix some arbitrary moment  $T$  in the future.  $S(t)$  represents the probability that a customer arriving at time  $t$  will be serviced in the system by the moment  $T$ . It is easy to show [11] that  $S(t) = 1 - B(T - t)$  for  $t_0 \leq t \leq T$ .

Denote by  $n(t)$  and  $W(t)$  the number of arrivals screened before the moment  $t$  on axis 1 and their total



**Figure 2** Screening of the customers' arrivals

capacity, respectively. As it is shown in [9], the probability distribution of the number of customers in the system at the moment  $T$  coincides with the probability distribution of the number of screened arrivals on the axis:

$$P\{i(T) = m\} = P\{n(T) = m\}$$

for all  $m = 0, 1, 2, \dots$ . It is easy to prove the same property for the extended process  $\{i(t), V(t)\}$ :

$$P\{i(T) = m, V(T) < z\} = P\{n(T) = m, W(T) < z\} \quad (1)$$

for all  $m = 0, 1, 2, \dots$  and  $z \geq 0$ . Let us use Eqs. (1) for the investigation of the process  $\{i(t), V(t)\}$  via the analysis of the process  $\{n(t), W(t)\}$ .

### 3 Kolmogorov Differential Equations

Let us consider the three-dimensional Markovian process  $\{k(t), n(t), W(t)\}$ . Denoting the probability distribution of this process by  $P(k, n, w, t) = P\{k(t) = k, n(t) = n, W(t) < w\}$  and taking into account the formula of total probability, one can write the following system of Kolmogorov differential equations:

$$\frac{\partial P(k, n, w, t)}{\partial t} = \lambda_k S(t) \left[ \int_0^z P(k, n-1, w-y, t) dG(y) - P(k, n, w, t) \right] + \sum_v P(v, n, w, t) q_{v,k}$$

for  $k = 1, \dots, K; n = 0, 1, 2, \dots; w > 0$ .

Let us introduce the partial characteristic function:

$$h(k, u_1, u_2, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ju_1 n} \int_0^{\infty} e^{ju_2 w} P(k, n, dw, t)$$

where  $j = \sqrt{-1}$  is the imaginary unit. Then, one can write the following equations:

$$\frac{\partial h(k, u_1, u_2, t)}{\partial t} = h(k, u_1, u_2, t) \lambda_k S(t) (e^{ju_1} G^*(u_2) - 1) + \sum_v h(v, u_1, u_2, t) q_{v,k}$$

for  $k = 1, \dots, K$  where  $G^*(u) = \int_0^{\infty} e^{juy} dG(y)$ .

Let us rewrite this system in the matrix form:

$$\frac{\partial \mathbf{h}(u_1, u_2, t)}{\partial t} = \mathbf{h}(u_1, u_2, t) [\mathbf{\Lambda} S(t) (e^{ju_1} G^*(u_2) - 1) + \mathbf{Q}] \quad (2)$$

with the initial condition

$$\mathbf{h}(u_1, u_2, t_0) = \mathbf{r} \quad (3)$$

where

$$\mathbf{h}(u_1, u_2, t) = [h(1, u_1, u_2, t), \dots, h(K, u_1, u_2, t)]$$

and  $\mathbf{r} = [r(1), \dots, r(K)]$  represents the stationary distribution of the underlying Markov chain, i. e., vector  $\mathbf{r}$  satisfies the following linear system:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}\mathbf{Q} &= \mathbf{0}; \\ \mathbf{r}\mathbf{e} &= \mathbf{1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

where  $\mathbf{e}$  is the column vector with all entries equal to 1.

## 4 Asymptotic Analysis

In general, the exact solution of Equation (2) is not available, but it may be found under asymptotic conditions. In this paper, the case of infinitely growing service time is considered.

Denote by

$$b_1 = \int_0^{\infty} x dB(x) = \int_0^{\infty} (1 - B(x)) dx$$

the mean service time; then, the asymptotic condition is  $b_1 \rightarrow \infty$ .

Let us solve Problem (2)–(3) under such asymptotic condition and we obtain approximate solutions with different order of accuracy, named as “first-order asymptotic”  $\mathbf{h}(u_1, u_2, t) \approx \mathbf{h}^{(1)}(u_1, u_2, t)$  and “second-order asymptotic”  $\mathbf{h}(u_1, u_2, t) \approx \mathbf{h}^{(2)}(u_1, u_2, t)$ .

### 4.1 First-order asymptotic analysis

Let us formulate and prove the following statement.

**Lemma.** *The first-order asymptotic characteristic function of the probability distribution of the process  $\{k(t), n(t), W(t)\}$  has the form:*

$$\mathbf{h}^{(1)}(u_1, u_2, t) = \mathbf{r} \exp \left\{ (ju_1\kappa_1 + ju_2\kappa_1 a_1) \int_{t_0}^t S(v) dv \right\}$$

where  $\kappa_1 = \mathbf{r}\mathbf{\Lambda}\mathbf{e}$  and  $a_1 = \int_0^{\infty} y dG(y)$  is the mean customer capacity.

**Proof.** By performing the substitutions

$$\varepsilon = \frac{1}{b_1}; \quad \varepsilon t = \tau; \quad \varepsilon t_0 = \tau_0;$$

$$u_1 = \varepsilon x_1; \quad u_2 = \varepsilon x_2; \quad S(t) = S_1(\tau);$$

$$\mathbf{h}(u_1, u_2, t) = \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon)$$

in expressions (2) and (3), one obtains

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} \\ &= \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) [\mathbf{\Lambda} S_1(\tau) (e^{j\varepsilon x_1} G^*(\varepsilon x_2) - 1) + \mathbf{Q}] \end{aligned} \quad (5)$$

with the initial condition

$$\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau_0, \varepsilon) = \mathbf{r}. \quad (6)$$

Let us find the asymptotic solution of Problem (5)–(6)  $\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon)$  in two steps.

*Step 1.* Let  $\varepsilon \rightarrow 0$  in (5)–(6); then, one obtains the following system of equations:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau) \mathbf{Q} &= \mathbf{0}; \\ \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau_0) &= \mathbf{r}. \end{aligned} \right.$$

Taking into account (4), one can conclude that  $\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau)$  can be expressed as

$$\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau) = \mathbf{r} \Phi_1(x_1, x_2, \tau) \quad (7)$$

where  $\Phi_1(x_1, x_2, \tau)$  is some scalar function which satisfies the condition

$$\Phi_1(x_1, x_2, \tau_0) = 1. \quad (8)$$

*Step 2.* Let us multiply (5) by vector  $\mathbf{e}$ , substitute (7), divide the result by  $\varepsilon$ , and perform the asymptotic transition  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Then, taking into account that  $\mathbf{Q}\mathbf{e} = \mathbf{0}$  and  $\mathbf{r}\mathbf{e} = \mathbf{1}$ , one obtains the following differential equation for the function  $\Phi_1(x_1, x_2, \tau)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi_1(x_1, x_2, \tau)}{\partial \tau} \\ &= \Phi_1(x_1, x_2, \tau) S_1(\tau) (jx_1\kappa_1 + jx_2\kappa_1 a_1). \end{aligned} \quad (9)$$

The solution of Problem (8)–(9) is as follows:

$$\Phi_1(x_1, x_2, \tau) = \exp \left\{ (jx_1\kappa_1 + jx_2\kappa_1 a_1) \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(v) dv \right\}.$$

Substituting this expression into (7), one obtains

$$\mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau) = \mathbf{r} \exp \left\{ (jx_1\kappa_1 + jx_2\kappa_1 a_1) \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(v) dv \right\}.$$

Therefore, one can write

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(1)}(u_1, u_2, t) &= \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) \approx \mathbf{f}_1(x_1, x_2, \tau) \\ &= \mathbf{r} \exp \left\{ (jx_1\kappa_1 + jx_2\kappa_1 a_1) \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(v) dv \right\} \\ &= \mathbf{r} \exp \left\{ (ju_1\kappa_1 + ju_2\kappa_1 a_1) \int_{t_0}^t S(v) dv \right\}. \end{aligned}$$

Thus, the proof is complete.

### 4.2 Second-order asymptotic analysis

The main result is the following theorem.

**Theorem.** *The second-order asymptotic characteristic function of the probability distribution of the process  $\{k(t), n(t), W(t)\}$  has the form:*

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(2)}(u_1, u_2, t) &= \mathbf{r} \exp \left\{ (ju_1\kappa_1 + ju_2\kappa_1a_1) \int_{t_0}^t S(v) dv \right. \\ &+ \frac{(ju_1)^2}{2} \left( \kappa_1 \int_{t_0}^t S(v) dv + \kappa_2 \int_{t_0}^t S^2(v) dv \right) \\ &+ \frac{(ju_2)^2}{2} \left( \kappa_1a_2 \int_{t_0}^t S(v) dv + \kappa_2a_1^2 \int_{t_0}^t S^2(v) dv \right) \\ &\left. + ju_1ju_2 \left( \kappa_1a_1 \int_{t_0}^t S(v) dv + \kappa_2a_1 \int_{t_0}^t S^2(v) dv \right) \right\} \end{aligned}$$

where  $\kappa_2 = 2\mathbf{g}(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1\mathbf{I})\mathbf{e}$ ;  $a_2 = \int_0^\infty y^2 dG(y)$ ; and the row vector  $\mathbf{g}$  satisfies the linear matrix system

$$\begin{cases} \mathbf{g}\mathbf{Q} = \mathbf{r}(\kappa_1\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}); \\ \mathbf{g}\mathbf{e} = \text{const}. \end{cases}$$

**Proof.** Let  $\mathbf{h}_2(x_1, x_2, t)$  be a vector function that satisfies the equation:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(u_1, u_2, t) &= \mathbf{h}_2(u_1, u_2, t) \\ &\times \exp \left\{ (ju_1\kappa_1 + ju_2\kappa_1a_1) \int_{t_0}^t S(v) dv \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Substituting this expression into (2) and (3), one obtains the following problem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}_2(u_1, u_2, t)}{\partial t} &= \mathbf{h}_2(u_1, u_2, t) \left[ (e^{ju_1}G^*(u_2) - 1)S(t)\mathbf{\Lambda} \right. \\ &\left. - (ju_1\kappa_1 + ju_2\kappa_1a_1)S(t)\mathbf{I} + \mathbf{Q} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

with the initial condition

$$\mathbf{h}_2(u_1, u_2, t_0) = \mathbf{r} \quad (12)$$

where  $\mathbf{I}$  is the identity matrix.

Let us make the substitutions:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^2 &= \frac{1}{b_1}; \quad \varepsilon^2 t = \tau; \quad \varepsilon^2 t_0 = \tau_0; \\ u_1 &= \varepsilon x_1; \quad u_2 = \varepsilon x_2; \quad S(t) = S_1(t); \\ \mathbf{h}_2(u_1, u_2, t) &= \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Using these notations, Problem (11)–(12) can be rewritten in the form

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon)}{\partial \tau} &= \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) \left[ \mathbf{\Lambda}S_1(\tau)(e^{j\varepsilon x_1}G^*(\varepsilon x_2) - 1) \right. \\ &\left. - (j\varepsilon\kappa_1x_1 + j\varepsilon\kappa_1x_2a_1)S_1(\tau)\mathbf{I} + \mathbf{Q} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

with the initial condition

$$\mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau_0, \varepsilon) = \mathbf{r}. \quad (15)$$

Let us find the asymptotic solution of this problem  $\mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon)$  in three steps.

*Step 1.* Letting  $\varepsilon \rightarrow 0$  in (14)–(15), one obtains the following system of equations:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau)\mathbf{Q} = \mathbf{0}; \\ \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau_0) = \mathbf{r}. \end{cases}$$

Therefore, taking into account (4), one can write:

$$\mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau) = \mathbf{r}\Phi_2(x_1, x_2, \tau) \quad (16)$$

where  $\Phi_2(x_1, x_2, \tau)$  is some scalar function which satisfies the condition

$$\Phi_2(x_1, x_2, \tau_0) = 1. \quad (17)$$

*Step 2.* Using (16), the function  $\mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau)$  can be represented in the expansion form:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2(x_1, x_2, \tau, \varepsilon) &= \Phi_2(x_1, x_2, \tau) \left[ \mathbf{r} + \mathbf{g}S_1(\tau)(j\varepsilon x_1 + j\varepsilon x_2a_1) \right] \\ &+ \mathbf{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (18)$$

where  $\mathbf{g}$  is the row vector that satisfies the condition  $\mathbf{g}\mathbf{e} = \text{const}$  and  $\mathbf{O}(\varepsilon^2)$  is the row vector of the second-order infinitesimals. Let us use substitution (18) and the expansion

$$e^{j\varepsilon x} = 1 + j\varepsilon x + \mathbf{O}(\varepsilon^2)$$

in Eq. (14). Taking into account (4) and making the transition  $\varepsilon \rightarrow 0$ , one obtains the following matrix equation for the vector  $\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{g}\mathbf{Q} = \mathbf{r}(\kappa_1\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}).$$

*Step 3.* Let us multiply Eq. (14) by vector  $\mathbf{e}$  and use expression (18) and the second-order expansion:

$$e^{j\varepsilon x} = 1 + j\varepsilon x + \frac{(j\varepsilon x)^2}{2} + \mathbf{O}(\varepsilon^3).$$

After some transformations, using the notation

$$\kappa_2 = 2\mathbf{g}(\mathbf{\Lambda} - \kappa_1\mathbf{I})\mathbf{e},$$

one obtains the following differential equation for the function  $\Phi_2(x_1, x_2, \tau)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi_2(x_1, x_2, \tau)}{\partial \tau} \\ &= \Phi_2(x_1, x_2, \tau) \left[ \frac{(jx_1)^2}{2} (\kappa_1 S_1(\tau) + \kappa_2 S_1^2(\tau)) \right. \\ & \quad + \frac{(jx_2)^2}{2} (\kappa_1 a_2 S_1(\tau) + \kappa_2 a_1^2 S_1^2(\tau)) \\ & \quad \left. + jx_1 jx_2 (\kappa_1 a_1 S_1(\tau) + \kappa_2 a_1 S_1^2(\tau)) \right]. \end{aligned}$$

The solution of this equation with initial condition (17) is as follows:

$$\begin{aligned} & \Phi_2(x_1, x_2, \tau) \\ &= \exp \left\{ \frac{(jx_1)^2}{2} \left( \kappa_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(v) dv + \kappa_2 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1^2(v) dv \right) \right. \\ & \quad + \frac{(jx_2)^2}{2} \left( \kappa_1 a_2 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(v) dv + \kappa_2 a_1^2 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1^2(v) dv \right) \\ & \quad \left. + jx_1 jx_2 \left( \kappa_1 a_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1(v) dv + \kappa_2 a_1 \int_{\tau_0}^{\tau} S_1^2(v) dv \right) \right\}. \end{aligned}$$

Substituting this expression in formula (16) and performing the substitutions that are inverse to (13) and (10), one obtains

$$\begin{aligned} & \mathbf{h}^{(2)}(u_1, u_2, t) \\ &= \mathbf{r} \exp \left\{ (ju_1 \kappa_1 + ju_2 \kappa_1 a_1) \int_{t_0}^t S(v) dv \right. \\ & \quad + \frac{(ju_1)^2}{2} \left( \kappa_1 \int_{t_0}^t S(v) dv + \kappa_2 \int_{t_0}^t S^2(v) dv \right) \\ & \quad + \frac{(ju_2)^2}{2} \left( \kappa_1 a_2 \int_{t_0}^t S(v) dv + \kappa_2 a_1^2 \int_{t_0}^t S^2(v) dv \right) \\ & \quad \left. + ju_1 ju_2 \left( \kappa_1 a_1 \int_{t_0}^t S(v) dv + \kappa_2 a_1 \int_{t_0}^t S^2(v) dv \right) \right\} \end{aligned}$$

for the asymptotic characteristic function of the process  $\{k(t), n(t), W(t)\}$ . The proof is complete.

**Corollary.** Assuming  $t = T$  and  $t_0 \rightarrow -\infty$  and using Eqs. (1), one obtains the steady-state characteristic function of the process under study  $\{i(t), V(t)\}$ :

$$\begin{aligned} h(u_1, u_2) &= \exp \{ (ju_1 \kappa_1 b_1 + ju_2 \kappa_1 a_1 b_1) \\ & \quad + \frac{(ju_1)^2}{2} (\kappa_1 b_1 + \kappa_2 b_2) + \frac{(ju_2)^2}{2} (\kappa_1 a_2 b_1 + \kappa_2 a_1^2 b_2) \\ & \quad + ju_1 ju_2 (\kappa_1 a_1 b_1 + \kappa_2 a_1 b_2) \} \quad (19) \end{aligned}$$

where

$$b_1 = \int_0^{\infty} (1 - B(v)) dv; \quad b_2 = \int_0^{\infty} (1 - B(v))^2 dv.$$

From the form of the characteristic function (19), it is clear that the probability distribution of the two-dimensional process  $\{i(t), V(t)\}$  is asymptotically Gaussian with vector of means

$$\mathbf{a} = [\kappa_1 b_1 \quad \kappa_1 a_1 b_1]$$

and covariance matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & K_{12} \\ K_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \kappa_1 b_1 + \kappa_2 b_2 & \kappa_1 a_1 b_1 + \kappa_2 a_1 b_2 \\ \kappa_1 a_1 b_1 + \kappa_2 a_1 b_2 & \kappa_1 a_2 b_1 + \kappa_2 a_1^2 b_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Therefore, the correlation coefficient is given by

$$r = \frac{K_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\kappa_1 a_1 b_1 + \kappa_2 a_1 b_2}{\sqrt{\kappa_1 b_1 + \kappa_2 b_2} \sqrt{\kappa_1 a_2 b_1 + \kappa_2 a_1^2 b_2}}.$$

## 5 Numerical Example

Result (19) is obtained under the asymptotic condition  $b_1 \rightarrow \infty$ . Therefore, it may be used just as an approximation when  $b_1$  is large enough. To test its practical applicability, the present authors considered several numerical examples, varying all the system parameters (including the distributions of the service time and of the customer capacity). Since all the different simulation sets led to similar results, for sake of brevity, in the following, just one of them is discussed in detail. In particular, let us assume that the input MMPP is characterized by the matrices:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & -0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & -0.8 \end{bmatrix}$$

and

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}.$$



**Table 1** Kolmogorov distances between simulation results and asymptotic values for the number of customers in the system

$N$	$\Delta$
1	0.265
10	0.039
15	0.032
20	<b>0.027</b>
25	<b>0.025</b>
50	<b>0.017</b>
100	<b>0.012</b>

**Table 2** Kolmogorov distances between simulation results and asymptotic values for the total capacity in the system

$N$	$\Delta$
1	0.355
10	0.033
15	<b>0.025</b>
20	<b>0.021</b>
25	<b>0.019</b>
50	<b>0.013</b>
100	<b>0.010</b>

Hence, the fundamental rate of arrivals is  $\kappa_1 = \mathbf{r}\mathbf{\Lambda e} = 1$  customers per time unit. Let us also assume that customers' capacities have uniform distribution in the range  $[0; 1]$  and service time has gamma distribution with shape and inverse scale parameters  $\alpha = 1.5$  and  $\beta = \alpha/N$ , respectively. So, when  $N \rightarrow \infty$ , one obtains the asymptotic condition of an infinite growing service time ( $b_1 = \alpha/\beta = N \rightarrow \infty$ ).

The goal is to find a lower bound of parameter  $N$  for the applicability of the approximation (19). To this aim, series of simulation experiments have been carried out for increasing values of  $N$  and the asymptotic distributions have been compared with the empiric ones by using the Kolmogorov distance [12, 13]

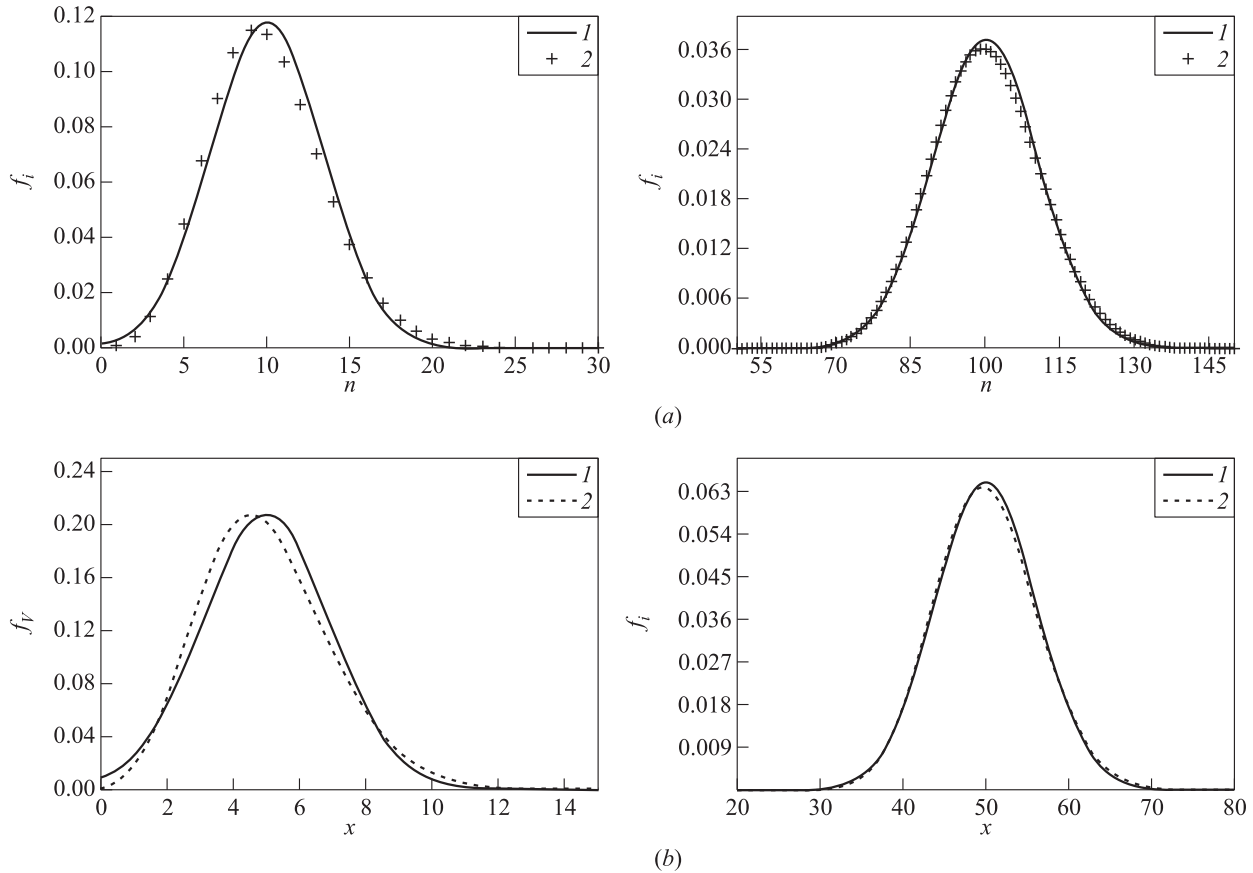
$$\Delta = \sup_x |F(x) - A(x)|$$

as an accuracy measure. Here,  $F(x)$  is the cumulative distribution function built on the basis of simulation results and  $A(x)$  is the Gaussian approximation based on (19).

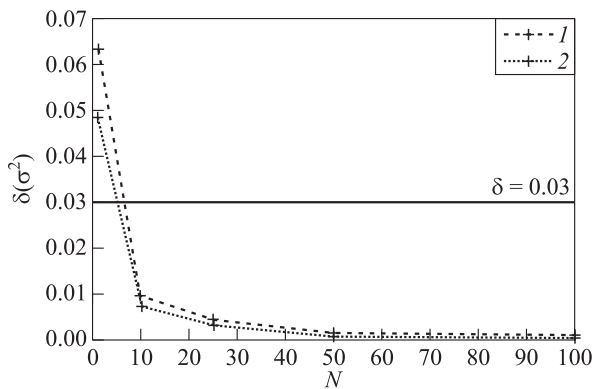
Let us consider the marginal distributions of the customers' number and the total capacity in the system.

In the first case, the asymptotic values of mean and variance are equal to  $N$  and  $1.144N$ , respectively, and the corresponding values of the Kolmogorov distance for increasing values of parameter  $N$  are presented in Table 1. Similarly, for the total capacity in the system, mean and variance are equal to  $0.5N$  and  $0.369N$ , respectively, and Table 2 shows the Kolmogorov distance.

One can notice that the asymptotic results become more accurate when the parameter  $N$  increases. Fig-



**Figure 3** Distributions of the number of customers (a) and of the total capacity (b) for different values of  $N$ : left column —  $N = 10$ ; right column —  $N = 100$ ; 1 — theoretical results; and 2 — simulation



**Figure 4** Relative error for the variance of the number of customers  $i(t)$  (1) and the total capacity  $V(t)$  (2)

ure 3 compares the asymptotic approximations with the empirical results for the number of customers and the total capacity in the system.

As typically done in the literature [12], let us suppose that an approximation is applicable if its Kolmogorov distance is less than 0.03. Hence, one can conclude that the asymptotic results are applicable for values of the parameter  $N$  equal to 15 or more (marked by boldface in Tables 1 and 2).

Then, let us compare the asymptotic value of some characteristics of the queueing system with the corresponding empirical characteristics, using the relative error

$$\delta = \frac{|d - a|}{d}$$

where  $d$  denotes the value constructed on the basis of simulation results and  $a$  is obtained from (19).

In more detail, the mean values of the processes  $i(t)$  and  $V(t)$  are very close (with  $\delta < 10^{-5}$  for all  $N$ ) and the relative errors of the variance decreases with  $N$  as shown in Fig. 4.

Finally, Table 3 shows the relative error for the correlation coefficient.

**Table 3** Relative error for the correlation coefficient

$N$	$\delta$
1	<b><math>60 \cdot 10^{-4}</math></b>
10	<b><math>11 \cdot 10^{-4}</math></b>
15	<b><math>7 \cdot 10^{-4}</math></b>
20	<b><math>5 \cdot 10^{-4}</math></b>
25	<b><math>4 \cdot 10^{-4}</math></b>
50	<b><math>1 \cdot 10^{-4}</math></b>
100	<b><math>0.8 \cdot 10^{-4}</math></b>

## 6 Concluding Remarks

In the paper, the queue with MMPP arrivals, infinite number of servers, and nonexponential service time is considered. Moreover, random customers' capacities, independent of their service time, are assumed. The analysis is performed under the asymptotic condition of an infinitely growing service time. It is shown that two-dimensional probability distribution of customers' number and total capacity in the system is two-dimensional Gaussian under this asymptotic condition. Numerical results show that asymptotic results have enough accuracy for the marginal distributions of number of customers and of the total capacity in the system when the service rate exceeds the fundamental rate of arrivals by at least 15 times.

## Acknowledgments

This work is supported by the Russian Foundation for Basic research, project 16-31-00292.

## References

1. Mandjes, M. 2007. *Large deviations of Gaussian queues*. Chichester: Wiley. 340 p.
2. Melikov, A., L. Zadiranova, and A. Moiseev. 2016. Two asymptotic conditions in queue with MMPP arrivals and feedback. *Comm. Com. Inf. Sc.* 678:231–240. doi: 10.1007/978-3-319-51917-3\_21.
3. Naumov, V., K. Samouylov, E. Sopin, and S. Andreev. 2015. Two approaches to analyzing dynamic cellular networks with limited resources. *6th Congress (International) on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops*. St. Petersburg. 485–488. doi: 10.1109/ICUMT.2014.7002149.
4. Morozov, E., L. Potakhina, and O. Tikhonenko. 2016. Regenerative analysis of a system with a random volume of customers. *Comm. Com. Inf. Sc.* 638:261–272. doi: 10.1007/978-3-319-44615-8\_23.
5. Tikhonenko, O. M., and W. Kempa. 2015. Queueing systems with processor sharing and limited memory under control of the AQM mechanism. *Automat. Rem. Contr.* 76(10):1784–1796. doi: 10.1134/S0005117915100069.
6. Naumov, V. A., K. E. Samuilov, and A. K. Samuilov. 2016. On the total amount of resources occupied by serviced customers. *Automat. Rem. Contr.* 77(8):1419–1427.
7. Tikhonenko, O. M. 2010. Queueing system with processor sharing and limited resources. *Automat. Rem. Contr.* 71(5):803–815.
8. Pankratova, E. V., and S. P. Moiseeva. 2014. Queueing system MAP/M/∞ with  $n$  types of customers. *Comm. Com. Inf. Sc.* 487:356–366.
9. Moiseev, A., and A. Nazarov. 2016. Tandem of infinite-server queues with Markovian arrival process. *Comm. Com. Inf. Sc.* 601:323–333. doi: 10.1007/978-3-319-30843-2\_34.

10. Lisovskaya, E., S. Moiseeva, and M. Pagano. 2016. The total capacity of customers in the infinite-server queue with MMPP arrivals. *Comm. Com. Inf. Sc.* 678:110–120. doi: 10.1007/978-3-319-51917-3\_11.
11. Moiseev, A., and A. Nazarov. 2016. Queueing network MAP/(GI/∞)<sup>K</sup> with high-rate arrivals. *Eur. J. Oper. Res.* 254:161–168. doi: 10.1016/j.ejor.2016.04.011.
12. Moiseev, A. N., and M. V. Sinyakov. 2010. Razrabotka ob"ektно-orientirovannoy modeli sistemy imitatsionno-go modelirovaniya protsessov massovogo obsluzhivaniya [Design of object-oriented model for queueing simulation software]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika* [Tomsk State University. J. Control Computer Sci.] 1:89–93.
13. Moiseev, A., A. Demin, V. Dorofeev, and V. Sorokin. 2016. Discrete-event approach to simulation of queueing networks. *Key Eng. Mater.* 685:939–942. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.939.

Received March 16, 2017

## Contributors

**Lisovskaya Ekaterina Yu.** (b. 1992) — PhD student, Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Tomsk State University, 36 Lenin Ave., Tomsk 634050, Russian Federation; ekaterina\_lisovs@mail.ru

**Moiseeva Svetlana P.** (b. 1971) — Doctor of Science in physics and mathematics, associate professor, professor, Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Tomsk State University, 36 Lenin ave., Tomsk 634050, Russian Federation; smoiseeva@mail.ru

**Pagano Michele** (b. 1968) — PhD in electronics engineering, professor, Department of Information Engineering of University of Pisa, 16 Via Caruso, Pisa 56122, Italy; m.pagano@iet.unipi.it

**Potatueva Viktoriya V.** (b. 1993) — Master Degree student, Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Tomsk State University, 36 Lenin Ave., Tomsk 634050, Russian Federation; ve-kusik@mail.ru

---

---

## ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ MMPP/GI/∞ С ТРЕБОВАНИЯМИ СЛУЧАЙНОГО ОБЪЕМА\*

Е. Ю. Лисовская<sup>1</sup>, С. П. Моисеева<sup>2</sup>, М. Пагано<sup>3</sup>, В. В. Потатуева<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Томский государственный университет, ekaterina.lisovs@mail.ru

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Томский государственный университет, smoiseeva@mail.ru

<sup>3</sup>Университет г. Пиза, Италия, m.pagano@iet.unipi.it

<sup>4</sup>Национальный исследовательский Томский государственный университет, ve-kusik@mail.ru

**Аннотация:** Проведено исследование системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов. Заявки поступают в систему в виде марковски-модулированного пуассоновского потока. Каждая заявка несет в себе произвольное количество данных (объем заявки). В этом исследовании время обслуживания не зависит от объема заявок. Показано, что совместное распределение вероятностей числа заявок в системе и их суммарного объема является двумерным гауссовским при асимптотическом условии растущего времени обслуживания. Имитационное моделирование и численные эксперименты позволили определить область применимости асимптотического результата.

**Ключевые слова:** бесконечнолинейная система массового обслуживания; случайный объем заявок; MMPP-поток

**DOI:** 10.14357/19922264170414

## Литература

1. Mandjes M. Large deviations of Gaussian queues. — Chichester: Wiley, 2007. 340 p.
2. Melikov A., Zadiranova L., Moiseev A. Two asymptotic conditions in queue with MMPP arrivals and feedback // *Comm. Com. Inf. Sc.*, 2016. Vol. 678. P. 231–240.
3. Naumov V., Samouylov K., Sopin E., Andreev S. Two approaches to analyzing dynamic cellular networks with limited resources // 6th Congress (International) on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops. — St. Petersburg, 2015. P. 485–488. doi: 10.1007/978-3-319-44615-8\_23.
4. Morozov E., Potakhina L., Tikhonenko O. Regenerative analysis of a system with a random volume of customers // *Comm. Com. Inf. Sc.*, 2016. Vol. 638. P. 261–272. doi: 10.1007/978-3-319-44615-8\_23.

\*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 16-31-00292).

5. Тихоненко О. М., Кемпа В. М. Система с разделением процессора и ограниченным объемом памяти, управляемая механизмом AQM // Автоматика и телемеханика, 2015. № 10. С. 90–105.
6. Наумов В. А., Самуйлов К. Е., Самуйлов А. К. О суммарном объеме ресурсов, занимаемых обслуживаемыми заявками // Автоматика и телемеханика, 2016. № 8. С. 125–132.
7. Тихоненко О. М. Система обслуживания с разделением процессора и ограниченными ресурсами // Queueing systems with processor sharing and limited resources // Автоматика и телемеханика, 2010. № 5. С. 84–98.
8. Pankratova E. V., Moiseeva S. P. Queueing system MAP/M/∞ with  $n$  types of customers // Comm. Com. Inf. Sc., 2014. Vol. 487. P. 356–366.
9. Moiseev A., Nazarov A. Tandem of infinite-server queues with Markovian arrival process // Comm. Com. Inf. Sc., 2016. Vol. 601. P. 323–333. doi: 10.1007/978-3-319-30843-2\_34.
10. Lisovskaya E., Moiseeva S., Pagano M. The total capacity of customers in the infinite-server queue with MMPP arrivals // Comm. Com. Inf. Sc., 2016. Vol. 678. P. 110–120. doi: 10.1007/978-3-319-51917-3\_11.
11. Moiseev A., Nazarov A. Queueing network MAP/(GI/∞)<sup>K</sup> with high-rate arrivals // Eur. J. Oper. Res., 2016. Vol. 254. P. 161–168. doi: 10.1016/j.ejor.2016.04.011.
12. Моисеев А. Н., Сияков М. В. Разработка объектно-ориентированной модели системы имитационного моделирования процессов массового обслуживания // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, 2010. № 1. С. 89–93.
13. Moiseev A., Demin A., Dorofeev V., Sorokin V. Discrete-event approach to simulation of queueing networks // Key Eng. Mater., 2016. Vol. 685. P. 939–942. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.939.

Поступила в редакцию 16.03.2017

## APPROACHES TO ANNOTATION OF DISCOURSE RELATIONS IN LINGUISTIC CORPORA

M. G. Kruzhev<sup>1</sup>

**Abstract:** This paper examines the Supracorpora Database of Connectives (SCDB-Connectives) that is based on data from parallel corpora. The SCDB-Connectives provides structural and semantic annotation of Russian connectives and their translation correspondences in French (and, eventually, in other languages). The SCDB-Connectives annotation approach is compared to the latest developments in the area of annotation of discourse relations — the annotated corpus of discourse relations Penn Discourse Treebank (PDTB) and the proposed standard for annotation of semantic relations ISO 24617-8, some of the important differences are discussed. Penn Discourse Treebank and ISO 24617-8 allow annotating implicit discourse relations as well as explicit ones while SCDB-Connectives only annotates explicit relations, i. e., those expressed by connectives. Furthermore, PDTB and ISO 24617-8 provide a superior framework for annotating text spans for relation arguments, which allows annotating attribution for these arguments, such as source and type of the linked propositions. In addition, ISO 24617-8 specifies argument roles for asymmetrical discourse relations. On the other hand, the principle advantage of the SCDB-Connectives is that it allows annotating both connectives and their translation correspondences in parallel corpora, opening up new possibilities for contrastive studies. The SCDB-Connectives is based on a relational database rather than on the XML format, which helps to manage complex cross-linguistic data efficiently. Benefits of semantic annotation of connectives for both theoretical and practical purposes are also discussed.

**Keywords:** discourse relations; discourse connectives; corpus linguistics; parallel corpora; supracorpora databases

**DOI:** 10.14357/19922264170415

### 1 Introduction

As a part of the project “Logical structure of text: Means for the expression of logical-semantic relations in Russian, French, and Italian from the contrastive perspective” (funded by the Russian Science Foundation, grant No. 16-18-10004), computer-aided semantic and structural annotation of Russian connectives in bilingual parallel corpora of the Russian National Corpus (<http://ruscorpora.ru>) is being performed (Russian–French and French–Russian corpora are mostly used).

For each Russian connective, a corresponding French fragment is annotated in the parallel corpus. Usually, parallel French fragments also include connectives, but in some cases, Russian connectives may correspond to other lexical or grammatical items and occasionally, there is no apparent correspondence in French. These pairs of Russian and French fragments (hereafter referred to as “translation correspondences,” TCs) are annotated by linguistic experts and saved in a dedicated database called The Supracorpora Database of Connectives.

Thus, the SCDB are created as customizable banks of annotated translation correspondences that can be used for contrastive analysis of various linguistic items.

The core SCDB concepts have been described in previous works (see, for example, [1–3]). The goal of this paper is to examine other existing approaches to annotation of connectives and discourse relations in corpora and to compare them to the approaches used in the SCDB-Connectives.

In section 2, existing approaches to annotation of discourse relations are examined. The most prominent of these is the one adopted by the PDTB, a monolingual collection of annotated discourse relations in a corpus of journal articles. The PDTB project proposed a model for annotation of discourse relations that has spawned a number of similar efforts. The proposed standard ISO 24617-8 that was developed in recent years in order to create a common foundation for annotation of discourse relations is also examined.

In section 3, approaches of PDTB and ISO 24617-8 are compared to the methods adopted in the SCDB-Connectives.

<sup>1</sup>Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation



## 2 Existing Approaches to Annotation of Discourse Relations

In recent years, there has been a considerable effort towards computer-aided annotation of complex linguistic items that at the present cannot be reliably annotated by automated annotation procedures (e. g., discourse markers, connectives, relations between textual segments, etc.). Morphological annotation of individual words in corpora is usually implemented automatically (see, for example, [4, p. 34–37]). On the other hand, annotation of complex intertextual entities is often carried out manually. This is due to the fact that no accepted annotation standards exist for many of such entities and, more importantly, that currently such annotation cannot be implemented algorithmically since analysis of such entities often proves to be daunting even for seasoned linguistic researchers.

Penn Discourse Treebank is one of the most prominent projects for annotation of intertextual entities. It is a large-scale collection of annotated discourse relations, both explicit and implicit, found in a million-word corpus of Wall Street Journal articles. Penn Discourse Treebank was first released to the public in 2006 (version PDTB 1.0) and in 2008, a new version of the project was released — PDTB 2.0 [5, 6]. Being the first large-scale project dealing with annotation of discourse relations in texts, during the following years, PDTB served as a reference model for a number of future similar projects.

In PDTB, annotation of discourse relations includes three aspects:

- (1) structure: relation signals (connectives) and arguments are annotated as text spans in the corpus (it is assumed that all discourse relations have exactly two arguments);
- (2) semantics: discourse relations are assigned semantic labels; and
- (3) attribution: discourse properties of relations and their arguments are annotated, including such properties as sources of relation and arguments (writer/another agent), types of the arguments (assertion/belief/event/fact, etc.), polarity (positive/negative), determinacy. In majority of later projects that adopted PDTB model, only the first two aspects (structure and semantics of discourse relations) have been annotated: apparently, attribution of discourse relations and their arguments turned out to be a nontrivial and time-consuming task.

Both explicit and implicit discourse relations are annotated in PDTB. Explicit relations are those realized by explicit connectives, such as subordinating conjunctions

(*because, when*), coordinating conjunctions (*and, or*) or adverbials (*for example, instead*). Complex connectives are also annotated, including modified forms of connectives (*only because*), conjoined connectives (*if and when*) and parallel connectives (*either. . . or, on one hand. . . on the other hand*).

Implicit relations are annotated between each pair of adjacent sentences within paragraphs where there is no connective present. The PDTB methodology introduced the so-called lexically-grounded approach to annotation of implicit relations: annotators have to label them with specific connectives that best signal these relations when inserted between the adjacent sentences (see, e. g., Example 1).

Example 1. *In July, the Environmental Protection Agency imposed a gradual ban on virtually all uses of asbestos. (implicit = as a result). By 1997, almost all remaining uses of cancer-causing asbestos will be outlawed.*

When an annotator cannot insert a connective between the adjacent sentences, one of the three relation labels is used: AltLex, EntRel, or NoRel. AltLex (Alternative Lexicalization) signifies that the discourse relation between the adjacent sentences is already signaled in the text by an alternative lexical device (not a connective); EntRel signifies that only an entity-based relation can be inferred between the sentences; and NoRel is used when annotators cannot see neither an Alternative Lexicalization, nor an Entity-relation between the adjacent sentences.

The PDTB concept implies that discourse relations can hold between two and only two arguments, each argument being a span of text that can be interpreted as a proposition, eventuality, belief, etc. (what Asher calls *abstract objects* in [7]). In English, such abstract objects are usually conveyed by one or several sentences or clauses and sometimes by nominalizations and verb phrases. When discourse relations are annotated in PDTB, these arguments are labeled as Arg1 and Arg2. For explicit relations, Arg2 is the argument that is syntactically bound to the explicit connective; for implicit relations, Arg1 is the argument that comes first and Arg2 is the argument that comes second. Arguments Arg1 and Arg2 are limited to the minimal text needed for interpretation of the discourse relation (this is known as “the minimality principle”). When a larger context is required for better understanding of a relation, supplementary materials for the arguments can also be annotated (labelled as Sup1 for Arg1 and Sup2 for Arg2).

For semantic annotation of discourse relations, a three-level typology of semantic labels (sense tags) is adopted in PDTB (Fig. 1). The discourse relations are divided into four classes (temporal, contingency, comparison, and expansion). Inside each class, the relations are further partitioned into several types and most types have several subtypes. Each discourse relation can be

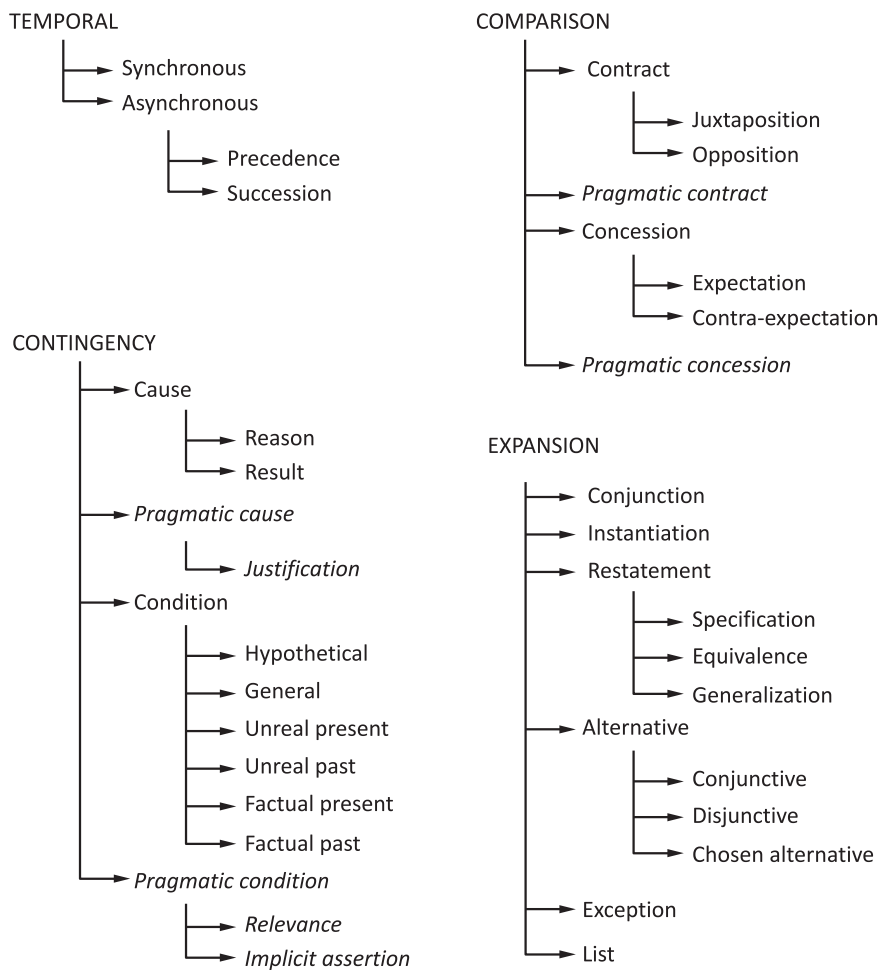


Figure 1 The PDTB 2.0 sense hierarchy [5]

assigned more than one sense tag from this hierarchy (see [8]). When there is a disagreement between annotators on a lower level, it can be automatically resolved by rolling back to the next higher level (e. g., Juxtaposition vs. Opposition disagreement will be automatically resolved by rolling back to the Contrast semantic tag).

The developers of PDTB acknowledge that this typology of relation senses has some gaps [9, p. 931–932]. In a number of later efforts based on PDTB methodology, the typology of senses has been modified and extended (see, e. g., [10–12]). Variations in semantic typologies result both from diverse theoretical assumptions and from distinctions in the scope of research. For example, while PDTB covers discourse relations in the corpus of Wall Street Journal articles (in English only), the effort reported in [12] addresses various types of English and French discourse markers (not only those that signal relation between two text spans) in written and spoken texts.

A number of efforts have been implemented following the model established by PDTB (many of them listed in [9, p. 934]. As a part of these efforts, annotated corpora

of connectives and discourse relations have been created for texts in different genres and languages (including Arabic, Chinese, Turkish, Hindi, Czech, and French). In most of these corpora, PDTB's senses typology was adjusted but otherwise, they adopted the same general approach to annotation of discourse relation as proposed by the PDTB framework. In particular, PDTB's lexically-grounded approach was implemented for annotation of implicit relations (annotators must insert connectives that best signal relations between adjacent sentences).

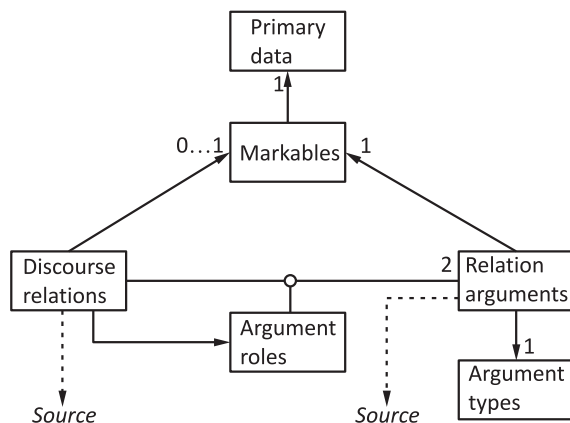
In recent years, a standard for annotation of discourse relations is being developed (ISO 24617-8, [13]). The authors of the standard aim to bring together the best practices used in corpora with annotated discourse relations created up to date. They propose a structure that should support annotation of discourse relation in a uniform theory-neutral way. A set of 20 core relations is proposed for semantic labeling of the most common discourse-level relations, although this set does not aim to be exhaustive and allows for future extensions. As opposed to PDTB senses typology, this list is not or-

ganized as a hierarchy; the core relations are initially independent but researchers are free to group them into functional domains according to their vision.

For asymmetrical relations, the argument roles are specified in ISO 24617-8. Each asymmetrical relation in the core set is supplied with appropriate argument role labels. For example, for discourse relation *Cause* argument roles *Reason* and *Result* are specified, for discourse relation *Purpose* — argument roles *Goal* and *Enablement*. This allows for unification of otherwise semantically identical relations with reversed order of arguments (for example, in PDTB 2.0, there are such pairs of relation sense tags as *Reason* and *Result*, *Precedence* and *Succession*).

In order to distinguish between ideational and rhetorical variants of the same relation, ISO 24617-8 proposes to specify types of arguments, which can be either situations (eventualities, facts, conditions, etc.) or dialog acts. This also allows for removal of doubling (rhetorical and nonrhetorical) relation sense tags present in PDTB 2.0 (see Fig. 1). ISO 24617-8 also allows to specify the source of relation and its arguments (which can be either the producer of the text or another actor).

The overall metamodel for annotation of discourse relations proposed in ISO 24617-8 is presented in Fig. 2. Indication 0...1 at the tip of the arrow from discourse relation to markables signifies that the discourse relation can be either explicit (with an explicit connective in the text) or implicit (no markable in the text). One thing that is not quite clear with ISO 24617-8 is how it proposes to deal with such cases when a discourse relation can combine properties of more than one relation.



**Figure 2** ISO 24617-8 metamodel for annotation of discourse relations

<sup>1</sup>Literal English translation: *not only . . . but even . . . and sometimes also . . . ; not . . . and not . . . but just . . . ; though . . . though . . . but still . . . ; not only . . . but even also . . . and even . . .*

<sup>2</sup>Literal English translation: *I felt terribly ashamed when I finally realized (quite suddenly) that not only he would not have been shocked, but even also it would not have crossed his mind that this was not monumental. . . and even he would not have understood what was there to be shocked about?* (F. M. Dostoyevsky. Crime and punishment.)

A few works were dedicated to annotation of connectives and discourse markers in parallel and comparable corpora [11, 12], although currently, there are no large-scale parallel corpora with annotated discourse relations. For example, in [11, p. 4–5], the authors maintain that for initial assessment of cross-language equivalents, it is mandatory to use parallel corpora, but such assessment is problematic in practice because parallel corpora are not entirely reliable and often limited to specific genres. That is why the authors propose to use small parallel corpora at the initial stage of a cross-linguistic research and to verify their findings at later stages using larger-scale comparable multilingual corpora.

### 3 Supracorpora Database of Connectives in Contrast with Other Approaches

In supracorpora databases (and in the SCDB-Connectives, in particular), the minimal context required for interpretation of the linguistic item (connective) is included in the annotation. In addition, within this minimal context, the main words (those that are part of the connective) and the so-called functional words (those that may influence semantics of the connective or/and represent pragmatics or situational context) are annotated. However, the actual arguments of the discourse relations (Arg1 and Arg2 in the PDTB framework) are not explicitly annotated in the SCDB-Connectives. On one hand, this is a drawback, but on the other hand, there is no restriction on the number of arguments in the system, which allows researchers to annotate connectives that connect. This cannot be handled by PDTB and ISO 24617-8, even though one must acknowledge that such multipart connectives are not very frequent: only 41 tokens in our corpus, including such types as *не только . . . но даже . . . а иногда и . . . ; не . . . и не . . . а просто . . . ; хотя . . . хотя . . . однако все же . . . ; не только . . . но даже и . . . и даже . . .*<sup>1</sup> (see Example 2).

Example 2. *{. . .} ужасно стыдно мне стало, когда я наконец догадался (вдруг как-то), что не только его не покорило бы, но даже и в голову бы ему не пришло, что это не монументально. . . и даже не понял бы он совсем: чего тут коробиться?*<sup>2</sup> (Ф. М. Достоевский. Преступление и наказание)

As opposed to PDTB and similar to ISO 24617-8, the typology of sense labels in the SCDB-Connectives is not organized as a hierarchy. The relations are

initially independent although they may be grouped into functional domains during a later stage (see, e.g., [14]).

The most important distinction of the SCDB-Connectives that sets it apart from similar efforts is that it supports annotation of connectives in large-scale parallel corpora. The SCDB-Connectives operates with parallel corpora of the Russian National Corpus that are both comparatively large and of high quality since they only include literary translations made by professional translators. These corpora mostly include fiction, but they are gradually expanding to include other genres (official documents, philosophical literature, etc.). Currently, most connectives are annotated in Russian–French (> 3 million words) and French–Russian (> 600 thousand words) corpora but further annotation efforts are planned for Russian–Italian and Russian–German corpora. The SCDB-Connectives takes advantage of parallel corpora structure allowing users to create annotated TCs. Each TC includes annotation of a Russian connective and annotation of the corresponding French fragment that often (but not always) includes also a connective.

Simultaneous parallel annotation of discourse relations in Russian and in other languages makes it possible to conduct comparative analysis of discourse relations in the corresponding language pairs. This kind of analysis is unique because it allows researchers to test validity and cross-lingual universality of the proposed classifications of logical–semantic relations based on data from parallel texts.

As of today, over 16,5 thousand TCs of various types have been created in the SCDB-Connectives for more than 11,5 thousand of connectives (the reason for the discrepancy is that for some texts, multiple translations are available in the corpus). There are 853 types of Russian connectives registered in the database, which are organized in 136 clusters. This is significantly more types than in PDTB 2.0 where only 100 distinct types of explicit connectives are registered (155 types if modified forms and variants are taken into account). These figures emphasize a much higher variability and structural complexity of Russian connectives as opposed to the English ones. For example, in PDTB 2.0, there are 3000 tokens of ‘*and*’ and 1746 tokens of ‘*also*,’ but not a single modified or conjoined form of either of them. Meanwhile, in Russian, there is a great variety of widely used conjoined/modified forms for both ‘*u*’ (*and*) and ‘*также*’ (*also*), including such types as *и также*, *а также*, *а также и*, *и к тому же*<sup>1</sup>, etc.

The SCDB-Connectives is based on the SCDB concept that has been described in more detail in previous works (see, e.g., [1–3]). As a part of other projects, sev-

eral SCDB banks of translation correspondences were created for cross-linguistic study of such items as personal verbal forms, impersonal verbal forms, language-specific words, and discourse markers.

Penn Discourse Treebank, ISO 24617-8, and most of the other annotation efforts are based on XML data format. The SCDB-Connectives, like other SCDBs, was developed as a relational database, which enables its data to be well organized. Relational databases support structured query language (SQL) offering researchers powerful features when it comes to searching and generating statistics.

A server-based relational database increases the accessibility of the SCDB-Connectives to the users. Annotators and linguistic experts can simultaneously work with the same data from anywhere using their favorite web-browsers. In addition, the structure and interface of the database allow researchers to modify the annotation schemes easily by inserting new properties into appropriate tables or by altering descriptions of the existing ones.

Eventually, SCDBs will integrate new features, such as a possibility to save history of changes made to annotation schemes in SCDBs, and the underlying relational database will significantly facilitate such tasks. By tracking changes to annotation schemes, SCDBs will be able to contribute to development of knowledge generation theory [15–17]).

Finally, in the context of contrastive linguistic projects related to studying of connectives, one should also mention the GECCo (German–English Contrasts in Cohesion) project (see, e.g., [18]). The project’s goal was to produce a German–English corpus for contrastive linguistic work in the area of textual cohesion. The GECCo corpus includes texts in more than a dozen registers, both spoken and written, English and German, allowing to study relevant distribution of cohesive devices in English and German. The main difference between the GECCo project and SCDB-Connectives is that the GECCo covers a much wider range of types of cohesion, including reference, substitution, ellipsis, conjunction (connectives fall into this category), and lexical cohesion, while SCDB-Connectives deal only with connectives. As a result, the GECCo corpus does not pay enough attention to annotation of discourse relations, mostly concentrating on other types of textual cohesion. Only 5 semantic types of conjunctions are annotated in the GECCo: additive, adversative, temporal, causal, and modal. In addition, only a fraction of the texts in the GECCo corpus are parallel texts: the GECCo corpus is created and used mostly as a comparable corpus rather than a parallel one. Accordingly, while the GECCo corpus allows studying of relative frequencies of cohesion devices across various registers, it does not

<sup>1</sup>Literal English translation: *and also; but also; but also and; and in addition*.



support unidirectional methodology of SCDB, which is based on analysis of translation correspondences.

## 4 Concluding Remarks

Interpretation of explicit connectives is vital for high-level understanding of text as a whole because they signal discourse relations between larger text segments effectively “binding” the text together. For this reason, semantic annotation of connectives plays a major role in such areas as natural language processing (NLP) and machine translation. A number of works [19–21] brought evidence that integrating annotated sense labels for discourse connectives can improve results of factored statistical machine translation (SMT). As a part of the above-mentioned work, the authors tested algorithm for automatic disambiguation of discourse connectives prior to SMT, which resulted in significantly improved scores for quality of machine translation. The authors stressed that disambiguation of connectives is a more challenging task than regular word sense disambiguation (WSD) because connectives labeling requires more structured and longer-range information. Besides, modeling of content word senses differs considerably from modeling of the procedural meaning of function words. The authors note that to improve quality of automatic disambiguation of connectives, it is vital to have access to reliable large-scale annotated data for training and testing purposes.

While the primary goal of this paper was to examine and compare existing approaches to annotation of connectives and discourse relations, it also aimed to bring evidence that the SCDB-Connectives provides valuable data on Russian connectives and their correspondences in French (and, eventually, in other languages) that can be useful for both theoretical and practical purposes. As far as we can say, it is the largest-scale corpus of annotated connectives in parallel texts. Nevertheless, some aspects of the SCDB-Connectives require improvement to make it more useful for researchers. More detailed descriptions of sense labels should be provided for the SCDB-Connectives, including descriptions of discourse relations and their arguments. It will be also useful to provide mapping between relation senses used in the SCDB-Connectives and the core set of relations in ISO 24617-8. Finally, following the guidelines of PDTB, it makes sense to explicitly annotate the arguments of discourse relations signaled by the connectives and to specify their roles and types (similar to the ISO 24617-8 proposal).

## Acknowledgments

The work was carried out at the Institute of Informatics Problems (FRC CSC RAS) and funded by the Russian

Science Foundation according to the research project No. 16-18-10004.

## References

- Loiseau, S., D.V. Sitchinava, Anna A. Zalizniak, and I. M. Zatsman. 2013. Information technologies for creating the database of equivalent verbal forms in the Russian–French multivariant parallel corpus. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 7(2):100–109.
- Kruzhkov, M., N. Buntman, E. Loshchilova, D. Sitchinava, Anna A. Zalizniak, and I. A. Zatsman 2014. Database of Russian verbal forms and their French translation equivalents. *Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Conference (International) “Dialogue 2016” Proceedings*. Moscow: RGGU. 13(20):275–287.
- Kruzhkov, M. 2016. Supracorpora databases as corpus-based superstructure for manual annotation of parallel corpora. *8th Conference (International) on Corpus Linguistics*. EPiC Ser. in Language and Linguistics. 1:236–248. Available at: <https://easychair.org/publications/paper/270289> (accessed August 31, 2017).
- Mikhailov, M., and R. Cooper. 2016. *Corpus linguistics for translation and contrastive studies: A guide for research*. London – New York: Routledge. 234 p.
- Prasad, R., N. Dinesh, A. Lee, E. Miltsakaki, L. Robaldo, A. Joshi, and B. Webber. 2008. The Penn Discourse TreeBank 2.0. *6th Conference (International) on Language Resources and Evaluation Proceedings*. Marrackech, Morocco. 2961–2968.
- Prasad, R., B. Webber, and A. Joshi. 2017. The Penn Discourse Treebank: An annotated corpus of discourse relations. *Handbook of linguistic annotation*. Springer. 1197–1217.
- Asher, N. 1993. *Reference to abstract objects*. Dordrecht–Boston: Kluwer Academic. 455 p.
- Webber, B. 2016. Concurrent discourse relations. *Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Conference (International) “Dialogue 2016” Proceedings*. Moscow. 15(22):D. Available at: <http://www.dialog-21.ru/media/3488/webber.pdf> (accessed August 31, 2017).
- Prasad, R., B. Webber, and A. Joshi. 2014. Reflections on the Penn Discourse TreeBank, comparable corpora and complementary annotation. *Computational Linguistics* 40(4):921–950.
- Prasad, R., S. McRoy, N. Frid, A. Joshi, and H. Yu. 2011. The biomedical discourse relation bank. *BMC Bioinformatics* 12:188–205.
- Zufferey, S., and L. Degand. 2013. Annotating the meaning of discourse connectives in multilingual corpora. *Corpus linguistics and linguistic theory*. 1–24.
- Cribble, L., and S. Zufferey. 2015. Using a unified taxonomy to annotate discourse markers in speech and writing. *11th Conference (International) on Computational Semantics Proceedings*. London. 14–22.



13. Bunt, H., and R. Prasad. 2016. ISO DR-Core (ISO 24617-8): Core concepts for the annotation of discourse relations. *12th Joint ACL-ISO Workshop on Interoperable Semantic Annotation (ISA-12 Proceedings)*. Portoroz. 45–54.
14. Zatsman, I., O. Inkova, and V. Nuriev. 2017. The construction of classification schemes: Methods and technologies of expert formation. *Automatic Documentation Mathematical Linguistics* 51(1):27–41.
15. Zatsman, I. 2012. Tracing emerging meanings by computer: Semiotic framework. *13th European Conference on Knowledge Management Proceedings*. Reading: Academic Publishing International Ltd. 2:1298–1307.
16. Zatsman, I., N. Buntman, M. Kruzhkov, V. Nuriev, and Anna A. Zalizniak. 2014. Conceptual framework for development of computer technology supporting cross-linguistic knowledge discovery. *15th European Conference on Knowledge Management Proceedings*. Reading: Academic Publishing International Ltd. 3:1063–1071.
17. Zatsman, I., and N. Buntman. 2015. Outlining goals for discovering new knowledge and computerised tracing of emerging meanings. *16th European Conference on Knowledge Management Proceedings*. Reading: Academic Publishing International Ltd. 851–860.
18. Lapshinova-Koltunski, E., and K. Kunz. 2014. Annotating cohesion for multilingual analysis. *10th Joint ACL-ISO Workshop on Interoperable Semantic Annotation Proceedings*. Reykjavik. 57–64.
19. Meyer, T., A. Popescu-Belis, N. Hajlaoui, and A. Gesmundo. 2012. Machine translation of labeled discourse connectives. *10th Conference of the Association for Machine Translation in the Americas Proceedings*. San Diego, CA. Available at: <http://publications.idiap.ch/index.php/publications/show/2391> (accessed August 31, 2017).
20. Meyer, T. 2014. Discourse-level features for statistical machine translation. PhD thesis. École Polytechnique Fédérale de Lausanne. Available at: [http://publications.idiap.ch/downloads/papers/2015/Meyer\\_THESIS\\_2014.pdf](http://publications.idiap.ch/downloads/papers/2015/Meyer_THESIS_2014.pdf) (accessed August 31, 2017).
21. Meyer, T., N. Hajlaoui, and A. Popescu-Belis. 2015. Disambiguating discourse connectives for statistical machine translation. *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech and Language Processing* 23(7):1184–1197.

Received September 7, 2017

## Contributor

**Kruzhkov Mikhail G.** (b. 1975) — senior scientist, Institute of Informatics Problems, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; [magnit75@yandex.ru](mailto:magnit75@yandex.ru)

---

---

# ПОДХОДЫ К АННОТАЦИИ ДИСКУРСИВНЫХ ОТНОШЕНИЙ В ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ КОРПУСАХ\*

М. Г. Кружков

Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, [magint75@yandex.ru](mailto:magint75@yandex.ru)

**Аннотация:** Рассматривается надкорпусная база данных (НБД), разработанная на основе корпуса параллельных текстов для описания русских коннекторов и их переводов на французский и другие языки. В рамках данной НБД аннотируется внутренняя структура и семантика коннекторов русского языка, а также их переводных соответствий на других языках. Описание семантики коннекторов подразумевает описание соответствующих дискурсивных отношений между соединяемыми ими фрагментами текста. Используемый в НБД подход к описанию дискурсивных выражений, передаваемых коннекторами, сравнивается с новейшими существующими подходами к аннотации дискурсивных отношений: рассматривается аннотированный корпус дискурсивных отношений Penn Discourse Treebank (PDTB) и проект стандарта по аннотации дискурсивных отношений ISO 24617-8. Отмечается, что PDTB и ISO 24617-8, в отличие от НБД, позволяют аннотировать как эксплицитные (выраженные коннекторами и другими языковыми единицами), так и имплицитные дискурсивные отношения. Кроме этого, в рамках данных подходов имеется возможность аннотировать аргументы дискурсивных отношений, включая их источники, типы и роли (для ассиметричных отношений). С другой стороны, преимущество НБД состоит в том, что она позволяет одновременно аннотировать коннекторы и их переводные соответствия в параллельных корпусах, что открывает для исследователей новые возможности в области лингвистического контрастивного анализа. В то время как в рамках других подходов для аннотации дискурсивных кон-

---

\* Работа выполнена в Институте проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук при финансовой поддержке РНФ (проект № 16-18-10004).

некторов используется формат XML, НБД представляет собой реляционную базу данных, что повышает эффективность системы при работе с кросслингвистическими объектами и доступность для пользователей. Также рассматривается теоретическая и практическая значимость семантической аннотации коннекторов и выражаемых ими дискурсивных отношений.

**Ключевые слова:** дискурсивные отношения; коннекторы; корпусная лингвистика; параллельные корпуса; надкорпусные базы данных

**DOI:** 10.14357/19922264170415

## Литература

1. *Loiseau S., Sitchinava D.V., Zalizniak Anna A., Zatsman I.M.* Information technologies for creating the data base of equivalent verbal forms in the Russian–French multivariant parallel corpus // Информатика и её применения, 2013. Т. 7. Вып. 2. С. 100–109.
2. *Kruzhhkov M., Buntman N., Loshchilova E., Sitchinava D., Zalizniak Anna A., Zatsman I.A.* Database of Russian verbal forms and their French translation equivalents // Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Conference (International) “Dialogue 2016” Proceedings. — Moscow: RGGU, 2014. Vol. 13(20). P. 275–287.
3. *Kruzhhkov M.* Supracorpora databases as corpus-based superstructure for manual annotation of parallel corpora // 8th Conference (International) on Corpus Linguistics. — EPIc Ser. in language and linguistics, 2016. Vol. 1. P. 236–248. <https://easychair.org/publications/paper/270289>.
4. *Mikhailov M., Cooper R.* Corpus linguistics for translation and contrastive studies: A guide for research. — London – New York: Routledge, 2016. 234 p.
5. *Prasad R., Dinesh N., Lee A., Miltakaki E., Robaldo L., Joshi A., Webber B.* The Penn Discourse TreeBank 2.0 // 6th Conference (International) on Language Resources and Evaluation (LREC 2008) Proceedings. — Marrakech, Morocco, 2008. P. 2961–2968.
6. *Prasad R., Webber B., Joshi A.* The Penn Discourse Treebank: An annotated corpus of discourse relations // Handbook of linguistic annotation. — Springer, 2017. P. 1197–1217.
7. *Asher N.* Reference to abstract objects. — Dordrecht–Boston: Kluwer Academic, 1993. 455 p.
8. *Webber B.* Concurrent discourse relations, computational linguistics and intellectual technologies // Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Conference (International) “Dialogue 2016” Proceedings. — Moscow: RGGU, 2016. Vol. 15(22). <http://www.dialog-21.ru/media/3488/webber.pdf>.
9. *Prasad R., Webber B., Joshi A.* Reflections on the Penn Discourse TreeBank, comparable corpora and Complementary annotation // Computational Linguistics, 2014. Vol. 40. No. 4. P. 921–950.
10. *Prasad R., McRoy S., Frid N., Joshi A., Yu H.* The biomedical discourse relation bank // BMC Bioinformatics, 2011. Vol. 12. P. 188–205.
11. *Zufferey S., Degand L.* Annotating the meaning of discourse connectives in multilingual corpora // Corpus linguistics and linguistic theory, 2013. P. 1–24.
12. *Cribble L., Zufferey S.* Using a unified taxonomy to annotate discourse markers in speech and writing // 11th Conference (International) on Computational Semantics Proceedings. — London, 2015. P. 14–22.
13. *Bunt H., Prasad R.* ISO DR-Core (ISO 24617-8): Core concepts for the annotation of discourse relations // 12th Joint ACL-ISO Workshop on Interoperable Semantic Annotation Proceedings. — Portoroz, 2016. P. 45–54.
14. *Zatsman I., Inkova O., Nuriev V.* The construction of classification schemes: Methods and technologies of expert formation // Automatic Documentation Mathematical Linguistics, 2017. Vol. 51. No. 1. P. 27–41.
15. *Zatsman I.* Tracing emerging meanings by computer: Semiotic framework // 13th European Conference on Knowledge Management Proceedings. — Reading: Academic Publishing International Ltd., 2012. Vol. 2. P. 1298–1307.
16. *Zatsman I., Buntman N., Kruzhhkov M., Nuriev V., Zalizniak Anna A.* Conceptual framework for development of computer technology supporting cross-linguistic knowledge discovery // 15th European Conference on Knowledge Management Proceedings. — Reading: Academic Publishing International Ltd., 2014. Vol. 3. P. 1063–1071.
17. *Zatsman I., Buntman N.* Outlining goals for discovering new knowledge and computerised tracing of emerging meanings // 16th European Conference on Knowledge Management Proceedings. — Reading: Academic Publishing International Ltd., 2015. P. 851–860.
18. *Lapshinova-Koltunski E., Kunz K.* Annotating cohesion for multilingual analysis // 10th Joint ACL-ISO Workshop on Interoperable Semantic Annotation Proceedings. — Reykjavik, 2014. P. 57–64.
19. *Meyer T., Popescu-Belis A., Hajlaoui N., Gesmundo A.* Machine translation of labeled discourse connectives // 10th Conference of the Association for Machine Translation in the Americas Proceedings. — San Diego, CA, USA, 2012. <http://publications.idiap.ch/index.php/publications/show/2391>.
20. *Meyer T.* Discourse-level features for statistical machine translation: PhD thesis. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2014. [http://publications.idiap.ch/downloads/papers/2015/Meyer\\_THESIS\\_2014.pdf](http://publications.idiap.ch/downloads/papers/2015/Meyer_THESIS_2014.pdf).
21. *Meyer T., Hajlaoui N., Popescu-Belis A.* Disambiguating discourse connectives for statistical machine translation // IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech and Language Processing, 2015. Vol. 23. No. 7. P. 1184–1197.

Поступила в редакцию 07.09.2017

**Агаларов Явер Мирзабекович** (р. 1952) — кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Битюков Юрий Иванович** (р. 1972) — доктор технических наук, доцент Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

**Буянов Михаил Владимирович** (р. 1994) — аспирант Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

**Вихрова Ольга Геннадиевна** (р. 1990) — аспирант Российского университета дружбы народов

**Гайдамака Юлия Васильевна** (р. 1971) — кандидат физико-математических наук, доцент Российского университета дружбы народов; старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Горшенин Андрей Константинович** (р. 1986) — кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; старший научный сотрудник Института океанологии им. П. П. Ширшова Российской академии наук

**Гребешков Александр Юрьевич** (р. 1967) — кандидат технических наук, старший научный сотрудник Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики

**Грушо Александр Александрович** (р. 1946) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Забжайло Михаил Иванович** (р. 1956) — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Зарипова Эльвира Ринатовна** (р. 1979) — кандидат физико-математических наук, доцент Российского университета дружбы народов

**Иванов Сергей Валерьевич** (р. 1989) — кандидат физико-математических наук, доцент Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

**Кибзун Андрей Иванович** (р. 1951) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

**Королев Виктор Юрьевич** (р. 1954) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова; ведущий научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; профессор Университет Дианьзи города Ханчжоу (Китай)

**Кружков Михаил Григорьевич** (р. 1975) — старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Кудрявцев Алексей Андреевич** (р. 1978) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

**Лисовская Екатерина Юрьевна** (р. 1992) — аспирант Национального исследовательского Томского государственного университета

**Малашенко Юрий Евгеньевич** (р. 1946) — доктор физико-математических наук, заведующий сектором Вычислительного центра им. А. А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

**Моисеева Светлана Петровна** (р. 1971) — доктор физико-математических наук, доцент; профессор Национального исследовательского Томского государственного университета

- Мокров Евгений Владимирович** (р. 1988) — аспирант Российского университета дружбы народов
- Назарова Ирина Александровна** (р. 1966) — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Вычислительного центра им. А. А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук
- Наумов Андрей Викторович** (р. 1966) — доктор физико-математических наук, доцент, профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета)
- Наумов Валерий Арсентьевич** (р. 1950) — кандидат физико-математических наук, научный руководитель Исследовательского Института Инноваций, г. Хельсинки, Финляндия
- Новикова Наталья Михайловна** (р. 1953) — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Вычислительного центра им. А. А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук
- Пагано Микеле** (р. 1968) — PhD по информационным технологиям, профессор Университета г. Пиза (Италия)
- Платонов Евгений Николаевич** (р. 1976) — кандидат физико-математических наук, доцент Московского авиационного института (национального исследовательского университета)
- Потатуева Виктория Владимировна** (р. 1993) — студент магистратуры Национального исследовательского Томского государственного университета
- Разумчик Ростислав Валерьевич** (р. 1984) — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; доцент Российского университета дружбы народов
- Самуйлов Константин Евгеньевич** (р. 1955) — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой Российского университета дружбы народов, директор Института прикладной математики и телекоммуникаций Российского университета дружбы народов; старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук
- Смирнов Дмитрий Владимирович** (р. 1984) — бизнес-партнер по информационным технологиям департамента безопасности ПАО «Сбербанк России»
- Тимонина Елена Евгеньевна** (р. 1952) — доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук
- Титова Анастасия Игоревна** (р. 1995) — студентка кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
- Шоргин Всеволод Сергеевич** (р. 1978) — кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук
- Шоргин Сергей Яковлевич** (р. 1952) — доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН), главный научный сотрудник Института проблем информатики ФИЦ ИУ РАН



## АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ ЗА 2017 г.

	Вып.	Стр.
<b>Агаларов Я. М.</b> Максимизация среднего стационарного дохода системы массового обслуживания типа $M/G/1$	2	25–32
<b>Агаларов Я. М., Шоргин В. С.</b> Об одной задаче максимизации дохода системы массового обслуживания типа $G/M/1$ с пороговым управлением очередью	4	55–64
<b>Акимов Д. А.</b> см. Сигов А. С.		
<b>Алексейчук А. С., Пантелеев А. В.</b> Индивидуализация процесса обучения в режиме веб-конференции на основе иерархической нечеткой экспертной системы	1	90–99
<b>Андрианова Е. Г.</b> см. Сигов А. С.		
<b>Атаева О. М., Серебряков В. А.</b> Персональная открытая семантическая цифровая библиотека LibMeta. Конструирование контента. Интеграция с источниками LOD	2	85–100
<b>Басок Б. М.</b> см. Френкель С. Л.		
<b>Битюков Ю. И., Платонов Е. Н.</b> Применение вейвлетов для расчета линейных систем управления с сосредоточенными параметрами	4	94–103
<b>Борисов А. В.</b> Классификация по непрерывным наблюдениям с мультипликативными шумами I: формулы байесовской оценки	1	11–19
<b>Борисов А. В.</b> Классификация по непрерывным наблюдениям с мультипликативными шумами II: алгоритм численной реализации оценки	2	33–41
<b>Буянов М. В., Иванов С. В., Кибзун А. И., Наумов А. В.</b> Развитие математической модели управления грузоперевозками на участке железнодорожной сети с учетом случайных факторов	4	85–93
<b>Васильев Н. С.</b> Информированность участников и существование равновесия в позиционных многошаговых играх многих лиц	2	42–49
<b>Вихрова О. Г.</b> см. Гребешков А. Ю.		
<b>Гайдамака Ю. В., Орлов Ю. Н., Молчанов Д. А., Самуйлов А. К.</b> Моделирование отношения сигнал/интерференция в мобильной сети со случайным блужданием взаимодействующих устройств	2	50–58
<b>Гайдамака Ю. В., Самуйлов К. Е., Шоргин С. Я.</b> Метод моделирования характеристик интерференции при прямом взаимодействии перемещающихся устройств в гетерогенной беспроводной сети пятого поколения	4	2–9
<b>Гайдамака Ю. В.</b> см. Гребешков А. Ю.		
<b>Ганебных С. Н.</b> см. Ланге М. М.		
<b>Горбунов К. Ю., Любецкий В. А.</b> Алгоритм преобразования одного графа в другой с минимальной ценой	1	79–89
<b>Горшенин А. К.</b> Анализ вероятностно-статистических характеристик осадков на основе паттернов	4	38–46
<b>Горшенин А. К.</b> О некоторых математических и программных методах построения структурных моделей информационных потоков	1	58–68
<b>Гребешков А. Ю., Гайдамака Ю. В., Вихрова О. Г., Зарипова Э. Р.</b> Анализ времени переключения сеанса связи в гетерогенных беспроводных сетях при вертикальном хэндовере	4	70–78
<b>Грушо А. А., Забейжало М. И., Смирнов Д. В., Тимонина Е. Е.</b> Модель множества информационных пространств в задаче поиска инсайдера	4	65–69
<b>Гудкова И. А., Шоргин С. Я.</b> Вероятностная модель совместного использования ресурсов беспроводной сети с адаптивным управлением мощностью	3	90–98
<b>Докукин А. А., Рязанов В. В., Шут О. В.</b> Многоуровневые модели решения многоклассовых задач распознавания	1	69–78
<b>Драницына М. А., Захарова Т. В.</b> Сегментирование нестационарных сигналов на основе вероятностных свойств оконной дисперсии	3	18–26



	Вып.	Стр.
<b>Дюкова Е. В., Никифоров А. Г., Прокофьев П. А.</b> О распараллеливании асимптотически оптимальных алгоритмов дуализации	3	113–122
<b>Жуков Д. О.</b> см. Сигов А. С.		
<b>Забейайло М. И.</b> см. Грушо А. А.		
<b>Зализняк Анна А., Зацман И. М., Инькова О. Ю.</b> Надкорпусная база данных коннекторов: построение системы терминов	1	100–108
<b>Зарипова Э. Р.</b> см. Гребешков А. Ю.		
<b>Захаров В. Н.</b> см. Френкель С. Л.		
<b>Захарова Т. В.</b> см. Драницына М. А.		
<b>Зацман И. М., Лукьянов Г. В., Минин В. А., Хавансков В. А., Шубников С. К.</b> Индикаторное оценивание процессов переноса знаний из области научных исследований в сферу технологического развития	3	132–141
<b>Зацман И. М.</b> см. Зализняк Анна А.		
<b>Иванов С. В.</b> см. Буянов М. В.		
<b>Инькова О. Ю., Попкова Н. А.</b> Статистические данные как информационная основа лингвистического анализа коннекторов русского языка	3	123–131
<b>Инькова О. Ю.</b> см. Зализняк Анна А.		
<b>Кабанов Ю. М.</b> см. Эль Битар Х.		
<b>Кабанов Ю. М.</b> см. Эль Битар Х.		
<b>Кибзун А. И.</b> см. Буянов М. В.		
<b>Кириков И. А., Колесников А. В., Листопад С. В.</b> Компьютерная модель синергии коллективного принятия решений	3	34–41
<b>Ковалёв С. П.</b> Методы теории категорий в модельно-ориентированной системной инженерии	3	42–50
<b>Колесников А. В.</b> см. Кириков И. А.		
<b>Корепанов Э. Р.</b> см. Сеницын И. Н.		
<b>Королев В. Ю.</b> Аналогии теоремы Глезера для отрицательных биномиальных и обобщенных гамма-распределений и некоторые их приложения	3	2–17
<b>Королев В. Ю.</b> Некоторые свойства распределения Миттаг-Леффлера и связанных с ним процессов	4	26–37
<b>Кривенко М. П.</b> Многомерный референсный регион высокой плотности	2	59–64
<b>Кривенко М. П.</b> Обучаемая классификация неполных клинических данных	3	27–33
<b>Кружков М. Г.</b> Подходы к аннотации дискурсивных отношений в лингвистических корпусах	4	118–125
<b>Кудрявцев А. А., Титова А. И.</b> Гамма-экспоненциальная функция в байесовских моделях массового обслуживания	4	104–108
<b>Кузнецов М. П.</b> см. Сафин К. Ф.		
<b>Кузнецова М. В.</b> см. Сафин К. Ф.		
<b>Ланге А. М.</b> см. Ланге М. М.		
<b>Ланге М. М., Ганебных С. Н., Ланге А. М.</b> Об эффективности иерархического алгоритма поиска приближенного ближайшего соседа в заданном наборе изображений	3	51–59
<b>Лисовская Е. Ю., Моисеева С. П., Пагано М., Потатуева В. В.</b> Исследование системы массового обслуживания MPP/GI/∞ с требованиями случайного объема	4	109–117
<b>Листопад С. В.</b> см. Кириков И. А.		
<b>Лукашенко О. В., Морозов Е. В., Пагано М.</b> Об эффективности оценки Монте Карло на основе гауссовского моста	2	16–24
<b>Лукьянов Г. В.</b> см. Зацман И. М.		
<b>Любецкий В. А.</b> см. Горбунов К. Ю.		
<b>Малашенко Ю. Е., Назарова И. А., Новикова Н. М.</b> Метод анализа функциональной уязвимости потоковых сетевых систем	4	47–54
<b>Матюшенко С. И.</b> см. Мейханаджян Л. А.		
<b>Мейханаджян Л. А., Матюшенко С. И., Пяткина Д. А., Разумчик Р. В.</b> Совместное стационарное распределение числа заявок в системе с двумя очередями конечной емкости и общим входящим потоком	3	106–112

	Вып.	Стр.
<b>Минин В. А.</b> см. Зацман И. М.		
<b>Моисеева С. П.</b> см. Лисовская Е. Ю.		
<b>Мокбель Р.</b> см. Эль Битар Х.		
<b>Мокбель Р.</b> см. Эль Битар Х.		
<b>Мокров Е. В.</b> см. Наумов В. А.		
<b>Молибог И. О., Мотренко А. П., Стрижов В. В.</b> Повышение качества классификации в задаче обнаружения внутреннего плагиата	3	60–72
<b>Молчанов Д. А.</b> см. Гайдамака Ю. В.		
<b>Морозов Е. В.</b> см. Лукашенко О. В.		
<b>Мотренко А. П.</b> см. Молибог И. О.		
<b>Назарова И. А.</b> см. Малашенко Ю. Е.		
<b>Наумов А. В.</b> см. Буянов М. В.		
<b>Наумов В. А., Мокров Е. В., Самуйлов К. Е.</b> Анализ временных характеристик процесса передачи данных подвижным пользователям в сети LTE	4	79–84
<b>Никифоров А. Г.</b> см. Дюкова Е. В.		
<b>Новикова Н. М.</b> см. Малашенко Ю. Е.		
<b>Орлов Ю. Н.</b> см. Гайдамака Ю. В.		
<b>Пагано М.</b> см. Лисовская Е. Ю.		
<b>Пагано М.</b> см. Лукашенко О. В.		
<b>Пантелеев А. В.</b> см. Алексейчук А. С.		
<b>Пархоменко В. П.</b> Применение квазислучайного подхода и ансамблевых вычислений для определения оптимальных наборов значений параметров климатической модели	2	65–73
<b>Платонов Е. Н.</b> см. Битюков Ю. И.		
<b>Попкова Н. А.</b> см. Инькова О. Ю.		
<b>Потатуева В. В.</b> см. Лисовская Е. Ю.		
<b>Прокофьев П. А.</b> см. Дюкова Е. В.		
<b>Пяткина Д. А.</b> см. Мейханаджян Л. А.		
<b>Раев В. К.</b> см. Сигов А. С.		
<b>Разумчик Р. В.</b> Стационарные распределения, связанные со временем пребывания в состоянии перегрузки системы MAP/PN/1/r с гистерезисным управлением нагрузкой	4	19–25
<b>Разумчик Р. В.</b> Стационарные характеристики системы обслуживания с инверсионным порядком обслуживания, вероятностным приоритетом и групповым поступлением разнородных заявок	4	10–18
<b>Разумчик Р. В.</b> см. Мейханаджян Л. А.		
<b>Рудой Г. И.</b> Модификация функционала качества в задачах нелинейной регрессии для учета гетероскедастичных погрешностей измеряемых данных	2	74–84
<b>Рязанов В. В.</b> см. Докукин А. А.		
<b>Самуйлов А. К.</b> см. Гайдамака Ю. В.		
<b>Самуйлов К. Е., Сопин Э. С., Шоргин С. Я.</b> Система массового обслуживания с ограниченными ресурсами и сигналами для анализа показателей эффективности беспроводных сетей	3	99–105
<b>Самуйлов К. Е.</b> см. Гайдамака Ю. В.		
<b>Самуйлов К. Е.</b> см. Наумов В. А.		
<b>Сафин К. Ф., Кузнецов М. П., Кузнецова М. В.</b> Определение заимствований в тексте без указания источника	3	73–79
<b>Сачков В. Е.</b> см. Сигов А. С.		
<b>Сейфуль-Мулюков Р. Б.</b> Информатика и ее роль в познании образования и свойств сложной природной системы	1	119–123
<b>Серебряков В. А.</b> см. Атаева О. М.		
<b>Сигов А. С., Акимов Д. А., Жуков Д. О., Андрианова Е. Г., Сачков В. Е., Раев В. К.</b> Психолингвистический анализ русскоязычных текстовых сообщений на основе их фоносемантических статистических характеристик	3	80–89
<b>Синицын В. И.</b> см. Синицын И. Н.		

	Вып.	Стр.
<b>Синицын И. Н.</b> Аналитическое моделирование широкополосных процессов в стохастических системах, не разрешенных относительно производных	1	3–10
<b>Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р.</b> Модифицированные эллипсоидальные условно-оптимальные фильтры для нелинейных стохастических систем на многообразиях	2	101–111
<b>Смирнов Д. В.</b> см. Грушо А. А.		
<b>Соколов И. А.</b> Предисловие	1	2–2
<b>Сопин Э. С.</b> см. Самуйлов К. Е.		
<b>Стефанович А. И., Сушко Д. В.</b> Обратимое сжатие данных посредством универсального арифметического кодирования	1	20–45
<b>Стрижов В. В.</b> см. Молибог И. О.		
<b>Сушко Д. В.</b> см. Стефанович А. И.		
<b>Тимонина Е. Е.</b> см. Грушо А. А.		
<b>Титова А. И.</b> см. Кудрявцев А. А.		
<b>Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.</b> Одноканальная система обслуживания с зависимыми интервалами времени между поступлениями требований	2	112–116
<b>Ушаков Н. Г.</b> см. Ушаков В. Г.		
<b>Френкель С. Л., Захаров В. Н., Басок Б. М.</b> Вероятностные модели оценки устойчивости программ к кратковременным аппаратным сбоям	1	46–57
<b>Хавансков В. А.</b> см. Зацман И. М.		
<b>Шестаков О. В.</b> Сильная состоятельность оценки среднеквадратичной погрешности при решении обратных статистических задач	2	117–121
<b>Шестаков О. В.</b> Универсальная пороговая обработка в моделях с негауссовым шумом	2	122–125
<b>Шоргин В. С.</b> см. Агаларов Я. М.		
<b>Шоргин С. Я.</b> см. Гайдамака Ю. В.		
<b>Шоргин С. Я.</b> см. Гудкова И. А.		
<b>Шоргин С. Я.</b> см. Самуйлов К. Е.		
<b>Шубников С. К.</b> см. Зацман И. М.		
<b>Шут О. В.</b> см. Докукин А. А.		
<b>Эль Битар Х., Кабанов Ю. М., Мокбель Р.</b> Динамические модели системного риска и заражения	2	2–15
<b>Эль Битар Х., Кабанов Ю. М., Мокбель Р.</b> О единственности клиринговых векторов, редуцирующих системный риск	1	109–118

---

## 2017 AUTHOR INDEX

---

	Issue	Page
<b>Agalarov Ya. M. and Shorgin V. S.</b> About the problem of profit maximization in $G/M/1$ queuing systems with threshold control of the queue	4	55–64
<b>Agalarov Ya. M.</b> Maximization of average stationary profit in $M/G/1$ queuing system	2	25–32
<b>Akimov D. A.</b> see Sigov A. S.		
<b>Alekseychuk A. S. and Panteleev A. V.</b> Modeling individualization of the learning process in the form of web conference using a hierarchical fuzzy expert system	1	90–99
<b>Andrianova E. G.</b> see Sigov A. S.		
<b>Ataeva O. M. and Serebryakov V. A.</b> Personal semantic open digital library LibMeta. Construction of the content. Integration with LOD sources	2	85–100
<b>Basok B. M.</b> see Frenkel S. L.		
<b>Bityukov Y. I. and Platonov E. N.</b> The use of wavelets for the calculation of linear control systems with lumped parameters	4	94–103
<b>Borisov A. V.</b> Classification by continuous-time observations in multiplicative noise I: Formulae for bayesian estimate	1	11–19
<b>Borisov A. V.</b> Classification by continuous-time observations in multiplicative noise II: Numerical algorithm	2	33–41
<b>Buyanov M. V., Ivanov S. V., Kibzun A. I., and Naumov A. V.</b> Development of the mathematical model of cargo transportation control on a railway network segment taking into account random factors	4	85–93
<b>Djukova E. V., Nikiforov A. G., and Prokofyev P. A.</b> On parallelization of asymptotically optimal dualization algorithms	3	113–122
<b>Dokukin A. A., Ryazanov V. V., and Shut O. V.</b> Multilevel models for pattern recognition tasks with multiple classes	1	69–78
<b>Dranitsyna M. A. and Zakharova T. V.</b> Segmentation of nonstationary signals using stochastic characteristics of the window variance	3	18–26
<b>El Bitar Kh., Kabanov Yu. M., and Mokbel R.</b> Dynamic models of systemic risk and contagion	2	2–15
<b>El Bitar Kh., Kabanov Yu. M., and Mokbel R.</b> On uniqueness of clearing vectors reducing the systemic risk	1	109–118
<b>Frenkel S. L., Zakharov V. N., and Basok B. M.</b> A probabilistic model for estimation of software robustness to short-term hardware failures	1	46–57
<b>Gaidamaka Yu. V., Orlov Yu. N., Molchanov D. A., and Samuylov A. K.</b> Modeling the signal-to-interference ratio in a mobile network with moving devices	2	50–58
<b>Gaidamaka Yu. V., Samouylov K. E., and Shorgin S. Ya.</b> Method of modeling interference characteristics in heterogeneous fifth generation wireless networks with device-to-device communications	4	2–9
<b>Gaidamaka Yu. V.</b> see Grebeshkov A. Yu.		
<b>Ganebnykh S. N.</b> see Lange M. M.		
<b>Gorbunov K. Yu. and Lyubetsky V. A.</b> Algorithm of transformation of a graph into another one with minimal cost	1	79–89
<b>Gorshenin A. K.</b> On some mathematical and programming methods for construction of structural models of information flows	1	58–68
<b>Gorshenin A. K.</b> Pattern-based analysis of probabilistic and statistical characteristics of precipitation	4	38–46
<b>Grebeshkov A. Yu., Gaidamaka Yu. V., Vikhrova O. G., and Zaripova E. R.</b> Analysis of vertical handover time in heterogeneous wireless networks	4	70–78
<b>Grusho A. A., Zabezhalo M. I., Smirnov D. V., and Timonina E. E.</b> The model of the set of information spaces in the problem of insider detection	4	65–69

	Issue	Page
<b>Gudkova I. A. and Shorgin S. Ya.</b> Probability model for analyzing licensed shared access with adaptive power control in a wireless network	3	90–98
<b>Havanskov V. A.</b> see Zatsman I. M.		
<b>Inkova O. Yu. and Popkova N. A.</b> Statistical data as information source for linguistic analysis of Russian connectors	3	123–131
<b>Inkova O. Yu.</b> see Zaliznyak Anna A.		
<b>Ivanov S. V.</b> see Buyanov M. V.		
<b>Kabanov Yu. M.</b> see El Bitar Kh.		
<b>Kabanov Yu. M.</b> see El Bitar Kh.		
<b>Kibzun A. I.</b> see Buyanov M. V.		
<b>Kirikov I. A., Kolesnikov A. V., and Listopad S. V.</b> Computer model of synergy of team decision-making	3	34–41
<b>Kolesnikov A. V.</b> see Kirikov I. A.		
<b>Korepanov E. R.</b> see Sinitsyn I. N.		
<b>Korolev V. Yu.</b> Analogs of gleser’s theorem for negative binomial and generalized gamma distributions and some of their applications	3	2–17
<b>Korolev V. Yu.</b> Some properties of the Mittag-Leffler distribution and related processes	4	26–37
<b>Kovalyov S. P.</b> Methods of category theory in model-based systems engineering	3	42–50
<b>Krivenko M. P.</b> High-density multivariate reference region	2	59–64
<b>Krivenko M. P.</b> Supervised learning classification of incomplete clinical data	3	27–33
<b>Kruzhkov M. G.</b> Approaches to annotation of discourse relations in linguistic corpora	4	118–125
<b>Kudryavtsev A. A. and Titova A. I.</b> Gamma-exponential function in bayesian queueing models	4	104–108
<b>Kuznetsov M. P.</b> see Safin K. F.		
<b>Kuznetsova M. V.</b> see Safin K. F.		
<b>Lange M. M., Ganebnykh S. N., and Lange A. M.</b> On efficiency of the hierarchical algorithm for searching approximate nearest neighbor in a given set of images	3	51–59
<b>Lange A. M.</b> see Lange M. M.		
<b>Lisovskaya E. Yu., Moiseeva S. P., Pagano M., and Potatueva V. V.</b> Study of the MMPP/GI/ $\infty$ queueing system with random customers’ capacities	4	109–117
<b>Listopad S. V.</b> see Kirikov I. A.		
<b>Lukashenko O. V., Morozov E. V., and Pagano M.</b> On the efficiency of Bridge Monte-Carlo estimator	2	16–24
<b>Lukyanov G. V.</b> see Zatsman I. M.		
<b>Lyubetsky V. A.</b> see Gorbunov K. Yu.		
<b>Malashenko Yu. E., Nazarova I. A., and Novikova N. M.</b> Method of analysis of functional vulnerability of flow network systems	4	47–54
<b>Matyushenko S. I.</b> see Meykhanadzhyan L. A.		
<b>Meykhanadzhyan L. A., Matyushenko S. I., Pyatkina D. A., and Razumchik R. V.</b> Revisiting joint stationary distribution in two finite capacity queues operating in parallel	3	106–112
<b>Minin V. A.</b> see Zatsman I. M.		
<b>Moiseeva S. P.</b> см. Lisovskaya E. Yu.		
<b>Mokbel R.</b> see El Bitar Kh.		
<b>Mokbel R.</b> see El Bitar Kh.		
<b>Mokrov E. V.</b> see Naumov V. A.		
<b>Molchanov D. A.</b> see Gaidamaka Yu. V.		
<b>Molybog I. O., Motrenko A. P., and Strijov V. V.</b> Improving classification quality for the task of finding intrinsic plagiarism	3	60–72
<b>Morozov E. V.</b> see Lukashenko O. V.		
<b>Motrenko A. P.</b> see Molybog I. O.		
<b>Naumov A. V.</b> see Buyanov M. V.		
<b>Naumov V. A., Mokrov E. V., and Samouylov K. E.</b> Performance measures analysis of data transfer process to mobile users in LTE cell	4	79–84
<b>Nazarova I. A.</b> see Malashenko Yu. E.,		



	Issue	Page
<b>Nikiforov A. G.</b> see Djukova E. V.		
<b>Novikova N. M.</b> see Malashenko Yu. E.,		
<b>Orlov Yu. N.</b> see Gaidamaka Yu. V.		
<b>Pagano M.</b> see Lukashenko O. V.		
<b>Pagano M.</b> см. Lisovskaya E. Yu.		
<b>Panteleev A. V.</b> see Alekseychuk A. S.		
<b>Parkhomenko V. P.</b> Application of quasi-random ensemble calculations for determination of climate model optimal parameters	2	65–73
<b>Platonov E. N.</b> see Bityukov Y. I.		
<b>Popkova N. A.</b> see Inkova O. Yu.		
<b>Potatueva V. V.</b> см. Lisovskaya E. Yu.		
<b>Prokofyev P. A.</b> see Djukova E. V.		
<b>Pyatkina D. A.</b> see Meykhanadzhyan L. A.		
<b>Raev V. K.</b> see Sigov A. S.		
<b>Razumchik R. V.</b> $M/G/1$ queue with state-dependent heterogeneous batch arrivals, inverse service order, and probabilistic priority	4	10–18
<b>Razumchik R. V.</b> Stationary sojourn times in MAP/PH/1/ $r$ queue with bi-level hysteretic control of arrivals	4	19–25
<b>Razumchik R. V.</b> see Meykhanadzhyan L. A.		
<b>Rudoy G. I.</b> On modification of the mean squared error loss function for solving nonlinear heteroscedastic errors-in-variables problems	2	74–84
<b>Ryazanov V. V.</b> see Dokukin A. A.		
<b>Sachkov V. E.</b> see Sigov A. S.		
<b>Safin K. F., Kuznetsov M. P., and Kuznetsova M. V.</b> Methods for intrinsic plagiarism detection	3	73–79
<b>Samouylov K. E., Sopin E. S., and Shorgin S. Ya.</b> Queuing systems with resources and signals and their application for performance evaluation of wireless networks	3	99–105
<b>Samouylov K. E.</b> see Gaidamaka Yu. V.		
<b>Samouylov K. E.</b> see Naumov V. A.		
<b>Samuylov A. K.</b> see Gaidamaka Yu. V.		
<b>Serebryakov V. A.</b> see Ataeva O. M.		
<b>Seyful-Mulyukov R. B.</b> Informatics and its role for the study of genesis and properties of complex natural systems	1	119–123
<b>Shestakov O. V.</b> Strong consistency of the mean square risk estimate in the inverse statistical problems	2	117–121
<b>Shestakov O. V.</b> Universal thresholding in the models with non-Gaussian noise	2	122–125
<b>Shorgin V. S.</b> see Agalarov Ya. M.		
<b>Shorgin S. Ya.</b> see Gaidamaka Yu. V.		
<b>Shorgin S. Ya.</b> see Gudkova I. A.		
<b>Shorgin S. Ya.</b> see Samouylov K. E.		
<b>Shubnikov S. K.</b> see Zatsman I. M.		
<b>Shut O. V.</b> see Dokukin A. A.		
<b>Sigov A. S., Akimov D. A., Zhukov D. O., Andrianova E. G., Sachkov V. E., and Raev V. K.</b> Psycholinguistic analysis of text messages in russian based on their phonosemantic statistical characteristics	3	80–89
<b>Sinitsyn I. N.</b> Analytical modeling of wide band processes in stochastic systems with unsolved derivatives	1	3–10
<b>Sinitsyn I. N., Sinitsyn V. I., and Korepanov E. R.</b> Modified ellipsoidal conditionally optimal filters for nonlinear stochastic systems on manifolds	2	101–111
<b>Sinitsyn V. I.</b> see Sinitsyn I. N.		
<b>Smirnov D. V.</b> see Grusho A. A.		
<b>Sopin E. S.</b> see Samouylov K. E.		
<b>Stefanovich A. I. and Sushko D. V.</b> Reversible data compression by universal arithmetic coding	1	20–45
<b>Strijov V. V.</b> see Molybog I. O.		

	Issue	Page
<b>Sushko D. V.</b> see Stefanovich A. I.		
<b>Timonina E. E.</b> see Grusho A. A.		
<b>Titova A. I.</b> see Kudryavtsev A. A.		
<b>Ushakov N. G.</b> see Ushakov V. G.		
<b>Ushakov V. G. and Ushakov N. G.</b> Single server queueing system with dependent interarrival times	2	112–116
<b>Vasilyev N. S.</b> Participants' information awareness and existence of equilibrium in positional iteration games of many players	2	42–49
<b>Vikhrova O. G.</b> see Grebeshkov A. Yu.		
<b>Zabekhailo M. I.</b> see Grusho A. A.		
<b>Zakharov V. N.</b> see Frenkel S. L.		
<b>Zakharova T. V.</b> see Dranitsyna M. A.		
<b>Zaliznyak Anna A., Zatsman I. M., and Inkova O. Yu.</b> Supracorpora database on connectives: Term system development	1	100–108
<b>Zaripova E. R.</b> see Grebeshkov A. Yu.		
<b>Zatsman I. M., Lukyanov G. V., Minin V. A., Havanskov V. A., and Shubnikov S. K.</b> Indicator evaluation of processes of knowledge transfer from science to technology	3	132–141
<b>Zatsman I. M.</b> see Zaliznyak Anna A.		
<b>Zhukov D. O.</b> see Sigov A. S.		

---

## Правила подготовки рукописей для публикации в журнале «Информатика и её применения»

---

Журнал «Информатика и её применения» публикует теоретические, обзорные и дискуссионные статьи, посвященные научным исследованиям и разработкам в области информатики и ее приложений.

Журнал издается на русском языке. По специальному решению редколлегии отдельные статьи могут печататься на английском языке.

Тематика журнала охватывает следующие направления:

- теоретические основы информатики;
- математические методы исследования сложных систем и процессов;
- информационные системы и сети;
- информационные технологии;
- архитектура и программное обеспечение вычислительных комплексов и сетей.

1. В журнале печатаются статьи, содержащие результаты, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях.

Публикация предоставленной автором(ами) рукописи не должна нарушать положений глав 69, 70 раздела VII части IV Гражданского кодекса, которые определяют права на результаты интеллектуальной деятельности и средства индивидуализации, в том числе авторские права, в РФ.

Ответственность за нарушение авторских прав, в случае предъявления претензий к редакции журнала, несут авторы статей.

Направляя рукопись в редакцию, авторы сохраняют свои права на данную рукопись и при этом передают учредителям и редколлегии журнала неисключительные права на издание статьи на русском языке (или на языке статьи, если он отличен от русского) и на перевод ее на английский язык, а также на ее распространение в России и за рубежом. Каждый автор должен представить в редакцию подписанный с его стороны «Лицензионный договор о передаче неисключительных прав на использование произведения», текст которого размещен по адресу <http://www.ipiran.ru/publications/licence.doc>. Этот договор может быть представлен в бумажном (в 2-х экз.) или в электронном виде (отсканированная копия заполненного и подписанного документа).

Редколлегия вправе запросить у авторов экспертное заключение о возможности публикации предоставленной статьи в открытой печати.

2. К статье прилагаются данные автора (авторов) (см. п. 8). При наличии нескольких авторов указывается фамилия автора, ответственного за переписку с редакцией.

3. Редакция журнала осуществляет экспертизу присланных статей в соответствии с принятой в журнале процедурой рецензирования.

Возвращение рукописи на доработку не означает ее принятия к печати.

Доработанный вариант с ответом на замечания рецензента необходимо прислать в редакцию.

4. Решение редколлегии о публикации статьи или ее отклонении сообщается авторам.

Редколлегия может также направить авторам текст рецензии на их статью. Дискуссия по поводу отклоненных статей не ведется.

5. Редактура статей высылается авторам для просмотра. Замечания к редакции должны быть присланы авторами в кратчайшие сроки.

6. Рукопись предоставляется в электронном виде в форматах MS WORD (.doc или .docx) или  $\LaTeX$  (.tex), дополнительно — в формате .pdf, на дискете, лазерном диске или электронной почтой. Предоставление бумажной рукописи необязательно.

7. При подготовке рукописи в MS Word рекомендуется использовать следующие настройки.

Параметры страницы: формат — А4; ориентация — книжная; поля (см): внутри — 2,5, снаружи — 1,5, сверху — 2, снизу — 2, от края до нижнего колонтитула — 1,3.

Основной текст: стиль — «Обычный», шрифт — Times New Roman, размер — 14 пунктов, абзацный отступ — 0,5 см, 1,5 интервала, выравнивание — по ширине.

Рекомендуемый объем рукописи — не свыше 15 страниц указанного формата. При превышении указанного объема редколлегия вправе потребовать от автора сокращения объема рукописи.

Сокращения слов, помимо стандартных, не допускаются. Допускается минимальное количество аббревиатур.

Все страницы рукописи нумеруются.

Шаблоны примеров оформления представлены в Интернете: <http://www.ipiran.ru/journal/template.doc>

8. Статья должна содержать следующую информацию на **русском и английском языках**:

- название статьи;
- Ф.И.О. авторов, на английском можно только имя и фамилию;
- место работы, с указанием почтового адреса организации и электронного адреса каждого автора;
- сведения об авторах, в соответствии с форматом, образцы которого представлены на страницах:  
[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01\\_rus/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_rus/authors.asp) и  
[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01\\_eng/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp);
- аннотация (не менее 100 слов на каждом из языков). Аннотация — это краткое резюме работы, которое может публиковаться отдельно. Она является основным источником информации в информационных системах и базах данных. Английская аннотация должна быть оригинальной, может не быть дословным переводом русского текста и должна быть написана хорошим английским языком. В аннотации не должно быть ссылок на литературу и, по возможности, формул;
- ключевые слова — желательно из принятых в мировой научно-технической литературе тематических тезаурусов. Предложения не могут быть ключевыми словами;
- источники финансирования работы (ссылки на гранты, проекты, поддерживающие организации и т. п.).

9. Требования к спискам литературы.

Ссылки на литературу в тексте статьи нумеруются (в квадратных скобках) и располагаются в каждом из списков литературы в порядке первых упоминаний.

Списки литературы представляются в двух вариантах:

- (1) **Список литературы к русскоязычной части.** Русские и английские работы — на языке и в алфавите оригинала;
- (2) **References.** Русские работы и работы на других языках — в латинской транслитерации с переводом на английский язык; английские работы и работы на других языках — на языке оригинала.

Необходимо для составления списка “References” пользоваться размещенной на сайте <http://www.translit.net/ru/bgn/> бесплатной программой транслитерации русского текста в латиницу.

Список литературы “References” приводится полностью отдельным блоком, повторяя все позиции из списка литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке литературы к русскоязычной части есть ссылки на иностранные публикации, набранные латиницей, они полностью повторяются в списке “References”.

Ниже приведены примеры ссылок на различные виды публикаций в списке “References”.

**Описание статьи из журнала:**

Zagurenko, A. G., V. A. Korotovskikh, A. A. Kolesnikov, A. V. Timonov, and D. V. Kardymon. 2008. Tekhniko-ekonomicheskaya optimizatsiya dizayna gidrorazryva plasta [Technical and economic optimization of the design of hydraulic fracturing]. *Neftyanoe hozyaystvo [Oil Industry]* 11:54–57.

Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Rus. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.

**Описание статьи из электронного журнала:**

Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).

**Описание статьи из продолжающегося издания (сборника трудов):**

Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedineniy “stal’—kompozit” [Experimental study of the strength of joints “steel—composite”]. *Trudy MGTU “Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem” [Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems” Proceedings]*. 593:125–130.

**Описание материалов конференций:**

Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursosberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi"* [6th Symposium (International) "New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact" Proceedings]. Moscow. 267–272.

**Описание книги (монографии, сборники):**

Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publs. 352 p.

Latyshev, V. N. 2009. *Tribologiya rezaniya. Kn. 1: Friksionnye protsessy pri rezanii metallov* [Tribology of cutting. Vol. 1: Frictional processes in metal cutting]. Ivanovo: Ivanovskii State Univ. 108 p.

**Описание переводной книги** (в списке литературы к русскоязычной части необходимо указать: / Пер. с англ. — после названия книги, а в конце ссылки указать оригинал книги в круглых скобках):

1. В русскоязычной части:

Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1985. 472 с. (Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver W. *Vibration problems in engineering*. — 4th ed. — N.Y.: Wiley, 1974. 521 p.)

2. В англоязычной части:

Timoshenko, S. P., D. H. Young, and W. Weaver. 1974. *Vibration problems in engineering*. 4th ed. N.Y.: Wiley. 521 p.

**Описание неопубликованного документа:**

Latypov, A. R., M. M. Khasanov, and V. A. Baikov. 2004. Geology and production (NGT GiD). Certificate on official registration of the computer program No. 2004611198. (In Russian, unpubl.)

**Описание интернет-ресурса:**

Pravila tsitirovaniya istochnikov [Rules for the citing of sources]. Available at: <http://www.scribd.com/doc/1034528/> (accessed February 7, 2011).

**Описание диссертации или автореферата диссертации:**

Semenov, V. I. 2003. *Matematicheskoe modelirovanie plazmy v sisteme kompaktnyy tor* [Mathematical modeling of the plasma in the compact torus]. D.Sc. Diss. Moscow. 272 p.

Kozhunova, O. S. 2009. *Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovary informatsionnogo monitoringa* [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. PhD Thesis. Moscow: IPI RAN. 23 p.

**Описание ГОСТа:**

GOST 8.586.5-2005. 2007. *Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv* [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. Moscow: Standardinform Publs. 10 p.

**Описание патента:**

Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. *Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya* [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.

10. Присланные в редакцию материалы авторам не возвращаются.

11. При отправке файлов по электронной почте просим придерживаться следующих правил:

- указывать в поле subject (тема) название журнала и фамилию автора;
- использовать attach (присоединение);
- в состав электронной версии статьи должны входить: файл, содержащий текст статьи, и файл(ы), содержащий(е) иллюстрации.

12. Журнал «Информатика и её применения» является некоммерческим изданием. Плата за публикацию не взимается, гонорар авторам не выплачивается.

**Адрес редакции журнала «Информатика и её применения»:**

Москва 119333, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН

Тел.: +7 (499) 135-86-92 Факс: +7 (495) 930-45-05

e-mail: [rust@ipiran.ru](mailto:rust@ipiran.ru) (Сейфуль-Мулюков Рустем Бадриевич)

<http://www.ipiran.ru/journal/issues/>



---

## Requirements for manuscripts submitted to Journal “Informatics and Applications”

---

Journal “Informatics and Applications” (Inform. Appl.) publishes theoretical, review, and discussion articles on the research and development in the field of informatics and its applications.

The journal is published in Russian. By a special decision of the editorial board, some articles can be published in English.

The topics covered include the following areas:

- theoretical fundamentals of informatics;
- mathematical methods for studying complex systems and processes;
- information systems and networks;
- information technologies; and
- architecture and software of computational complexes and networks.

1. The Journal publishes original articles which have not been published before and are not intended for simultaneous publication in other editions. An article submitted to the Journal must not violate the Copyright law. Sending the manuscript to the Editorial Board, the authors retain all rights of the owners of the manuscript and transfer the nonexclusive rights to publish the article in Russian (or the language of the article, if not Russian) and its distribution in Russia and abroad to the Founders and the Editorial Board. Authors should submit a letter to the Editorial Board in the following form:

***Agreement on the transfer of rights to publish:***

*“We, the undersigned authors of the manuscript “. . . ”, pass to the Founder and the Editorial Board of the Journal “Informatics and Applications” the nonexclusive right to publish the manuscript of the article in Russian (or in English) in both print and electronic versions of the Journal. We affirm that this publication does not violate the Copyright of other persons or organizations.*

*Author(s) signature(s): (name(s), address(es), date).*

This agreement should be submitted in paper form or in the form of a scanned copy (signed by the authors).

2. A submitted article should be attached with **the data on the author(s)** (see item 8). If there are several authors, the contact person should be indicated who is responsible for correspondence with the Editorial Board and other authors about revisions and final approval of the proofs.
3. The Editorial Board of the Journal examines the article according to the established reviewing procedure. If the authors receive their article for correction after reviewing, it does not mean that the article is approved for publication. The corrected article should be sent to the Editorial Board for the subsequent review and approval.
4. The decision on the article publication or its rejection is communicated to the authors. The Editorial Board may also send the reviews on the submitted articles to the authors. Any discussion upon the rejected articles is not possible.
5. The edited articles will be sent to the authors for proofread. The comments of the authors to the edited text of the article should be sent to the Editorial Board as soon as possible.
6. The manuscript of the article should be presented electronically in the MS WORD (.doc or .docx) or  $\LaTeX$  (.tex) formats, and additionally in the .pdf format. All documents may be sent by e-mail or provided on a CD or diskette. A hard copy submission is not necessary.
7. The recommended typesetting instructions for manuscript.

Pages parameters: format A4, portrait orientation, document margins (cm): left — 2.5, right — 1.5, above — 2.0, below — 2.0, footer 1.3.

Text: font — Times New Roman, font size — 14, paragraph indent — 0.5, line spacing — 1.5, justified alignment.

The recommended manuscript size: not more than 15 pages of the specified format. If the specified size exceeded, the editorial board is entitled to require the author to reduce the manuscript.

Use only standard abbreviations. Avoid abbreviations in the title and abstract. The full term for which an abbreviation stands should precede its first use in the text unless it is a standard unit of measurement.

All pages of the manuscript should be numbered.

The templates for the manuscript typesetting are presented on site: <http://www.ipiran.ru/journal/template.doc>.

8. The articles should enclose data both in **Russian and English**:

- title;
- author’s name and surname;
- affiliation — organization, its address with ZIP code, city, country, and official e-mail address;
- data on authors according to the format: (see site)

[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01/authors.asp) and

[http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013\\_07\\_01\\_eng/authors.asp](http://www.ipiran.ru/journal/issues/2013_07_01_eng/authors.asp);

- abstract (not less than 100 words) both in Russian and in English. Abstract is a short summary of the article that can be published separately. The abstract is the main source of information on the article and it could be included in leading information systems and data bases. The abstract in English has to be an original text and should not be an exact translation of the Russian one. Good English is required. In abstracts, avoid references and formulae;
  - indexing is performed on the basis of keywords. The use of keywords from the internationally accepted thematic Thesauri is recommended.  
Important! Keywords must not be sentences;
  - Acknowledgments.
9. References. Russian references have to be presented both in English translation and Latin transliteration (refer <http://www.translit.net/ru/bgn/>).
- Please take into account the following examples of Russian references appearance:
- Article in journal:**  
Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Rus. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.
- Journal article in electronic format:**  
Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).
- Article from the continuing publication (collection of works, proceedings):**  
Astakhov, M. V., and T. V. Tagantsev. 2006. Eksperimental’noe issledovanie prochnosti soedineniy “stal’–kompozit” [Experimental study of the strength of joints “steel–composite”]. *Trudy MGTU “Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem” [Bauman MSTU “Mathematical Modeling of Complex Technical Systems” Proceedings]*. 593:125–130.
- Conference proceedings:**  
Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma “Novye resursosberegayushchie tekhnologii nedropol’zovaniya i povysheniya neftegazoidachi” [6th Symposium (International) “New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact” Proceedings]*. Moscow. 267–272.
- Books and other monographs:**  
Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem [Operation of turbine generators with direct cooling]*. Moscow: Energy Publs. 352 p.
- Dissertation and Thesis:**  
Kozhunova, O. S. 2009. Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovary informatsionnogo monitoringa [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. PhD Thesis. Moscow: IPI RAN. 23 p.
- State standards and patents:**  
GOST 8.586.5-2005. 2007. Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch’yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. M.: Standardinform Publs. 10 p.  
Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. Sposob orientirovaniya po krenu letatel’nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.
- References in Latin transcription are presented in the original language.  
References in the text are numbered according to the order of their first appearance; the number is placed in square brackets.  
All items from the reference list should be cited.
10. Manuscripts and additional materials are not returned to Authors by the Editorial Board.
11. Submissions of files by e-mail must include:
- the journal title and author’s name in the “Subject” field;
  - an article and additional materials have to be attached using the “attach” function;
  - an electronic version of the article should contain the file with the text and a separate file with figures.
12. “Informatics and Applications” journal is not a profit publication. There are no charges for the authors as well as there are no royalties.

**Editorial Board address:**

FRC CSC RAS, 44, block 2, Vavilov Str., Moscow 119333, Russia  
Ph.: +7 (499) 135 86 92, Fax: +7 (495) 930 45 05  
e-mail: [rust@ipiran.ru](mailto:rust@ipiran.ru) (to Prof. Rustem Seyful-Mulyukov)  
<http://www.ipiran.ru/english/journal.asp>