СИСТЕМЫ И СРЕДСТВА ИНФОРМАТИКИ

**Научный журнал Российской академии наук
(издается под руководством Отделения нанотехнологий
и информационных технологий РАН)**

Издается с 1989 года
Журнал выходит ежеквартально

**Учредитель:
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление» Российской академии наук**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

академик РАН И. А. Соколов — председатель Редакционного совета
академик РАН Г. И. Савин
академик РАН А. Л. Стемпковский
профессор Ш. Долев (S. Dolev, Beer-Sheva, Israel)
профессор Ю. Кабанов (Yu. Kabanov, Besancon, France)
профессор В. Ротарь (V. Rotar, San-Diego, USA)
профессор М. Финкельштейн (M. Finkelstein, Bloemfontein, South Africa)
профессор В. Хофкирхнер (W. Hofkirchner, Wien, Austria)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

академик РАН И. А. Соколов — главный редактор
проф., д.ф.-м.н. С. Я. Шоргин — заместитель главного редактора
д.т.н. В. Н. Захаров
проф., д.ф.-м.н. А. И. Зейфман
проф., д.т.н. В. Д. Ильин
проф., д.т.н. К. К. Колин
проф., д.ф.-м.н. В. Ю. Королев
д.ф.-м.н. Р. В. Разумчик
д.ф.-м.н. В. И. Синицын
проф., д.т.н. И. Н. Синицын
проф., д.ф.-м.н. В. Г. Ушаков
д.ф.-м.н. А. К. Горшенин — отв. секретарь
к.ф.-м.н. С. А. Христочевский

Редакция

к.ф.-м.н. Е. Н. Арутюнов
С. Н. Стригина

© Федеральный исследовательский центр «Информатика
и управление» Российской академии наук, 2026

Журнал включен в базу данных Russian Science Citation Index (RSCI),
интегрированную с Web of Science, и в «Белый список» научных журналов
Журнал входит в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)
Журнал включен в базу данных CrossRef (систему DOI — Digital Object Identifier),
в базу данных Ulrich's periodicals directory
и в информационную систему «Общероссийский математический портал Math-Net.Ru»

Журнал реферируется в «Реферативном журнале» ВИНИТИ
и в системе Google Scholar

Журнал включен в сформированный Минобрнауки России Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук

http://www.ipiran.ru/journal/collected

СИСТЕМЫ И СРЕДСТВА ИНФОРМАТИКИ

Том 36 № 3 Год 2026

СОДЕРЖАНИЕ

Прогнозирование рисков неблагоприятных событий в сетях передачи и обработки данных
В. Ю. Королев, Д. Ю. Волканов, Т. Д. Герасин **3**

Критерий стационарности системы обслуживания с неидентичными серверами и заявками разных классов
Е. В. Морозов **35**

Алгоритм управления перегрузкой с использованием экспоненциальной векторной авторегрессии
Фэнжуй Го, Р. Л. Смелянский **47**

Эффективность квантового распределения ключей в спутниковой оптической связи
М. В. Сапожников, С. Ю. Казанцев, Ю. Б. Миронов, Б. М. Шабанов, А. Е. Матюнин **69**

Оценка риска в задаче обращения преобразования Радона при использовании непрерывных пороговых функций
А. А. Кудрявцев, О. В. Шестаков **86**

Количественный анализ растрескивания в полимерных композиционных материалах по данным компьютерной томографии
А. В. Пантелеев, Н. В. Турбин, Н. А. Тучков, Р. Л. Талья, К. В. Акчупанов, К. К. Ибришев **102**

Вейвлет-нейросетевой синтез билинейной стохастической системы
И. Н. Синицын, В. И. Синицын, Э. Р. Корепанов, Т. Д. Конашенкова **128**

Интерпретируемое статистическое моделирование качества документации и его временной динамики
А. А. Сачко, А. М. Сачко, В. Ю. Поздышев **150**

Интеграция методов и решений искусственного интеллекта в сетецентрических системах управления
А. А. Грушо, Н. А. Грушо, М. И. Забежайло, А. А. Зацаринный, В. О. Писковский **172**

ИСТОРИЯ. ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ. СОБЫТИЯ

Преданность жизни, науке и делу (к 70-летию со дня рождения Ю. С. Ионенкова)
А. А. Зацаринный, С. В. Козлов **190**

Об авторах **193**

Правила подготовки рукописей статей **196**

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РИСКОВ НЕБЛАГОПРИЯТНЫХ СОБЫТИЙ В СЕТЯХ ПЕРЕДАЧИ И ОБРАБОТКИ ДАННЫХ*

***В. Ю. Королев*[1], *Д. Ю. Волканов*[2], *Т. Д. Герасин*[3]**

Аннотация: Предложен алгоритм прогнозирования рисков неблагоприятных событий, связанных с аномальными изменениями характеристик качества обслуживания (КО) в каналах связи, на основе модифицированного POT (Peaks-Over-Threshold) метода. Рассматриваются данные, представляющие собой временной ряд значений четырех показателей качества обслуживания: пропускная способность, задержка при передаче пакета, джиттер и доля потерь пакетов, агрегированных за единицу времени (посекундно). Эти показатели были рассчитаны на основе информации, собранной в реальной сети передачи и обработки данных (СПОД). В качестве неблагоприятных событий рассмотрены перегрузки, потери пакетов и недопустимые значения задержки в СПОД. Предложенный метод позволяет прогнозировать риски неблагоприятных событий — вычислять вероятности их осуществления в течение заданных интервалов времени или оценивать распределение длины интервала времени до их наступления. Метод ориентирован на применение в оконном режиме, что позволяет использовать его для анализа неоднородных и нестационарных процессов и/или потоков событий. Цель прогнозирования заключается в выборе оптимального канала связи с учетом соответствующих требований к качеству передачи и состояния сети, гарантирующих заданные значения параметров качества обслуживания.

Ключевые слова: сети передачи и обработки данных; качество обслуживания; обобщенная теорема Реньи; теорема Балкемы – Пикандса – Де Хаана; POT-метод; прогнозирование рисков неблагоприятных событий

DOI: 10.14357/08696527260301 **EDN:** OHZJFM

1 Введение

В современном мире наблюдается постоянный рост объема сетевого трафика в СПОД. Например, с 2015 по 2020 гг. объем трафика, передаваемого через Интернет, возрос с 0,16 до 0,5 Пбит/с [1]. В России за последние 10 лет

*Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2025-345.

[1]Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, vkorolev@cs.msu.ru

[2]Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, volkanov@asvk.cs.msu.ru

[3]Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, timger2357@gmail.com

рост составлял в среднем 26%, достигнув 184,1 ЭБ в 2024 г. [2, 3]. Для передачи таких объемов информации важно обеспечить заданный уровень КО. Качество обслуживания — технология предоставления определенным классам трафика различных приоритетов в обслуживании [4]. Обычно рассматривают следующие 4 показателя КО [5]:

(1) пропускная способность (bandwidth);

(2) задержка при передаче пакета (latency);

(3) джиттер (jitter);

(4) доля потерь пакетов (loss ratio).

Нагрузка на каналы передачи данных увеличивается и может превысить их пропускную способность, вызвав перегрузку. Перегрузкой канала называется состояние, когда суммарная интенсивность поступления потоков на его вход превышает пропускную способность [6]. Данное состояние влечет за собой серьезное ухудшение КО пользователей. Это ухудшение проявляется в увеличении задержек пакетов данных, росте их разброса и потере части передаваемых пакетов. Один из методов борьбы с перегрузкой — распределение потоков данных по нескольким маршрутам, за счет чего снижается нагрузка на отдельные каналы связи. Такое перераспределение называется балансировкой трафика, и оно позволяет избежать перегрузки при условии, что распределитель заранее проинформирован о надвигающейся перегрузке. Возникает важное направление в разработке оптимальных распределителей сетевого трафика, а именно: предсказание перегрузок в сети, а также связанных с ними аномальных величин задержки пакетов и доли потерянных пакетов. Особенность задачи заключается в вычислительных ограничениях метода предсказания: для его применимости на сетевых устройствах различных уровней приходится работать с ограниченными объемом памяти и вычислительными мощностями, присущими встроенным системам.

Данные сетевого трафика, используемые для прогноза, представляют собой векторный временной ряд характеристик канала связи, агрегированных (усредненных) по коротким промежуткам времени, например по миллисекундам. Задача прогнозирования значений временны́х рядов — одна из традиционных задач математической статистики и интеллектуального анализа данных. Для ее решения используются многие модели авторегрессионного типа [7–13], классические модели машинного обучения [14–16] и нейросетевые методы [17–20]. Модели и методы, упомянутые выше, фокусируются на оценке (предсказании) *конкретных значений временно́го ряда* на заданном горизонте прогнозирования. При выборе канала в процессе балансировки важно учитывать не только соответствие его показателей КО требованиям приложения, но и вероятность неблагоприятного события в этом канале. Из всех каналов с подходящими показателями КО следует выбирать тот, где данная вероятность наименьшая. В настоящей работе исследуется метод прогнозирования *рисков*, учитывающий этот аспект.

Описанный подход был выбран авторами по следующим причинам. Во-первых, прогнозирование конкретных значений характеристик КО в СПОД для данной задачи в некотором смысле избыточно. Во-вторых, при прогнозировании значений неизбежны ошибки, которые сложно оценить или объяснить (особенно при использовании нейросетевых методов). В-третьих, выходы характеристик КО СПОД за заданные пределы представляют собой так называемые редкие события, что затрудняет формирование обучающих выборок для моделей машинного обучения или нейросетевых методов.

В рамках решаемой задачи особую важность представляют риски, связанные с критическими значениями характеристик, например аномально высокие значения доли потерянных пакетов. Стоит отметить, что рядовые колебания, например флуктуации среднего значения задержки в пределах исторического стандартного отклонения, не представляют интереса.

Для решения задачи прогнозирования рисков, связанных с нарушением характеристик КО, в данной работе применяется модифицированный метод превышений порога (POT-метод), основанный на обобщенной теореме Реньи [21] и теореме Балкемы – Пикандса – Де Хаана [22, 23]. Этот метод считается относительно вычислительно простым и нетребовательным по памяти.

В работе рассматриваются данные, представляющие собой временной ряд значений четырех показателей характеристик КО, указанных выше (пропускная способность, задержка при передаче пакета, джиттер, доля потерь пакетов) агрегированных за единицу времени (посекундно). Эти показатели были рассчитаны на основе собранных данных в реальной СПОД.

Статья имеет следующую структуру. Раздел 2 содержит описание метода прогнозирования рисков неблагоприятных событий и теоретических результатов, обеспечивающих его работу. В разд. 3 приведено описание экспериментальных данных и результаты экспериментального исследования.

2 Метод прогнозирования рисков неблагоприятных событий

2.1 Описание математической модели. Экстремальный процесс

Рассмотрим систему, подвергающуюся влиянию определенного фактора. Предположим, что сила воздействия этого фактора на систему в каждый момент времени характеризуется числом, изменяющимся во времени. Примерами таких систем служат:

- канал связи, на КО в котором влияет его загрузка; критически большие значения загрузки делают передачу сообщений по каналу невозможной;
- канал спутниковой связи, на качество функционирования которого влияет состояние ионосферы, определяемое индексом солнечной активности; при критически высокой солнечной активности качество связи катастрофически ухудшается.

При этом возникает задача прогнозирования катастрофических событий, препятствующих корректному выполнению системой своих функций. Катастрофой в информационной системе будем называть любое событие, связанное с нарушением требуемых условий качества передачи информации. Однако без применения специализированных подходов, ориентированных на противодействие конкретным рискам, практически невозможно абсолютно точно предсказать силу воздействия фактора на систему в каждый момент времени в будущем. Другими словами, будущее развитие фактора непредсказуемо, вследствие чего значение числа, характеризующего силу воздействия на систему, целесообразно рассматривать как *случайный процесс*. Следовательно, задача прогнозирования самого́ момента катастрофы сводится к прогнозированию *значения* случайного процесса (т. е. его значения на вполне определенном элементе множества элементарных исходов) специальными методами, что чрезвычайно трудоемко и при рассмотрении современных сложных стохастических систем (например, СПОД) практически нереализуемо с приемлемой точностью. В то же время возникает вполне реальная и важная задача прогнозирования *распределения* указанного случайного процесса в те или иные моменты времени, т. е. задача прогнозирования его статистических свойств. В результате решения этой задачи появляется возможность правильно оценить уровни угрозы в каждой конкретной ситуации. Один из возможных методов решения последней задачи и рассматривается в данной статье.

Предположим, что очень большие изменения случайного процесса, характеризующего воздействие фактора, неблагоприятно влияют на систему и могут вызвать ее необратимые изменения. Вместе с тем малые флуктуации случайного процесса, характеризующего воздействие фактора на систему, вполне допустимы (в таких случаях говорят о «фоновом значении» фактора). Ввиду этого для предсказания катастроф разумно рассматривать не все изменения случайного процесса, а лишь такие, величина которых превышает некоторый *потенциально опасный порог*.

Будем говорить, что моменты превышения случайным процессом потенциально опасного порога, рассматриваемые совместно с величинами этих превышений, образуют *экстремальный случайный процесс*. Другими словами, экстремальным процессом будем называть маркированный точечный процесс $\{(\tau_i, X_i)\}_{i\geq 1}$, где $\{\tau_i\}_{i\geq 1}$ — точечный случайный процесс; $\{X_i\}_{i\geq 1}$ — случайные величины. Далее по смыслу задачи будет предполагаться, что $X_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$

Среди всех превышений случайным процессом потенциально опасного порога лишь некоторые очень большие влекут катастрофические последствия, поэтому наряду с *потенциально опасным порогом* рассмотрим *критический порог*, превышение которого экстремальным процессом и будем считать *катастрофой*.

Для удобства точку отсчета (нуль временно́й шкалы) поместим в то время, которое будем считать «настоящим». Тем самым «настоящее» характеризуется значением $t = 0$.

Поскольку по условию экстремальный процесс считается случайным, то *нельзя* точно предсказать момент наступления очередной катастрофы. Однако

можно вычислить или оценить *вероятности наступления катастрофы* в течение некоторого интервала времени $[0, \tau)$, где $\tau > 0$. Если T — момент наступления катастрофы, то событие «катастрофа наступила в течение интервала времени $[0, \tau)$» эквивалентно тому, что $T < \tau$. В качестве *исходных данных* будем использовать информацию о развитии экстремального процесса на некотором интервале времени $[t_0, t_1]$, где $t_0 < t_1 < 0$.

В настоящей работе описан метод оценивания указанных вероятностей наступления катастроф, основанный на довольно сложных математических моделях — обобщенной теореме Реньи и теореме Балкемы – Пикандса – Де Хаана. Особенность этого подхода заключается в том, что для прогнозирования возможности наступления катастроф, *необязательно иметь статистику самих катастроф*.

Простейший вариант этого метода описан в книге [24], где предполагалось, что экстремальный процесс представляет собой маркированный процесс восстановления, а именно: в указанных работах принималось, что моменты $\tau_1, \tau_2, \ldots$ превышений исходным процессом потенциально опасного порога образуют процесс восстановления. Это означает, что случайные величины

$$\zeta_i = \tau_i - \tau_{i-1}, \;\; i = 1, 2, \ldots, \;\; \tau_0 = 0, \tag{1}$$

независимы и имеют одинаковое распределение, т. е. подчиняются одним и тем же статистическим закономерностям. Другими словами, интенсивность потока экстремальных событий считалась постоянной. В то же время в реальных сложных системах, которые в большинстве случаев не относятся к информационно и/или энергетически замкнутым и подвержены влиянию внешней среды, интенсивности потоков информативных событий не являются постоянными. Например, при адекватном прогнозировании поведения индексов в высокочастотных финансовых системах важную роль играет представление о том, что интенсивности информационных потоков на финансовых рынках являются случайными [25]. Отказ от предположения о постоянстве интенсивности потока экстремальных событий приводит к необходимости допустить, что случайные величины (1) имеют неодинаковое распределение. Именно такое обобщение подходов, предложенных в [24], и будет описано ниже применительно к прогнозированию статистических закономерностей поведения характеристик качества каналов связи в современных информационных системах.

Обозначим величину превышения исходным процессом потенциально опасного порога в момент τ_i символом X_i, $i = 1, 2, \ldots$ Будем считать что $X_1, X_2, \ldots$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины. Это означает, что значения этих случайных величин подчиняются одним и тем же статистическим закономерностям, характеризуемым функцией распределения

$$F(x) = \mathsf{P}(X_i < x), \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; i = 1, 2, \ldots$$

Будем считать, что последовательность $X_1, X_2, \ldots$ статистически независима от последовательности $\tau_1, \tau_2, \ldots$

Пусть x_0 – критический порог, превышение которого значением X_i и есть катастрофа (т. е. катастрофическое событие формально записывается в виде неравенства $X_i \geq x_0$).

Очевидно, что время T наступления катастрофы (т. е. время первого превышения уровня x_0 какой-либо из величин X_i) можно представить в виде суммы

$$T = \zeta_1 + \cdots + \zeta_N, \tag{2}$$

где случайные величины ζ_j определены соотношением (1), а N — это случайная величина, имеющая геометрическое распределение с параметром $\mathsf{P}(X_i < x_0) = F(x_0)$. Это означает, что

$$\mathsf{P}(N = k) = (F(x_0))^{k-1}\,(1 - F(x_0))\,, \;\; k = 1, 2, \ldots$$

Суммы вида (2) называются геометрическими. В силу независимости последовательностей $X_1, X_2, \ldots$ и $\tau_1, \tau_2, \ldots$ случайная величина N (число слагаемых в сумме (2)) независима от самих слагаемых $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ При этом принципиальное отличие геометрических случайных сумм, рассматриваемых здесь, от геометрических сумм в традиционном понимании (см., например, [26, 27]) заключается в том, что в данном случае слагаемые необязательно имеют одинаковое распределение, тогда как в указанных классических книгах изучались геометрические суммы одинаково распределенных слагаемых и, соответственно, использовались методы, ориентированные именно на такую ситуацию.

2.2 Вспомогательные теоретические результаты

В рамках подхода, используемого в данной работе, краеугольными камнями служат два теоретических результата. Первый из них — версия закона больших чисел для случайных сумм неодинаково распределенных случайных величин (теорема 1 ниже), обосновывающая использование распределения Вейбулла–Гнеденко в качестве модели распределения интервалов времени между катастрофами. Второй — теорема Балкемы – Пикандса – Де Хаана (теорема 2 ниже), обосновывающая использование обобщенного распределения Парето в качестве модели распределения критических значений неблагоприятного фактора при достаточно большом критическом пороге x_0. Эти два общих результата лежат в основе предлагаемого метода.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — необязательно одинаково распределенные случайные величины. Для каждого натурального $n \geq 1$ положим $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$. Рассмотрим последовательность целочисленных неотрицательных случайных величин $\{N_n\}_{n\geq 1}$ и будем считать, что при каждом n случайные величины N_n, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы в совокупности. Везде далее символ $\Longrightarrow$ будет обозначать сходимость по распределению.

Для формальной корректности рассмотрим асимптотическую постановку: пусть $x_n = x_{0,n}$ — (возрастающая) последовательность критических порогов такая, что

$$p_n \equiv 1 - F(x_n) \longrightarrow 0 \;\; (n \to \infty).$$

Тогда случайная величина $N = N_n$ имеет геометрическое распределение с параметром $q_n = 1 - p_n$. При этом $\mathsf{E}N_n = p_n^{-1}$ и, как хорошо известно,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\geq 0} \left|\mathsf{P}\left(p_n N_n \geq y\right) - e^{-y}\right| = 0.$$

В работе [21] доказана следующая теорема, обобщающая классическую теорему Реньи (закон больших чисел для геометрических сумм) на случай неодинаково распределенных слагаемых.

Теорема 1. *Предположим, что случайная величина N_n имеет геометрическое распределение с параметром p_n, причем $p_n \to 0$ при $n \to \infty$. Предположим, что существуют конечные $\gamma > 0$ и $b > 0$ такие, что*

$$\frac{S_n}{bn^{\gamma}} \Longrightarrow 1 \ \ (n \to \infty).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 0} \left|\mathsf{P}\left(p_n^{\gamma} S_{N_n} \geq bx\right) - \exp\left\{-x^{1/\gamma}\right\}\right| = 0.$$

Заметим, что значения $\gamma > 1$ соответствуют той ситуации, когда случайные величины ζ_i «в среднем» возрастают, т. е. экстремальные события происходят все реже и реже, значения $\gamma < 1$ соответствуют той ситуации, когда случайные величины ζ_i «в среднем» убывают, т. е. экстремальные события происходят все чаще и чаще, а значение $\gamma = 1$ соответствует той ситуации, когда интенсивность потока экстремальных событий «в среднем» постоянна, например в поведении интенсивности наблюдаются проявления цикличности, причем периоды изменения интенсивности заметно меньше периода фиксации наблюдений.

В силу неоднородности данных при $\gamma \neq 1$ предельным распределением в теореме 1 служит распределение Вейбулла. В общем случае, в отличие от экспоненциального распределения (которому соответствует $\gamma = 1$), у такого распределения есть память (последействие). Поэтому при прогнозировании рисков катастрофических событий описываемым методом имеет смысл для повышения точности прогнозов использовать информацию о том, когда была зафиксирована последняя по времени катастрофа и рассматривать соответствующие условные вероятности.

Второй краеугольный результат для рассматриваемого метода прогнозирования катастроф – это теорема Балкемы – Пикандса – Де Хаана, на которой основан так называемый метод превышений порога (POT-метод).

Пусть случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)$. В рамках рассматриваемого метода прогнозирования катастроф как превышений экстремальным процессом критических уровней большой интерес представляет описание условного распределения превышения случайной величиной X некоторого (большого) порога u

$$F_u(y) = \mathsf{P}(X - u < y | X > u), 0 \leq y \leq x_F - u,$$

где $y = x - u$ — превышение порога; $x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} | F(x) < 1\} \leq \infty$. Функция этого условного распределения F_u может быть выражена через F:

$$F_u(y) = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}.$$

Если порог u достаточно велик, то большинство реализаций случайной величины X лежит между 0 и u, так что оценить F в данном промежутке несложно. Однако оценить F_u проблематично, так как соответствующих наблюдений мало. В этой ситуации применяется теорема 2.

Говорят, что функция распределения F принадлежит области max-притяжения одного из предельных распределений экстремальных значений, скажем, G, если существуют такие числовые последовательности $\{a_n\}_{n\geq 1}$ и $\{b_n\}_{n\geq 1}$, что

$$\lim_{n\to\infty} F^n(b_n x + a_n) = G(x)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Условие принадлежности функции распределения области max-притяжения предельного распределения экстремальных значений довольно общо. Пусть $\mathcal{M}$ — множество функций распределения, принадлежащих какой-либо области max-притяжения предельного распределения экстремальных значений. На практике любую эмпирическую функцию распределения можно с достаточной точностью приблизить функцией из $\mathcal{M}$.

Теорема 2 [22, 23]. *Функция распределения F принадлежит области* max*-притяжения распределения, предельного для экстремальных значений, тогда и только тогда, когда существует измеримая функция $\sigma(u) > 0$, такая что*

$$\lim_{u\to x_F} \sup_{0\leq y < x_F - u} |F_u(y) - G_{\delta,\sigma(u)}(y)| = 0,$$

где $G_{\delta,\sigma}(y)$ — функция обобщенного распределения Парето:

$$G_{\delta,\sigma}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \dfrac{\delta}{\sigma} y\right)^{-1/\delta}, & \delta \neq 0, \\ 1 - e^{-y/\sigma}, & \delta = 0. \end{cases}$$

Условиям теоремы удовлетворяет большинство используемых на практике распределений. Параметр δ определяет степень тяжести хвоста распределения: чем больше δ, тем тяжелее хвост. Например, при моделировании финансовых данных обычно применяется $\delta \geq 0$.

2.3 Описание метода

Итак, учитывая сделанные предположения о нормирующих постоянных, можно заключить, что при больших значениях x_0

$$\mathsf{P}(T < t) \approx 1 - \exp\left\{-[1 - F(x_0)]\left(\frac{t}{b}\right)^{1/\gamma}\right\}, \quad t > 0. \tag{3}$$

Применение описываемого метода вычисления временны́х характеристик катастроф в неоднородных потоках экстремальных событий заключается в следующем. Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ — произвольное число. Решение уравнения

$$\mathsf{P}(T < t) = \varepsilon$$

относительно t обозначим $t(\varepsilon)$. Если распределение случайной величины T имеет вид (3), то, очевидно,

$$t(\varepsilon) = b\left[\frac{\ln(1-\varepsilon)}{F(x_0) - 1}\right]^{\gamma}.$$

Смысл значения $t(\varepsilon)$ заключается в том, что это время, вероятность наступления катастрофы до которого равна ε. Из соображений здравого смысла особый интерес представляют значения ε, близкие к нулю (соответствующее значение $t(\varepsilon)$ — это время, до которого катастрофа, скорее всего, не наступит), близкие к единице (соответствующее значение $t(\varepsilon)$ — это время, до которого катастрофа, скорее всего, наступит), а также $\varepsilon = 1/2$ (соответствующее значение $t(1/2)$ — это «среднее» время до наступления катастрофы).

При прогнозировании «среднего», или «ожидаемого», времени до катастрофы можно использовать как медиану $t(1/2)$ случайной величины T, которая определяется в качестве решения уравнения

$$1 - \exp\left\{-[1 - F(x_0)]\left(\frac{t}{b}\right)^{1/\gamma}\right\} = \frac{1}{2}$$

относительно t и равна

$$t\left(\frac{1}{2}\right) = b\left[\frac{\ln 2}{1 - F(x_0)}\right]^{\gamma},$$

так и математическое ожидание

$$\mathsf{E}T = \frac{b\Gamma(1+\gamma)}{[1 - F(x_0)]^{\gamma}}.$$

Стоит отметить, что, например, в случае $\gamma = 1$ медиана $t(1/2)$ случайной величины T почти в полтора раза (точнее, в $(\ln 2)^{-1}$ раз) меньше математического ожидания $\mathsf{E}T$.

Параметры b и γ легко оценить методом наименьших квадратов. Предположим, что в распоряжении исследователя имеется выборка $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$

предыдущих значений случайных величин ζ_j. Нормирующая функция $b_k = bk^{\gamma}$ параметра k имеет смысл тренда, или основной тенденции поведения реализации $R_k = Z_1 + \cdots + Z_k$ случайной функции S_k. Для линеаризации регрессионной задачи прологарифмируем b_k и R_k. Обозначив $\beta = \log b$, получим приближенные равенства

$$\log R_k \approx \beta + \gamma \log k, \quad k = \overline{1, n}\,, \tag{4}$$

в правой части которых стоят линейные функции параметров β и γ. Используя стандартный метод наименьших квадратов для оценивания параметров линейной регрессии (4), получим оценки

$$\gamma \approx \widehat{\gamma} = \frac{n\sum_{k=1}^{n}(\log k \cdot \log R_k) - \log n! \sum_{k=1}^{n} \log R_k}{n\sum_{k=1}^{n}(\log k)^2 - (\log n!)^2};$$

$$b = \exp\{\beta\} \approx \exp\left\{\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \log R_k - \widehat{\gamma} \log n!\right)\right\}.$$

Чтобы получить оценку величины $1 - F(x_0)$, необходимо построить параметрическую математическую модель (приближение) для функции $F(x)$. Для этого используем метод построения асимптотических аппроксимаций для $F(x)$ при больших x_0, основанный на теореме Балкемы – Пикандса – Де Хаана (теореме 2). С этой целью исходную выборку цензурируем снизу на уровне $\theta \in (0, x_0)$, гарантирующем удовлетворительное согласие эмпирического распределения величин $X_i - \theta$ (превышений уровня θ элементами исходной выборки) с обобщенным распределением Парето. Затем по соответствующей выборке превышений находим оценки $\widehat{\delta}$ и $\widehat{\sigma}$ параметров δ и σ этого распределения, например методом максимального правдоподобия. В итоге полагаем:

$$1 - F(x_0) \approx 1 - G_{\widehat{\delta},\widehat{\sigma}}(x_0 - \theta).$$

Заметим, что при относительно небольших значениях θ выборка содержит больше наблюдений для оценивания параметров, но хуже работает теорема Балкемы – Пикандса – Де Хаана. При больших значениях θ приближение в теореме Балкемы – Пикандса – Де Хаана улучшается, но точность статистического оценивания параметров снижается, так как доступно меньше наблюдений.

2.4 Основной алгоритм

Алгоритм, реализующий рассматриваемый модифицированный POT-метод, выглядит следующим образом.

1. Задать критический порог x_0, превышения которого считаются катастрофическими событиями.

2. Задать некоторое $m \in \mathbb{N}$.
3. Для набора порогов $\bar{\theta} = \{\theta_i\}_{i=1}^{m}$, $\theta_i < x_0 \ \forall i = \overline{1,m}$, выделить моменты времени, в которых произошли превышения порога θ_i, и значение, на которое выбранный порог θ_i был превышен.
4. Осуществить подгонку распределения Парето к выборке, состоящей из превышений порогов $\theta_i \ \forall i \in \overline{1,m}$.
5. Сохранить результат статистического критерия хи-квадрат Пирсона согласия распределения выборки превышений с распределением Парето для каждой из m выборок.
6. Выбрать номер i, соответствующий наибольшему P-значению указанного критерия, и сохранить соответствующую выборку и полученные для нее параметры распределения Парето $\widehat{\delta}_{\theta_l}$ и $\widehat{\sigma}_{\theta_l}$.
7. Подогнать степенную кривую к ряду исторических осуществлений превышений порога (i, T).
8. Сохранить полученные параметры $\widehat{\gamma}$ и $\widehat{b}$ и значение R^2 как метрику качества подгонки соответствующей кривой.
9. Записать последнее известное происшествие превышения порога из известных исторических данных.
10. Используя полученные параметры $(\widehat{\gamma},\ \widehat{b},\ \widehat{\delta}_{\theta_l},\ \widehat{\sigma}_{\theta_l})$, вычислить условную вероятность осуществления катастрофы как функцию времени.
11. Использовать полученную функцию распределения для различных временных горизонтов при фиксированной вероятности (например, на временно́м горизонте, соответствующем вероятности $1/2$ (среднем времени до катастрофы), на временно́м промежутке, соответствующем крайне низкой / крайне высокой вероятности, и т. д.) и, наоборот, для оценивания вероятности для фиксированных временны́х горизонтов (например, вероятности того, что превышение порога произойдет в ближайшие 10, 100 или 3600 с (измерений)).

«Пригодность» (репрезентативность) выборки превышений определяется по качеству подгонки распределения Парето в соответствии с теоремой Балкемы – Пикандса – Де Хаана. В частности, лучшей можно считать первую по порядку возрастания порога выборку, для которой P-значение выше $\alpha = 0{,}05$. Если таких выборок не обнаружилось, то считаем такой выборку с лучшим P-значением среди доступных. Набор порогов $\bar{\theta}$ может быть выбран любого размера. Например, его можно определять как набор квантилей выборки, меньших x_0, с порядками от 0,5 до 0,999. Таким образом, если «паретовость» возникает при существенно более низком пороге, чем значение критического порога x_0, то получаем выборку существенно большего объема и, соответственно, бо́льшую точность оценивания параметров.

3 Результаты анализа и прогнозирования характеристик качества обслуживания в сетях передачи и обработки данных

3.1 Описание анализируемых данных

Метод исследовался на данных, содержащих обмен сообщениями между внутренней и внешней сетью кафедры АСВК факультета ВМК МГУ. Сбор

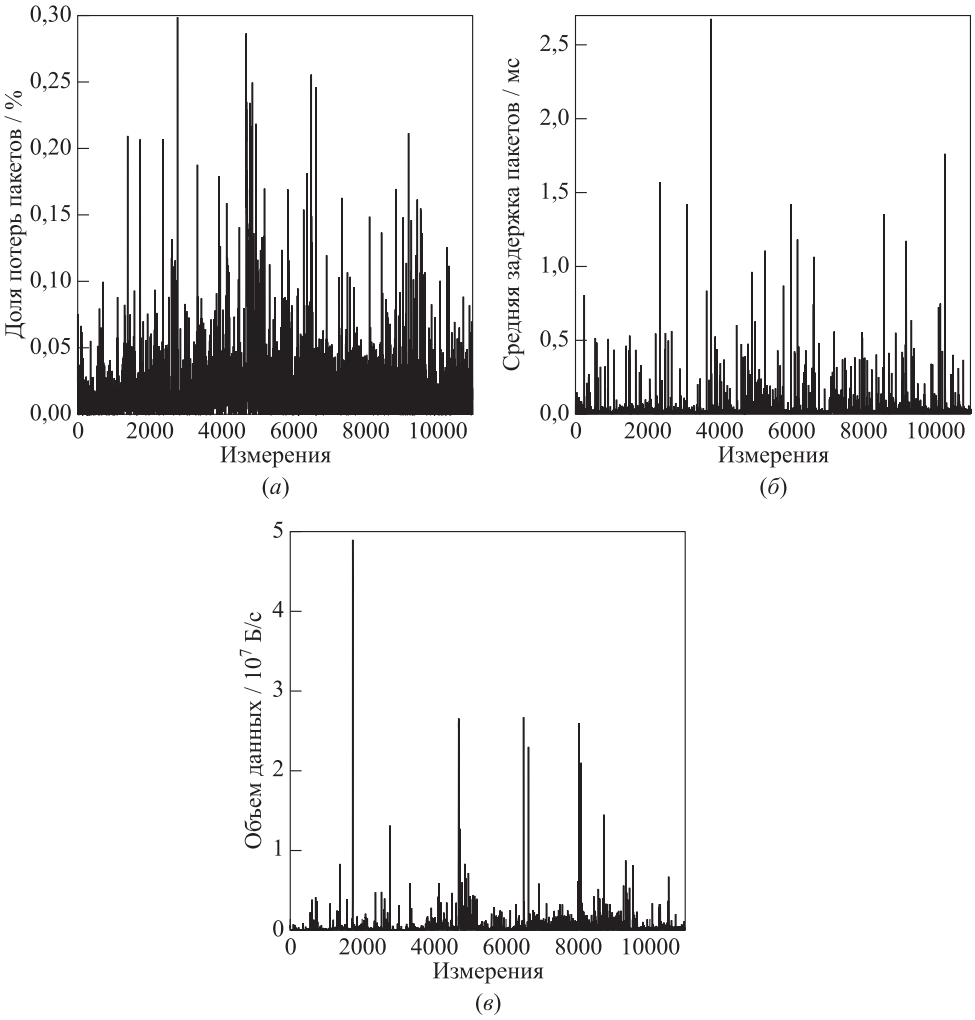


Рис. 1 Исходные данные: (*а*) доля потерянных пакетов; (*б*) средняя задержка; (*в*) нагрузка. Первые 11 000 измерений

данных о потоках сообщений проводился одновременно из внешней и внутренней сети. Точкой сбора выступал программно-аппаратный комплекс на базе серверной платформы X11DDW-IT с Xeon E5-2640v4 с X710-DA4 в VPP под управлением операционной системы Linux (дистрибутив Debian Bookworm, версия ядра 6.1.0-11-686-pae). Комплекс выполнял функции маршрутизатора и брандмауэра с отслеживанием состояния. Данные были организованы в виде упорядоченной последовательности сетевых сообщений, представленных в виде байтовых строк, отправляемых и получаемых сетевыми интерфейсами маршрутизатора. Сообщения содержали информацию о метках виртуальных частных сетей канального уровня (VLAN, L2), IP-адресах (IPv4, L3), использованных транспортных протоколах (TCP/UDP/SCTP, L4). Данные были собраны с использованием утилиты tcpdump в режиме записи до 96 Б на каждое сообщение (с сохранением информации о числе байт в исходном сообщении). После сбора данные обрабатывались системой сбора, хранения и обработки сетевого трафика (TrafficKeeper) [28], и в результате формировался трехмерный временной ряд из 11 000 измерений. Каждое измерение содержит пропускную способность, среднюю задержку и долю потери пакетов за 1 с. Исходные данные визуализированы на рис. 1, где указаны ряды объема передаваемых данных за 1 с, средняя задержка и доля потерь соответственно. На графиках явно заметны единичные выбросы «вверх».

3.2 Эксперименты с оригинальным рядом

Рассмотрим ряд потерь пакетов, выбрав критический порог, равным 10. В этом случае:

- P-значение критерия χ^2 Пирсона равно 0,051 при пороге $\theta = 0{,}05085$ (см. также рис. 2);
- визуализация подгонки кривых приведена на рис. 3. Показатель R^2 качества подгона кривой равен 0,874 и 0,936 для модели, которая допускает постоянную интенсивность катастроф ($\gamma = 1$), и для модели, свободной от этого допущения, соответственно. Тот факт, что R^2 больше для второй модели, подкрепляет предположение о том, что частота критических событий может не быть постоянной. Вторая модель сходится к значению $\gamma = 0{,}7$;
- таким образом, $t(\varepsilon = 0{,}001) \approx 2{,}28268$, $t(\varepsilon = 0{,}5) \approx 225{,}638$ и $t(\varepsilon = 0{,}999) \approx 1134{,}15$. Это означает, что критическое событие «в среднем» (в медианном смысле) произойдет в течение следующих 225,638 с, «почти наверное» не произойдет в течение 2,28268 с и «почти наверное» произойдет в течение 1134,15 с.
- однако $t_{\tau=15}(\varepsilon = 0{,}5) \approx 213{,}97$; $t_{\tau=600}(\varepsilon = 0{,}5) \approx 189{,}16$, т. е. если событие давно не наблюдалось (например, на протяжении 10 мин или 600 с), то предсказанный горизонт укорачивается. Это согласуется с интуитивной интерпретацией параметра $\gamma < 1$, когда катастрофы должны происходить

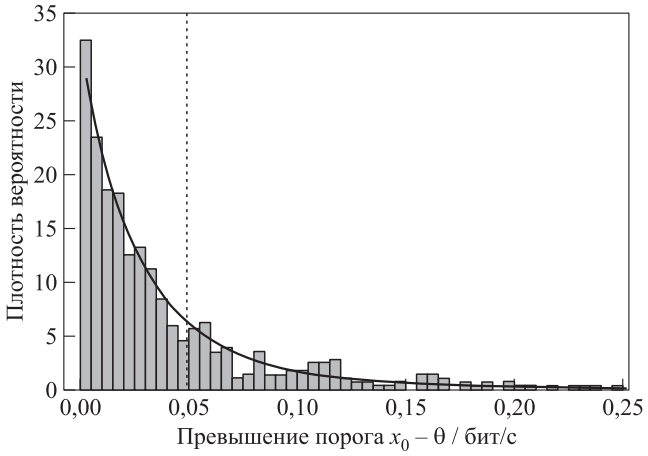


Рис. 2 Гистограмма превышений порога и подогнанное под нее распределение Парето. Вертикальная пунктирная линия отображает $x_0 - \theta$, т. е. критический порог (ряд доли потерь пакетов, критический порог $= 0{,}1$)

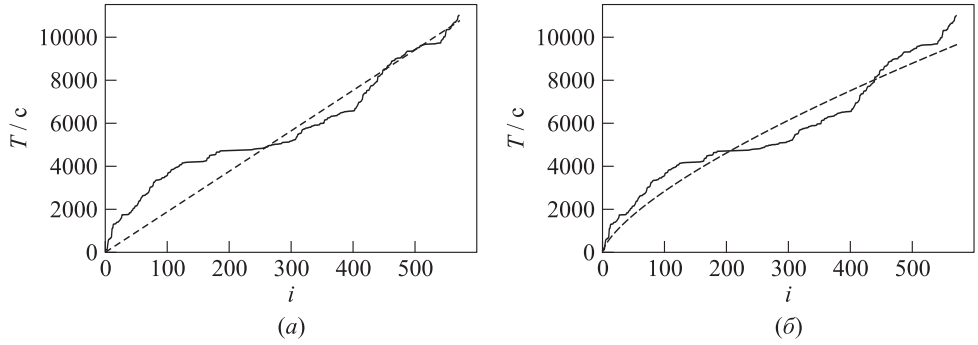


Рис. 3 Подгонка (штриховые линии) кривых для ряда критических событий (i, T) (доля потерь пакетов, критический порог $x_0 = 0{,}1$): (*а*) подгонка прямой, $R^2 = 0{,}949$; (*б*) подгонка степенной кривой, $R^2 = 0{,}978$

чаще со временем. Аналогичное условное моделирование бессмысленно для модели, которая допускает $\gamma = 1$, так как в этом случае моделируемое распределение превращается в экспоненциальное, которое, как известно, не имеет памяти, так что условие игнорируется. Условные функции распределения предоставлены на рис. 4;

– в самих данных последняя катастрофа произошла на 10 973-м моменте времени, т. е. 27 с назад. Модель для такого случая дает $t_{\tau=27}(\varepsilon = 0{,}5) \approx 206{,}29$;

– с учетом последней зафиксированной катастрофы модель также выдает условную вероятность того, что катастрофа произойдет до некоторого момента вре-

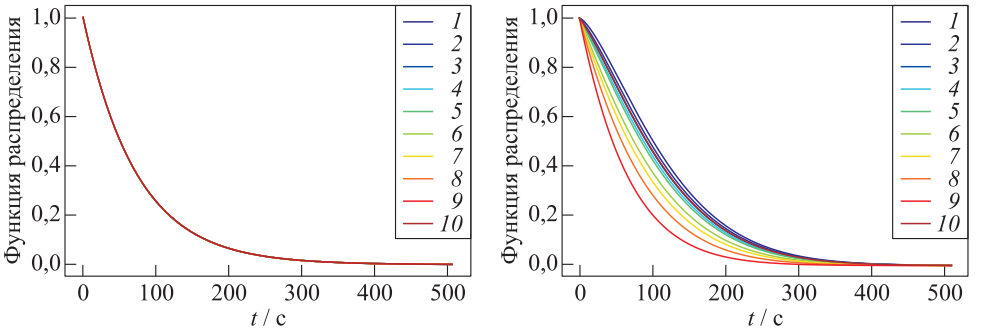


Рис. 4 Кумулятивная функция распределения для модели с постоянной (*а*) и непостоянной (*б*) частотой критических событий. Ряд доли потерь пакетов, критический порог $x_0 = 0{,}1$: *1* — 0; *2* — 15; *3* — 30; *4* — 45; *5* — 60; *6* — 120; *7* — 180; *8* — 300; *9* — 600; *10* — 27

мени. Таким образом, вероятности того, что превышение порога произойдет в течение следующих 15, 30, 60 и 120 с, соответственно равны 0,029, 0,062, 0,135 и 0,29.

Рассмотрим временной ряд средних задержек, также выбрав критический порог равным 400 мс, или 0,4. В этом случае:

– P-значение статистического теста χ^2 Пирсона равно 0,055 при пороге $\theta = 0{,}0417$ (см. также рис. 5);

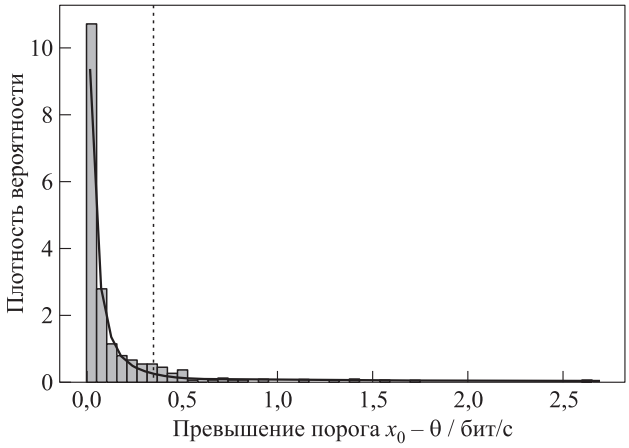


Рис. 5 Гистограмма превышений порога и подогнанное под нее распределение Парето. Вертикальная пунктирная линия отображает $x_0 - \theta$, т. е. критический порог (ряд средней задержки, критический порог $x_0 = 400$ мс)

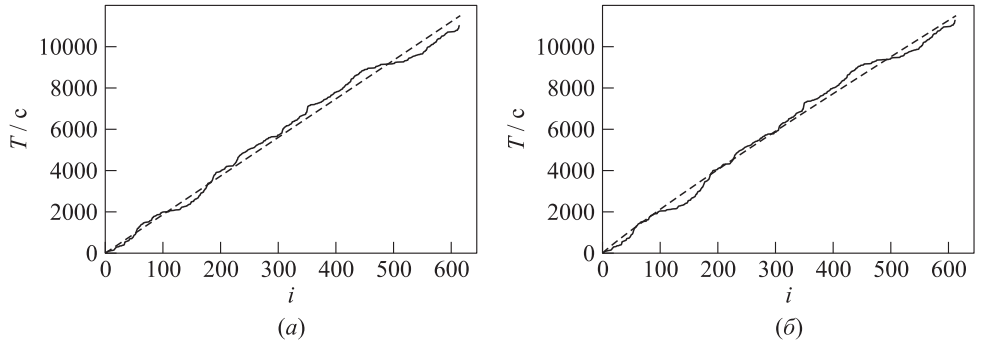


Рис. 6 Подгонка (штриховые линии) кривых для ряда событий (i, T) (средняя задержка, критический порог $x_0 = 400$ мс): (*а*) подгонка прямой, $R^2 = 0{,}991$; (*б*) подгонка степенной кривой, $R^2 = 0{,}993$

– визуализация подгонки кривых приведена на рис. 6. Показатель R^2 качества подгона кривой равен $0{,}991$ для модели, которая допускает постоянную частоту происхождения катастроф ($\gamma = 1$), и $0{,}993$ для модели, свободной от такого допущения. Тот факт, что R^2 больше для второй модели, подкрепляет допущение, что интенсивность критических событий может не быть постоянной. Для второй модели $\gamma = 0{,}932$;
– таким образом, $t(\varepsilon = 0{,}001) \approx 0{,}451811$, $t(\varepsilon = 0{,}5) \approx 200{,}613$, $t(\varepsilon = 0{,}999) \approx 1709{,}85$. Это означает, что критическое событие «в среднем» произойдет в течение следующих $200{,}613$ с, «почти наверное» не произойдет в течение $0{,}451811$ с и «почти наверное» произойдет в течение $1709{,}85$ с;
– однако $t_{\tau=15}(\varepsilon = 0{,}5) \approx 197{,}15$, $t_{\tau=600}(\varepsilon = 0{,}5) \approx 170{,}96$, т. е. если событие долго не наблюдалось (например, на протяжении 10 мин или 600 с), то прогнозируемый горизонт укорачивается. Это согласуется с интуитивной интерпретацией параметра $\gamma < 1$, когда интенсивность потока катастроф увеличивается со временем. Условные функции распределения представлены на рис. 7;
– в рассматриваемых данных последняя катастрофа произошла на $10\,954$ моменте времени, т. е. 46 с назад. Модель для такого случая дает $t_{\tau=46}(\varepsilon = 0{,}5) \approx 192{,}86$;
– с учетом последней зарегистрированной катастрофы модель дает условную вероятность того, что катастрофа произойдет до заданного момента времени. Таким образом, вероятности того, что превышение порога произойдет в следующие 15, 30, 60 и 120 с, соответственно равны $0{,}0492$, $0{,}0969$, $0{,}187$ и $0{,}345$.

Теперь рассмотрим ряд нагрузки. Определим критический порог x_0, равный 3 МБ данных в секунду, или $3\,145\,728$. В этом случае:

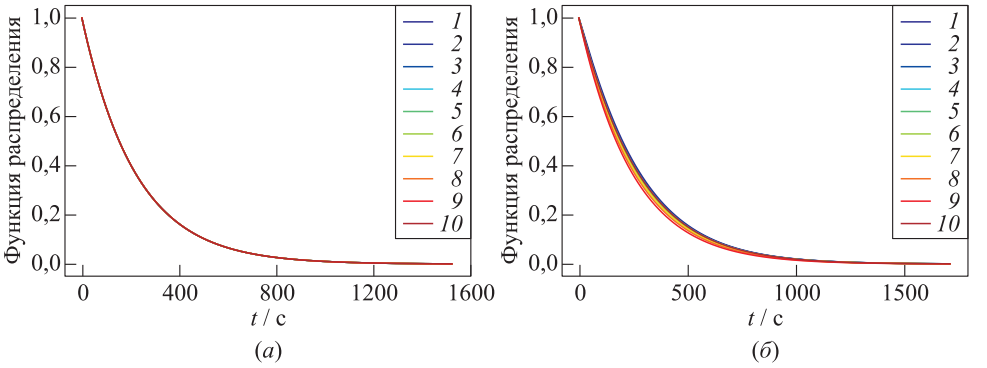


Рис. 7 Кумулятивная функция распределения для модели с постоянной (*а*) и непостоянной (*б*) частотой критических событий. Ряд средней задержки, критический порог $x_0 = 400$ мс: *1* — 0; *2* — 15; *3* — 30; *4* — 45; *5* — 60; *6* — 120; *7* — 180; *8* — 300; *9* — 600; *10* — 46

– P-значение критерия согласия χ^2 Пирсона равно 0,00025 при пороге $\theta = 1\,805\,840$, т. е. в рамках предоставленной выборки не был найден такой порог, который удовлетворяет требованию по P-значению. Визуально можно судить об удовлетворительном согласии и условной применимости метода (см. также рис. 8);

– визуализация подгонки кривых приведена на рис. 9. Показатель R^2 качества подгонки кривой равен 0,834 для модели, допускающей постоянную частоту

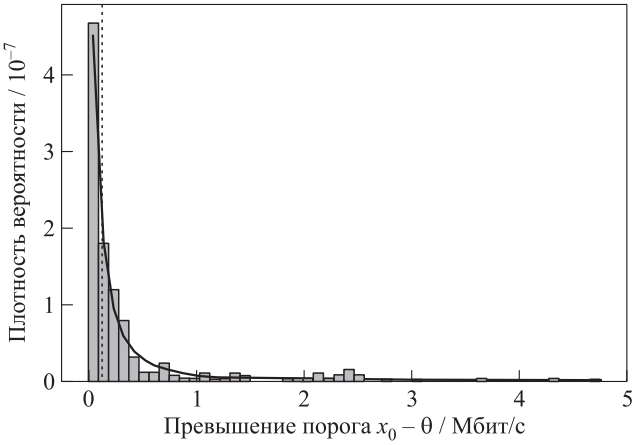


Рис. 8 Гистограмма превышений порога и подогнанное к ней распределение Парето. Вертикальная пунктирная линия отображает $x_0 - \theta$, т. е. критический порог (ряд нагрузки, критический порог $x_0 = 3$ МБ в секунду)

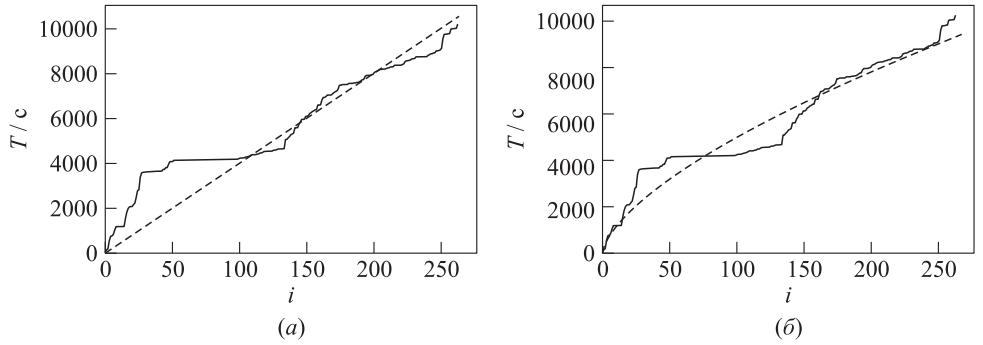


Рис. 9 Подгонка (штриховые линии) кривых для ряда событий (i, T) (ряд нагрузки, критический порог $x_0 = 3$ МБ в секунду: (*а*) подгонка прямой, $R^2 = 0{,}834$; (*б*) подгонка степенной кривой, $R^2 = 0{,}935$

происхождения катастроф ($\gamma = 1$), и 0,935 для модели, свободной от этого допущения. Тот факт, что R^2 больше для второй модели, свидетельствует в пользу допущения о том, что интенсивность потока критических событий может не быть постоянной. Для второй модели $\gamma = 0{,}646$;

- таким образом, $t(\varepsilon = 0{,}001) \approx 4{,}94768$, $t(\varepsilon = 0{,}5) \approx 337{,}615$, $t(\varepsilon = 0{,}999) \approx 1489{,}72$. Это означает, что критическое событие «в среднем» произойдет в течение следующих 337,615 с, «почти наверное» не произойдет в течение 4,94768 с и «почти наверное» произойдет в течение 1489,72 с;
- однако $t_{\tau=15}(\varepsilon = 0{,}5) \approx 324{,}36$; $t_{\tau=600}(\varepsilon = 0{,}5) \approx 149{,}15$, т. е. если событие давно не наблюдалось (например, на протяжении 10 мин или 600 с), предсказанный горизонт укорачивается более чем в 2 раза. Это сходится с интуитивной интерпретацией параметра $\gamma < 1$, когда катастрофы происходят все чаще и чаще. Условные функции распределения представлены на рис. 10;
- в рассматриваемых данных последняя катастрофа произошла на 10 741-м моменте времени, т. е. 259 с назад. Модель для такого случая дает $t_{\tau=259}(\varepsilon = 0{,}5) \approx 209{,}90$;
- с учетом последней зафиксированной катастрофы модель дает условную вероятность того, что катастрофа произойдет до некоторого момента времени. Таким образом, вероятности того, что превышение порога произойдет в следующие 15, 30, 60 и 120 с, соответственно равны 0,041, 0,0815, 0,161 и 0,3095.

Из проведенных экспериментов видно, что для разных характеристик метод применим в разной степени при различных порогах, но общими остаются несколько моментов:

- метод применим для большинства порогов ряда средней задержки и доли потерь пакетов и условно применим для ряда нагрузки;

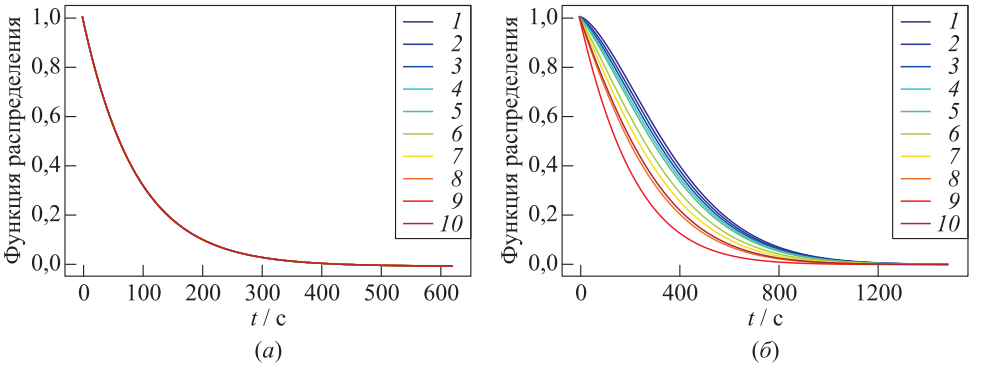


Рис. 10 Кумулятивная функция распределения для модели с постоянной (*а*) и непостоянной (*б*) частотой критических событий. Ряд нагрузки, критический порог $x_0 = 3$ МБ в секунду: *1* — 0; *2* — 15; *3* — 30; *4* — 45; *5* — 60; *6* — 120; *7* — 180; *8* — 300; *9* — 600; *10* — 259

– по результатам подгонки кривых (как по показателю R^2, так и визуально) можно заключить, что параметр γ, характеризующий интенсивность потока катастроф, не является постоянным и часто оказывается меньше единицы. Из этого следует, что интенсивность потока превышения порогов в рассматриваемых случаях возрастает во времени;

– судя по графикам подгонки кривых для рядов доли потерь пакетов и нагрузки, частота превышений порога непостоянна, причем она изменяется немонотонно: видны промежутки времени, на которых катастрофы происходят чаще или реже. Ряд средней задержки не имеет такой выраженной особенности, вследствие чего модель описывает его лучше.

3.3 Эксперименты с обобщающей характеристикой качества

При анализе данных видно, что разные характеристики превышают критические пороги в разные моменты времени. Это обстоятельство требует дополнительной обработки прогнозов, применения методов ансамблирования или экспертных систем. Но возможен и другой подход, заключающийся в объединении координат вектора регистрируемых характеристик в единую агрегированную или интегральную характеристику, которая описывает состояние качества функционирования рассматриваемой системы в целом. В частности, в качестве такой интегральной величины можно использовать евклидову норму вектора анализируемых показателей. При этом диапазоны изменения рассматриваемых характеристик сильно различаются, и, кроме того, они взаимосвязаны, что проявляется в ненулевых коэффициентах корреляции. Следовательно, в качестве агрегирующей характеристики целесообразно использовать норму Махаланобиса

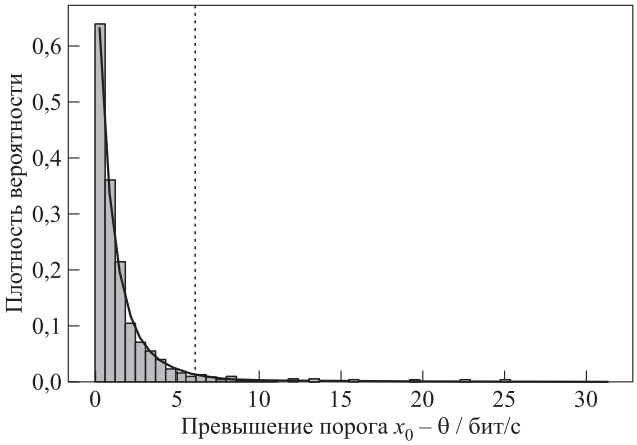


Рис. 11 Гистограмма превышений порога и подогнанное под нее распределение Парето. Вертикальная пунктирная линия отображает $x_0 - \theta$, т. е. критический порог (ряд нормы Махаланобиса, критический порог x_0 равен квантили выборки порядка 0,99)

$$\|x\|_M = \sqrt{x\Sigma^{-1}x^{\mathrm{T}}},$$

где Σ — ковариационная матрица вектора x. Эта характеристика учитывает корреляцию характеристик канала связи. При этом сначала необходимо нормировать рассматриваемые временны́е ряды, а затем по нормированным значениям посчитать матрицу корреляции. Такой подход требует хранения и обработки последних измерений для их нормировки. Таким образом, алгоритм, обрабатывающий такую норму, требует дополнительного хранения и обработки некоторого изменяющегося набора исторических данных (здесь и далее — от 1000 до 2000 на нормировку и 1000 на подсчет матрицы корреляции).

Был проведен эксперимент с обобщающей характеристикой качества канала связи — нормой Махаланобиса. Для него критический порог x_0 был выбран равным квантили всей выборки порядка 0,99. В таком случае:

- P-значение критерия согласия χ^2 Пирсона равно 0,061 при пороге $\theta = 1{,}6$ (см. также рис. 11);
- визуализация подгонки кривых приведена на рис. 12. Показатель R^2 качества подгонки кривой равен 0,9945 для модели, допускающей постоянную интенсивность потока катастроф ($\gamma = 1$), и 0,9969 для модели, свободной от такого условия. Тот факт, что R^2 больше для второй модели, свидетельствует в пользу непостоянства частоты критических событий. Вторая модель дает $\gamma = 1{,}078$. Однако значения R^2 очень близки, а γ отличается от единицы меньше чем на одну десятую (отклонение вполне можно объяснить статистической погрешностью), так что предположение о непостоянстве интенсивности не бесспорно;

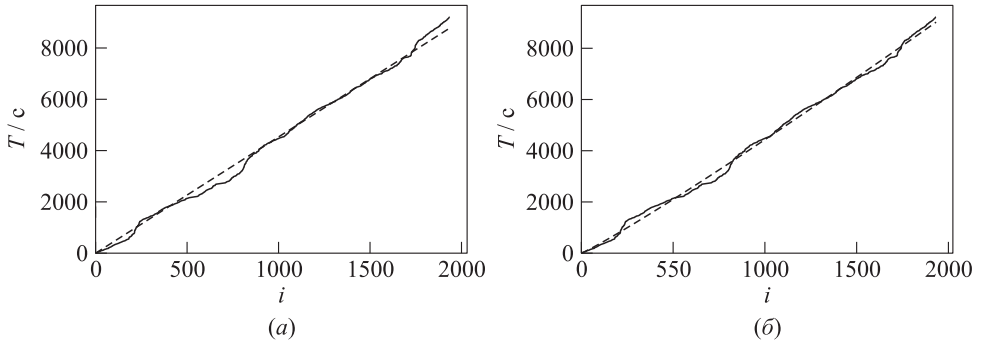


Рис. 12 Подгонка (штриховые линии) кривых для ряда событий (i, T) (ряд нормы Махаланобиса, критический порог x_0 равен квантили выборки порядка 0,99): (*а*) подгонка прямой, $R^2 = 0{,}9945$; (*б*) подгонка степенной кривой, $R^2 = 0{,}9969$

– таким образом, $t(\varepsilon = 0{,}001) \approx 0{,}04267$, $t(\varepsilon = 0{,}5) \approx 49{,}2797$, $t(\varepsilon = 0{,}999) \approx 587{,}744$. Это означает, что критическое событие «в среднем» произойдет в течение следующих 49,2797 с, «почти наверное» не произойдет в течение 0,04267 с и «почти наверное» произойдет в течение 587,744 с;

– однако $t_{\tau=15}(\varepsilon = 0,5) \approx 52{,}116$; $t_{\tau=600}(\varepsilon = 0{,}5) \approx 55{,}32$, т. е. если событие давно не наблюдалось (например, на протяжении 10 мин или 600 с), предсказанный горизонт увеличивается. Это также сходится с интуитивной интерпретацией значений параметра $\gamma > 1$, означающих, что в таком случае катастрофы должны происходить все реже и реже. Аналогичное условное моделирование бессмысленно для модели с $\gamma = 1$ (рис. 13);

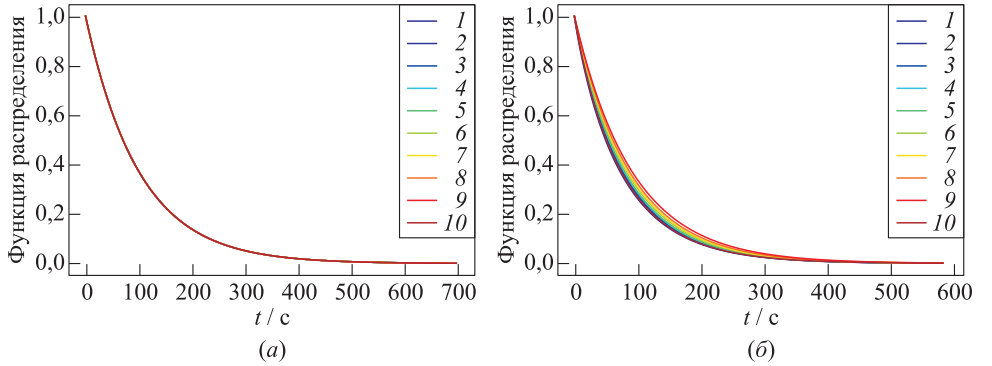


Рис. 13 Кумулятивная функция распределения для модели с постоянной (*а*) и непостоянной (*б*) частотой критических событий. Ряд нормы Махаланобиса, критический порог x_0 равен квантили выборки порядка 0,99: *1* — 0; *2* — 15; *3* — 30; *4* — 45; *5* — 60; *6* — 120; *7* — 180; *8* — 300; *9* — 600; *10* — 5

– в рассматриваемых данных последняя катастрофа произошла на 10 995-м моменте времени, т. е. 5 с назад. Модель для такого случая дает $t_{\tau=5}(\varepsilon = 0{,}5) \approx 50{,}671$;

– с учетом последней зарегистрированной катастрофы модель также дает условную вероятность того, что катастрофа произойдет до некоторого момента времени, а именно: вероятности того, что превышение порога произойдет в следующие 15, 30, 60 и 120 с, соответственно равны 0,195, 0,344, 0,557 и 0,790.

Таким образом, предложенный метод применим для агрегированной характеристики качества канала. Однако его слабым местом является то, что из-за необходимости предварительной нормировки данный подход становится сложно интерпретируемым.

3.4 Оконный режим работы алгоритма

Из графиков подгонки прямой видно, что в определенные периоды времени превышения порога происходят чаще, а в другие — реже. В связи с этим вполне разумно оценивать интересующие параметры распределения и подгоняемых кривых, характеризующих тренды интенсивности катастроф, не по всем имеющимся данным, а по последним k измерениям, где k — параметр ширины окна. Таким образом:

– модель может быть адаптирована под локальные изменения в сети независимо от полной истории, которая может быть неактуальна или избыточна;

– вычислительная сложность соответствующего алгоритма уменьшается за счет уменьшения объема анализируемой выборки;

– пороги могут вычисляться адаптивно на каждом новом окне либо выбираться как внешние параметры.

Если результат по той или иной причине не является удовлетворительным, то можно изменять ширину окна k и выбирать лучший прогноз по P-значению теста хи-квадрат и/или R^2. Таким образом, модифицированный адаптивный алгоритм отыскания вероятности катастрофы выглядит следующим образом.

1. Выбрать ширину окна k (размер рассматриваемого временно́го промежутка, на котором статистические закономерности рассматриваемого процесса предполагаются неизменными) и сформировать соответствующую подвыборку.
2. Выполнить над этой подвыборкой пп. 1–10 алгоритма, описанного выше.
3. Если по той или иной причине P-значение статистического критерия или значения показателя R^2 нельзя считать удовлетворительными, то изменить k и повторить вычисления.

Если порог задается извне, то представляется возможным в качестве анализируемой выборки рассматривать не k последних значений временно́го ряда,

а k последних превышений порога с их временны́ми отметками, гарантируя некоторый размер выборки для методов подгонки распределения Парето.

«Оконная» модификация метода позволяет учитывать динамику интенсивности катастроф.

Здесь и далее, если не указано иное, рассматриваются подвыборки объема $k = 2000$. Алгоритм перезапускается на выборках (окнах), смещаемых на $s = 15$ временны́х отметок вперед. Все условные вероятности считаются относительно последнего замеченного превышения порога внутри окна. Параметр γ считается отличным от единицы и анализируется его динамика при скольжении окон.

Далее представлены эксперименты, в которых указанный алгоритм был применен к ряду доли потерь с критическим порогом $x_0 = 0{,}1$ (график приведен на рис. 14), к ряду нагрузки с ранее рассмотренным критическим порогом $x_0 = 3$ МБ (рис. 15) и к ряду средней задержки с порогом $x_0 = 400$ мс (рис. 16).

Из графиков видно, что:

– предположение о непостоянстве γ, т. е. немонотонном изменении интенсивности катастроф, подтверждается с хорошими P-значениями и высокими R^2. Диапазон изменения параметра γ охватывает интервал от 0,5 до 3;

– ряд средней задержки допускает наилучшее прогнозирование с помощью рассматриваемого метода, судя по графику P-значений;

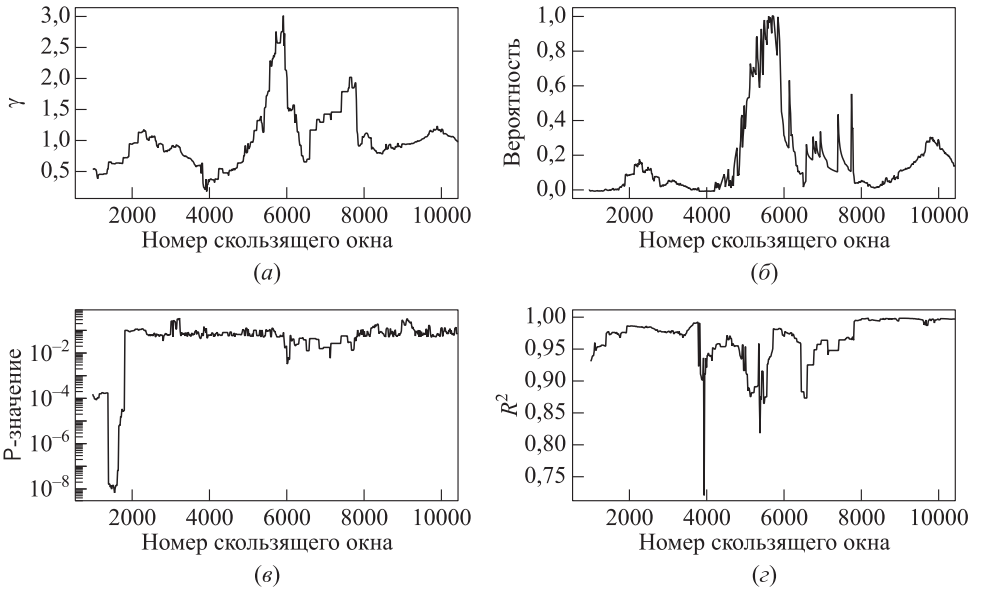


Рис. 14 Оценка γ (*а*) и вероятности на скользящем окне (*б*), а также соответствующие P-значения (*в*) и значения R^2 подгонки кривой (*г*) (ряд доли потерь пакетов, критический порог $x_0 = 0{,}1$)

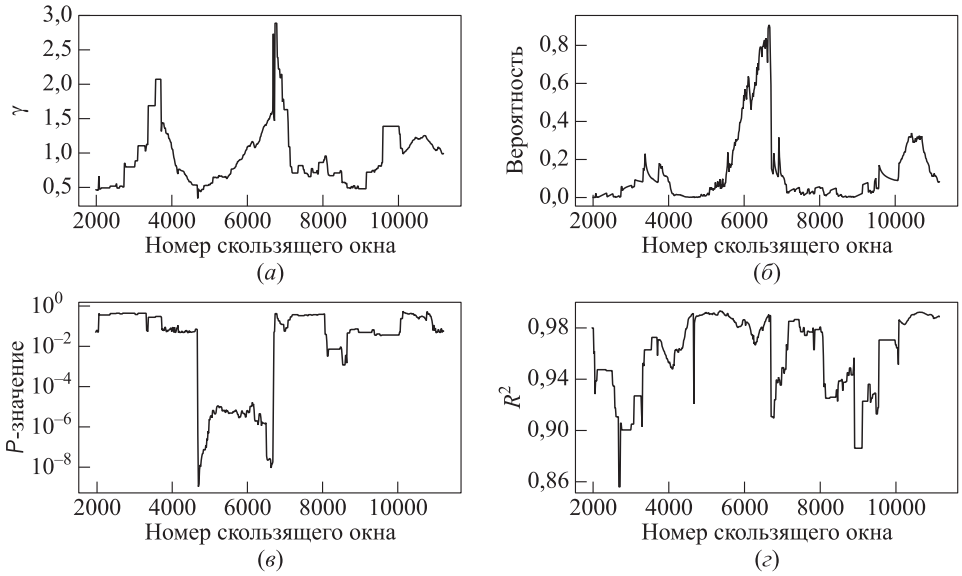


Рис. 15 Оценка γ (*а*) и вероятности на скользящем окне (*б*), а также соответствующие P-значения (*в*) и значения R^2 подгонки кривой (*г*) (ряд нагрузки, критический порог $x_0 = 3$ МБ в секунду)

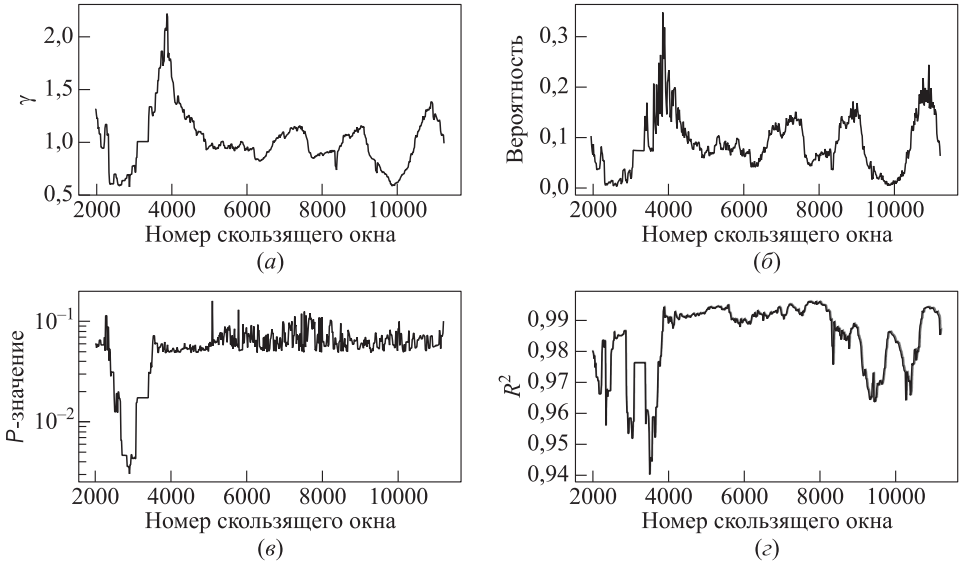


Рис. 16 Оценка γ (*а*) и вероятности на скользящем окне (*б*), а также соответствующие P-значения (*в*) и значения R^2 подгонки кривой (*г*) (ряд средней задержки, критический порог $x_0 = 400$ мс)

– вычисляемая вероятность (на графиках она представлена для значения $t = 15$) изменяется от значений, близких к нулю, до значений, близких к единице. При этом наблюдаемые резкие скачки вероятности между соседними окнами могут быть объяснены новым превышением порога, попадающим в «сдви-

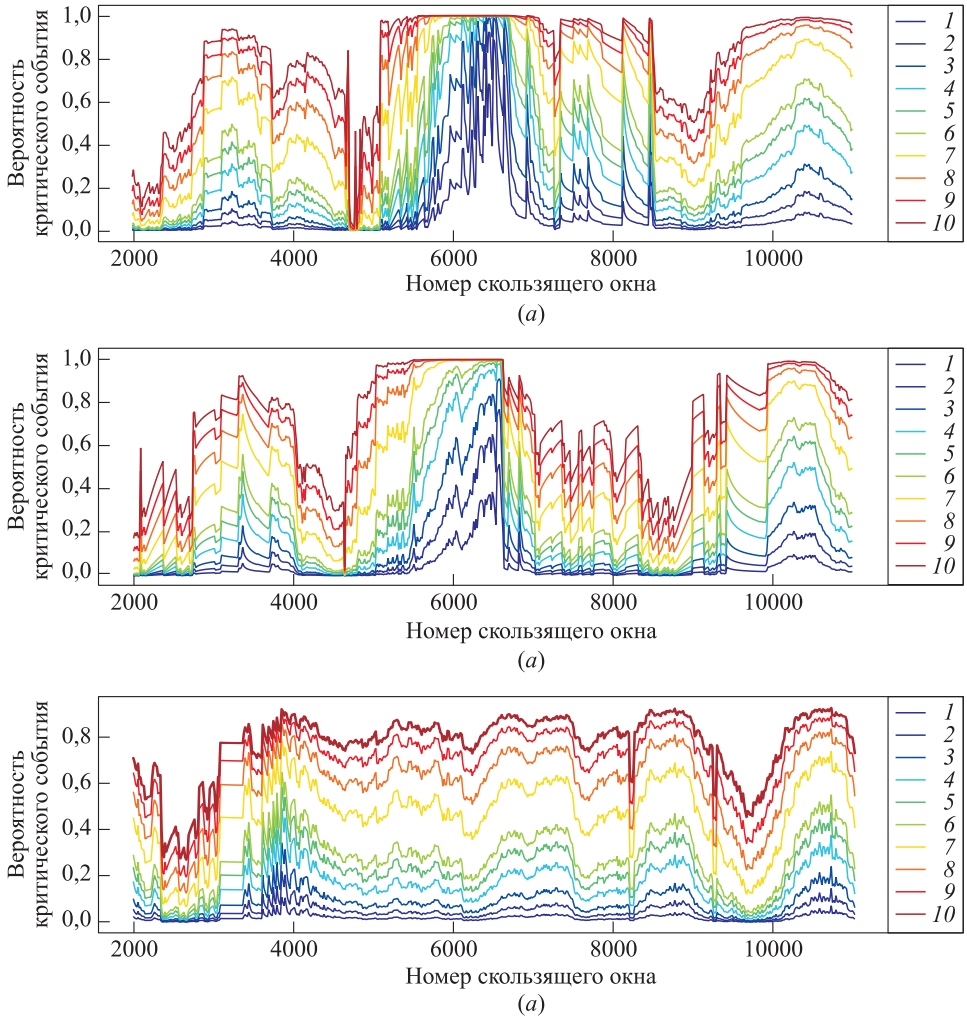


Рис. 17 Вероятности критического события в течение следующих t секунд для разных t (*1* — 3; *2* — 7,5; *3* — 15; *4* — 30; *5* — 45; *6* — 60; *7* — 120; *8* — 180; *9* — 240; *10* — 300): (*а*) ряд доли потерь пакетов, критический порог $x_0 = 0{,}1$; (*б*) ряд нагрузки, критический порог $x_0 = 3$ МБ в секунду; (*в*) ряд средней задержки, критический порог $x_0 = 400$ мс

нутое» окно и существенно изменяющим прогнозируемые значения за счет того, что вычисляется *условная* вероятность. Более подробные графики представлены на рис. 17;

– судя по P-значениям статистических тестов на разных окнах, во всех случаях бывают окна, или моменты времени, когда распределение подгоняется хуже или лучше, и иногда ниже приемлемого порога. Иногда распределение Парето не подходило с достаточной уверенностью ко всей выборке ряда нагрузки, тогда как для некоторых окон распределение Парето подгонялось вполне удовлетворительно.

Таким образом, модифицированный алгоритм, реализованный в режиме скользящего окна, оказывается вполне работоспособным.

4 Заключение

В данной работе предложен метод прогнозирования рисков неблагоприятных событий, возникающих в СПОД, а именно: перегрузок, аномальных значений потерь пакетов и недопустимых значений задержки. Метод стал развитием POT-метода, основанного на теореме Балкемы – Пикандса – Де Хаана [22, 23]. Данный метод был реализован и исследован на данных, полученных из реальной СПОД. Результаты экспериментов показали практическую работоспособность предложенного метода. Наилучшие результаты показала модификация алгоритма, реализованная в режиме скользящего окна.

В работе все значения характеристик КО брались с шагом в 1 с. В качестве дальнейших направлений исследований необходимо исследовать оптимальный размер шага для характеристик КО, при котором метод прогнозирования рисков неблагоприятных событий, возникающих в СПОД, дает наилучшие результаты.

Литература

1. Cisco Annual Reports. https://www.cisco.com/c/en/us/about/annual-reports.html.
2. *Крапива В. С., Лобова Д. А.* Совершенствование системы показателей качества услуг инфокоммуникаций в условиях цифровой трансформации // Экономика и социум, 2025. Вып. 5-2(132). С. 1233–1238. doi: 10.5281/ZENODO.15705196. EDN: TICCOL.
3. *Абашкин В. Л., Сахно М. К.* Развитие интернет-трафика в России и других странах БРИКС+. — М.: Институт статистических исследований и экономики знаний НИУ ВШЭ, 2025. https://issek.hse.ru/news/1048718687.html.
4. *Колотовкин И. С.* Нейронные сети в задачах распределения трафика компьютерных сетей // XVIII Всероссийская научная конференция «Нейрокомпьютеры и их применение». Тезисы докладов. — М: МГППУ, 2020. С. 330–332. EDN: KBIIMZ.
5. *Рязанов А. М., Волканов Д. Ю., Цыганов Н. И.* Методы сбора и хранения сетевого трафика для решения задачи прогнозирования качества гетерогенных каналов в сетях

передачи данных // Программные системы и инструменты, 2023. Вып. 23. С. 83–91. EDN: ULVXPS.

6. *Цветкова В. П., Степанов Е. П.* Исследование методов эффективного общения в многоагентном обучении для задачи балансировки сетевого трафика // Программные системы и инструменты, 2023. Вып. 23. С. 106–119. EDN: KHTEKK.
7. *Cadzow J. A.* ARMA time series modeling: An effective method // IEEE T. Aero. Elec. Sys., 1983. Vol. AES-19. No. 1. P. 49–58. doi: 10.1109/TAES.1983.309419.
8. *Engle R. F., Kroner K. F.* Multivariate simultaneous generalized ARCH // Economet. Theor., 1996. Vol. 11. No. 1. P. 122–150.
9. *Engle R. F., Russell J. R.* Autoregressive conditional duration: A new model for irregularly spaced transaction data // Econometrica, 1998. Vol. 66. No. 5. P. 1127–1162. doi: 10.2307/2999632.
10. *Shu Y., Jin Z., Zhang L., Wang L., Yang O. W. W.* Traffic prediction using FARIMA models // Conference (International) on Communications Proceedings. — IEEE, 1999. Vol. 2. P. 891–895. doi: 10.1109/ICC.1999.765402.
11. *Chen H., Wu J., Gao S.* A study of autoregressive conditional heteroscedasticity model in load forecasting // Conference (International) on Power System Technology Proceedings. — IEEE, 2006. Art. 321620. 8 p. doi: 10.1109/ICPST.2006.321620.
12. *Box G. E. P., Jenkins G. M., Reinsel G. C., Ljung G. M.* Time series analysis: Forecasting and control. — 5th ed. — New York, NY, USA: Wiley, 2015. 712 p. doi: 10.1111/jtsa.12194.
13. *Го Ф., Смелянский Р. Д., Королев В. Ю.* Исследование эффективности применения метода векторной авторегрессии для прогнозирования качества канала передачи данных // Программные системы и инструменты. — М.: МАКС Пресс, 2024. Вып. 24. С. 36–54. EDN: OIBEMH.
14. *Chen T.-T., Lee S.-J.* A weighted LS-SVM based learning system for time series forecasting // Inform. Sciences, 2015. Vol. 299. P. 99–116. doi: 10.1016/j.ins.2014.12.031.
15. *Rady E. H. A., Fawzy H., Fattah A. M. A.* Time series forecasting using tree based methods // J. Statistics Applications Probability, 2021. Vol. 10. No. 1. P. 229–244. doi: 10.18576/jsap/100121.
16. *Tajmouati S., Wahbi B. E., Bedoui A., Abarda A., Dakkon M.* Applying k-nearest neighbors to time series forecasting: Two new approaches // J. Forecasting, 2024. Vol. 43. No. 5. P. 1559–1574. doi: 10.1002/for.3093.
17. *Lindemann B., Muller T., Vietz H., Jazdi N., Weyrich M.* A survey on long short-term memory networks for time series prediction // Proc. CIRP, 2021. Vol. 99. P. 650–655. doi: 10.1016/j.procir.2021.03.088.
18. *Wibawa A. P., Utama A. B. P., Elmunsyah H., Pujianto U.* Time-series analysis with smoothed convolutional neural network // J. Big Data, 2022. Vol. 9. Art. 44. 18 p. doi: 10.1186/s40537-022-00599-y.
19. *Wen Q., Zhou T., Zhang C., Chen W., Ma Z., Yan J., Sun L.* Transformers in time series: A survey // 32nd Joint Conference (International) on Artificial Intelligence Proceedings. — Fremont, CA, USA: IJCAI, 2023. Survey Track. P. 6778–6786. doi: 10.24963/ijcai.2023/759.
20. *Gorshenin A., Kozlovskaya A., Gorbunov S., Kochetkova I.* Mobile network traffic analysis based on probability-informed machine learning approach // Comput. Netw., 2024. Vol. 247. Art. 110433. 17 p. doi: 10.1016/j.comnet.2024.110433.

21. *Григорьева М. Е., Королев В. Ю., Соколов И. А.* Предельная теорема для геометрических сумм независимых неодинаково распределенных случайных величин и ее применение к прогнозированию вероятности катастроф в неоднородных потоках экстремальных событий // Информатика и её применения, 2013. Т. 7. Вып. 4. С. 11–19. doi: 10.14357/19922264130402. EDN: RRROVX.
22. *Balkema A., de Haan L.* Residual life time at great age // Ann. Probab., 1974. Vol. 2. P. 792–804. doi: 10.1214/aop/1176996548.
23. *Pickands J.* Statistical inference using extreme order statistics // Ann. Stat., 1975. Vol. 3. P. 119–131. doi: 10.1214/aos/1176343003.
24. *Королев В. Ю., Соколов И. А.* Математические модели неоднородных потоков экстремальных событий. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2008. 200 с.
25. *Королев В. Ю., Черток А. В., Корчагин А. Ю., Горшенин А. К.* Вероятностно-статистическое моделирование информационных потоков в сложных финансовых системах на основе высокочастотных данных // Информатика и её применения, 2013. Т. 7. Вып. 1. С. 12–21. EDN: QCJCMN.
26. *Kalashnikov V.* Geometric sums: Bounds for rare events with applications. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publs., 1997. 270 p. doi: 10.1007/978-94-017-1693-2.
27. *Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. Я.* Математические основы теории риска. — 2-е изд. — М.: Физматлит, 2011. 620 с. EDN: UGLGSX.
28. *Рязанов А. М., Волканов Д. Ю.* Система сбора, хранения и обработки сетевого трафика для обучения алгоритмов прогнозирования качества наложенных каналов в сетях передачи данных // Тихоновские чтения. — М.: МАКС Пресс, 2024. Вып. 46. С. 97. EDN: MGGLQK.

Поступила в редакцию 05.04.2026
Принята к публикации 15.09.2026

FORECASTING OF RISKS OF ADVERSE EVENTS IN DATA TRANSMISSION AND PROCESSING NETWORKS

***V. Yu. Korolev*[1,2], *D. Yu. Volkanov*[1], *and T. D. Gerasin*[1]**

[1]Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

[2]Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Voscow 119333, Russian Federation

Abstract: An algorithm is proposed for forecasting the risks of adverse events related to anomalous values of quality of service characteristics in data transmission channels. This method is based on a modified Peaks-Over-Threshold technique. The study considers data represented by a time series of values for four quality of service characteristics: bandwidth, round-trip-time, jitter, and relative number of lost packets aggregated per second. These characteristics were

computed from real data collected in a real data transmission and processing network. As adverse events, overloads, packet losses, and large values of round-trip times are considered. The proposed method makes it possible to forecast the risks of adverse events by calculating the probabilities that an adverse event occurs during a specified time interval or estimation of the distribution of the time interval till the next adverse event. The method is designed to be applied in the sliding window mode which makes it possible to use this approach for the analysis of nonhomogeneous and nonstationary processes and/or flows of events. The purpose of forecasting is to choose the optimal transmission channel with the account of the corresponding requirements to the quality of transmission and the network state providing the given values of the parameters of quality of service.

Keywords: data transmission and processing networks; quality of service; generalized Rényi theorem; Balkema – Pickands – De Haan theorem; Peaks-Over-Threshold method; forecasting of risks of adverse events

DOI: 10.14357/08696527260301 **EDN:** OHZJFM

Acknowledgments

The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the Program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the Agreement No. 075-15-2025-345.

References

1. Cisco Annual Reports. Available at: https://www.cisco.com/c/en/us/about/annual-reports.html (accessed September 23, 2026).
2. Krapiva, V. S., and D. A. Lobova. 2025. Sovershenstvovanie sistemy pokazateley kachestva uslug infokommunikatsiy v usloviyakh tsifrovoy transformatsii [Improving the system of indicators for the quality of infocommunication services in the context of digital transformation]. *Ekonomika i sotsium* [Economy and Society] 5-2(132):1233–1238. doi: 10.5281/ZENODO.15705196. EDN: TICCOL.
3. Abashkin, V. L., and M. K. Sakhno. 2025. Razvitie internet-trafika v Rossii i drugikh stranakh BRIKS+ [Development of internet-traffic in Russia and other BRICS+ countries]. Moscow: Institute for Statistical Studies and Economics of Knowledge, National Research University Higher School of Economics. Available at: https://issek.hse.ru/news/1048718687.html (accessed September 23, 2026).
4. Kolotovkin, I. S. 2020. Neyronnye seti v zadachakh raspredeleniya trafika komp'yuternykh setey [Neural networks in computer network traffic distribution tasks]. *XVIII Vserossiyskaya nauchnaya konferentsiya "Neyrokompyutery i ikh primenenie". Tezisy dokladov* [18th All-Russian Scientific Conference "Neurocomputers and Their Application." Abstracts]. Moscow: MGPPU. 330–332. EDN: KBIIMZ.
5. Ryazanov, A. M., D. Yu. Volkanov, and N. I. Tsyganov. 2023. Metody sbora i khraneniya setevogo trafika dlya resheniya zadachi prognozirovaniya kachestva geterogennykh kanalov v setyakh peredachi dannykh [Methods for collecting and storing network traffic to address the problem of predicting the quality of heterogeneous channels in

data transmission networks]. *Programmnye sistemy i instrumenty* [Software Systems and Tools] 23:83–91. EDN: ULVXPS.

6. Tsvetkova, V. P., and E. P. Stepanov. 2023. Issledovanie metodov effektivnogo obshcheniya v mnogoagentnom obuchenii dlya zadachi balansirovki setevogo trafika [A study of effective communication methods in multiagent learning for network traffic balancing]. *Programmnye sistemy i instrumenty* [Software Systems and Tools] 23:106–119. EDN: KHTEKK.
7. Cadzow, J. 1983. ARMA time series modeling: An effective method. *IEEE T. Aero. Elec. Sys.* AES-19(1):49–58. doi: 10.1109/TAES.1983.309419.
8. Engle, R. F., and K. F. Kroner. 1996. Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Economet. Theor.* 11(1):122–150.
9. Engle, R. F., and J. R. Russell. 1998. Autoregressive conditional duration: A new model for irregularly spaced transaction data. *Econometrica* 66(5):1127–1162. doi: 10.2307/2999632.
10. Shu, Y., Z. Jin, L. Zhang, L. Wang, and O. W. W. Yang. 1999. Traffic prediction using FARIMA models. *Conference (International) on Communications Proceedings*. IEEE. 891–895. doi: 10.1109/ICC.1999.765402.
11. Chen, H., J. Wu, and S. Gao. 2006. A study of autoregressive conditional heteroscedasticity model in load forecasting. *Conference (International) on Power System Technology Proceedings*. IEEE. Art. 321620. 8 p. doi: 10.1109/ICPST.2006.321620.
12. Box, G. E. P., G. M. Jenkins, G. C. Reinsel, and G. M. Ljung. 2015. *Time series analysis: Forecasting and control*. 5th ed. New York, NY: Wiley. 712 p. doi: 10.1111/jtsa.12194.
13. Go, F., R. L. Smelyanskiy, and V. Yu. Korolev. 2024. Issledovanie effektivnosti primeneniya metoda vektornoy avtoregressii dlya prognozirovaniya kachestva kanala peredachi dannykh [A study of the effectiveness of using the vector autoregression method to predict the quality of a data transmission channel]. *Programmnye sistemy i instrumenty* [Software Systems and Tools] 24:36–54. EDN: OIBEMH.
14. Chen, T.-T., and S.-J. Lee. 2015. A weighted LS-SVM based learning system for time series forecasting. *Inform. Sciences* 299:99–116. doi: 10.1016/j.ins.2014.12.031.
15. Rady, E. H. A., H. Fawzy, and A. M. A. Fattah. 2021. Time series forecasting using tree based methods. *J. Statistics Applications Probability* 10(1):229–244. doi: 10.18576/jsap/100121.
16. Tajmouati, S., B. E. Wahbi, A. Bedoui, A. Abarda, and M. Dakkon. 2024. Applying k-nearest neighbors to time series forecasting: Two new approaches. *J. Forecasting* 43(5):1559–1574. doi: 10.1002/for.3093.
17. Lindemann, B., T. Muller, H. Vietz, N. Jazdi, and M. Weyrich. 2021. A survey on long short-term memory networks for time series prediction. *Proc. CIRP* 99:650–655. doi: 10.1016/j.procir.2021.03.088.
18. Wibawa, A. P., A. B. P. Utama, H. Elmunsyah, and U. Pujianto. 2022. Time-series analysis with smoothed convolutional neural network. *J. Big Data* 9:44. 18 p. doi: 10.1186/s40537-022-00599-y.
19. Wen, Q., T. Zhou, C. Zhang, W. Chen, Z. Ma, J. Yan, and L. Sun. 2023. Transformers in time series: A survey. *32nd Joint Conference (International) on*

Artificial Intelligence Proceedings. Fremont, CA: IJCAI. Survey Track. 6778–6786. doi: 10.24963/ijcai.2023/759.

20. Gorshenin, A., A. Kozlovskaya, S. Gorbunov, and I. Kochetkova. 2024. Mobile network traffic analysis based on probability-informed machine learning approach. *Comput. Netw.* 247:110433. 17 p. doi: 10.1016/j.comnet.2024.110433.
21. Grigorieva, M. E., V. Yu. Korolev, and I. A. Sokolov. 2013. Predel'naya teorema dlya geometricheskikh summ nezavisimykh neodinakovo raspredelennykh sluchaynykh velichin i ee primenenie k prognozirovaniyu veroyatnosti katastrof v neodnorodnykh potokakh ekstremal'nykh sobytiy [A limit theorem for geometric sums of independent nonidentically distributed random variables and its application to the prediction of the probabilities of catastrophes in nonhomogeneous flows of extremal events]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 7(4):11–19. doi: 10.14357/19922264130402. EDN: RRROVX.
22. Balkema, A., and L. de Haan. 1974. Residual life time at great age. *Ann. Probab.* 2(5):792–804. doi: 10.1214/aop/1176996548.
23. Pickands, J. 1975. Statistical inference using extreme order statistics. *Ann. Stat.* 3(1):119–131. doi: 10.1214/aos/1176343003.
24. Korolev, V. Yu., and I. A. Sokolov. 2008. *Matematicheskie modeli neodnorodnykh potokov ekstremal'nykh sobytiy* [Mathematical models of nonhomogeneous flows of extremal events]. Moscow: TORUS PRESS. 200 p.
25. Korolev, V., A. Chertok, A. Korchagin, and A. Gorshenin. 2013. Veroyatnostno-statisticheskoe modelirovanie informatsionnykh potokov v slozhnykh finansovykh sistemakh na osnove vysokochastotnykh dannykh [Probability and statistical modeling of information flows in complex financial systems based on high-frequency data]. *Informatika i ee primeneniya — Informatics and Applications* 7(1)12–21. EDN: QCJCMN.
26. Kalashnikov, V. 1997. *Geometric sums: Bounds for rare events with applications*. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publs. 270 p. doi: 10.1007/978-94-017-1693-2.
27. Korolev, V. Yu., V. E. Bening, and S. Ya. Shorgin. 2011. *Matematicheskie osnovy teorii riska* [Mathematical foundations of risk theory]. 2nd ed. Moscow: FIZMATLIT. 620 p. EDN: UGLGSX.
28. Ryazanov, A. M., and D. Yu. Volkanov. 2024. Sistema sbora, khraneniya i obrabotki setevogo trafika dlya obucheniya algoritmov prognozirovaniya kachestva nalozhennykh kanalov v setyakh peredachi dannykh [A system for collecting, storage, and processing of the network traffic for training the algorithms of forecasting of the quality of superimposed channels in data transmission networks]. *Tikhonovskie chteniya* [Tikhonov Readings]. Moscow: MAKS Press. 46:97. EDN: MGGLQK.

Received April 5, 2026
Accepted September 15, 2026

Contributors

Korolev Victor Yu. (b. 1954) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, head of Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University,

1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; leading scientist, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; vkorolev@cs.msu.su

Volkanov Dmitrii Yu. (b. 1979) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; volkanov@asvk.cs.msu.ru

Gerasin Timofey D. (b. 2000) — PhD student, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; timger2357@gmail.com

КРИТЕРИЙ СТАЦИОНАРНОСТИ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕИДЕНТИЧНЫМИ СЕРВЕРАМИ И ЗАЯВКАМИ РАЗНЫХ КЛАССОВ*

Е. В. Морозов[1]

Аннотация: Приведено новое короткое доказательство критерия стационарности многосерверной стохастической системы обслуживания вида $M/G/m$ с неограниченным буфером для ожидания и заявками разных классов, времена обслуживания которых зависят как от класса заявки, так и от назначенного ей сервера. Доказательство опирается на теорию регенерирующих процессов и соотношение баланса для числа заявок в системе, в отличие от найденного ранее доказательства, использовавшего балансовое соотношение для величины незавершенной работы в системе. Критерий формулируется в конструктивном виде и имеет следующую очевидную вероятностную интерпретацию: интенсивность входного потока заявок должна быть меньше надлежащим образом определяемой максимальной пропускной способности системы. Кроме того, в доказательстве показаны все основные шаги регенеративного метода анализа стационарности стохастических систем обслуживания.

Ключевые слова: многосерверная система обслуживания; регенерация; неидентичные серверы; заявки разных классов; критерий стационарности

DOI: 10.14357/08696527260302 **EDN:** KQFRWR

1 Введение

Данная работа содержит новое короткое доказательство критерия стационарности многосерверной стохастической системы обслуживания с заявками разных классов, обслуживание которых зависит как от класса заявки, так и от назначенного ей сервера. Таким образом, можно утверждать, что серверы в системе неидентичны. В качестве базовой модели обслуживания рассматривается m-серверная система вида $M/G/m$ с неограниченным буфером для ожидающих заявок и входными пуассоновскими потоками заявок K разных классов. Однако проведенный анализ непосредственно переносится на систему вида $\mathrm{GI}/G/m$ с единственным входным процессом восстановления, в котором вновь поступающая заявка, независимо от других событий в системе, будет заявкой класса k с вероятностью p_k, $\sum_{k=1}^{K} p_k = 1$. Разумеется, предположение о неидентичных серверах (неоднородность) делает модель гораздо более гибкой

*Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2025-345.

[1]Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук; Петрозаводский государственный университет, emorozov@krc.karelia.ru

для практических приложений. Неоднородность — естественное предположение при стохастическом моделировании современных вычислительных систем как большого масштаба [1–3], так и высокой степени детализации [4]. При этом может рассматриваться неоднородность серверов как на уровне отдельной многосерверной системы обслуживания, так и на уровне устройств вычислительной сети в целом.

Хорошо известно, что анализ многосерверных систем весьма сложен, а для систем с неидентичными серверами нет явных аналитических результатов для стационарных характеристик, если задаваемые распределения (времени обслуживания, интервала входного потока) не являются показательными. Однако знание условий стационарности таких систем может оказаться важной альтернативой отсутствию аналитических формул, особенно в случае регенерирующего основного процесса, описывающего динамику системы (который и рассматривается в данной работе). В этом случае регенеративное (имитационное) моделирование позволяет получать надежные оценки требуемых стационарных характеристик системы, в частности на основе регенеративной версии центральной предельной теоремы (см. гл. IV в [5]). Критерий стационарности, рассматриваемый в данной работе, имеет конструктивную форму и ясный интуитивный смысл, а его практическое использование соответствует хорошо известному принципу: интенсивность входного процесса должна быть меньше (надлежащим образом определенной) максимальной пропускной способности системы.

Надо отметить, что ранее в работе [6] (см. также [7]) было представлено иное доказательство критерия стационарности, которое опиралось на свойства процесса незавершенной работы в системе, в то время как в данной статье используется соотношение баланса для процесса числа заявок в системе. На самом деле здесь дано новое доказательство достаточности соответствующего условия, а доказательство необходимости остается неизменным и поэтому опущено.

Рассматриваемая система весьма сложна для анализа, однако она относится к регенерирующим, т. е. все описывающие ее динамику процессы — классически регенерирующие. Это позволяет использовать мощные методы регенеративного анализа для получения условий ее стационарности. Важно подчеркнуть, что рассматриваемый подход демонстрирует все важнейшие шаги метода анализа стационарности регенерирующих систем обслуживания, подробно представленного в книге [7], которая также содержит предшествующие результаты (и ссылки на работы), относящиеся к анализу стационарности многосерверных систем, в том числе с несколькими классами заявок. Отметим, что стационарность в данной работе понимается как положительная возвратность регенерирующего процесса, описывающего динамику рассматриваемой системы обслуживания.

Данная работа посвящается памяти академика РАН Александра Алексеевича Боровкова (1931–2026), на глубокие идеи которого она в значительной мере опирается. В частности, в работе используется свойство стохастической ограниченности (или ограниченности по вероятности [8]) незавершенного времени обслуживания, фактически установленное в его ранней работе [9], а также

принцип «насыщения», использованный, в частности, при построении так называемых систем с автономным обслуживанием [9, 10].

2 Описание модели

Рассматривается m-серверная система обслуживания типа $M/G/m$ с неограниченным буфером для ожидания и K классами заявок, причем заявки класса k поступают в систему в соответствии с пуассоновским потоком с параметром $\lambda_k \in \in (0, \infty)$, $k = \overline{1, K}$; $m \geq 1$. Входные потоки предполагаются независимыми. При отсутствии свободного сервера заявки образуют общую очередь в порядке поступления. Времена обслуживания заявок класса k, поступающих на сервер i, образуют последовательность независимых, одинаково распределенных (НОР) случайных величин (СВ) $\{S_{ik}^{(n)}, n \geq 1\}$. Описанную систему обозначим через Σ. Ниже будет рассмотрена еще одна система, обозначаемая $\tilde{\Sigma}$, с единственным входным процессом восстановления, в котором произвольная заявка принадлежит классу k с вероятностью p_k независимо от других событий в системе. Обозначим через $\mu_{ik} = 1/\mathsf{E}S_{ik} \in (0, \infty)$ интенсивность обслуживания заявки класса k на сервере i, где через S_{ik} обозначен типичный элемент последовательности $\{S_{ik}^{(n)}\}$. (Типичный элемент последовательности НОР СВ обозначается без его номера в последовательности.) Обозначим суммарную интенсивность входного потока через $\lambda = \sum_k \lambda_k$. Важно отметить, что ввиду прямой дисциплины обслуживания с вероятностью $p_k = \lambda_k/\lambda$ произвольная заявка (суммарного) входного пуассоновского потока оказывается k-заявкой. Более того, с такой же вероятностью любая заявка, поступающая на (любой) сервер, является k-заявкой, $k = \overline{1, K}$. Обозначим через $I_i(t)$ время простоя сервера i в интервале $[0, t]$, а через $I(t) = \sum_{i=1}^{m} I_i(t)$ — суммарное время простоя всех серверов. Пусть $\nu(t)$ обозначает число заявок в системе в момент t^-, $A(t)$ — общее число поступивших в систему заявок, $D_i(t)$ — число обслуженных заявок сервером i (все — в интервале $[0, t]$), и пусть $D(t) = \sum_i D_i(t)$. (Все процессы предполагаются непрерывными справа и имеющими пределы слева [11].)

Для каждого i и k введем последовательность НОР-индикаторов $\{\mathsf{1}_{ik}^{(n)}, n \geq \geq 1\}$ таких, что $\mathsf{1}_{ik}^{(n)} = 1$, если n-я по счету заявка, поступающая на сервер i, является k-заявкой, и $\mathsf{1}_{ik}^{(n)} = 0$ в противном случае. Важно подчеркнуть, что среднее $\mathsf{E}\mathsf{1}_{ik}^{(n)} = \mathsf{E}\mathsf{1}_{ik} = p_k$ для всех i, поскольку каждый сервер получает заявки из общей очереди, образованной в порядке поступления. Таким образом, индикаторы (типичные) $\mathsf{1}_{ik}$ и $\mathsf{1}_{jk}$ имеют одно и то же распределение для каждого фиксированного k и всех i и j, причем $\mathsf{E}\mathsf{1}_{ik} = p_k$, $i = \overline{1, m}$. В связи с этим время обслуживания n-й по счету заявки на сервере i можно определить как сумму

$$S_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{K} \mathsf{1}_{ik}^{(n)} S_{ik}^{(n)} \quad i = \overline{1, m}; \quad n \geq 1\,.$$

Времена обслуживания $\{S_i^{(n)}\}$ образуют НОР-последовательность, типичный элемент которой имеет среднее значение $\mathsf{E}S_i = \sum_{k=1}^{K} p_k \mathsf{E}S_{ik}$, $i = \overline{1,m}$. Обозначим через $S_i(t)$ остаточное время текущего в момент t^- обслуживания на сервере i (полагаем $S_i(t) = 0$, если сервер свободен), $t \geq 0$, $i = \overline{1,m}$. Введем также интенсивность обслуживания $\mu_i = 1/\mathsf{E}S_i$ на сервере i и суммарную (максимальную) интенсивность обслуживания всей системы $\mu = \sum_i \mu_i$. (Ее также называют пропускной способностью или мощностью системы.) Также обозначим через $\widehat{D}_i(t)$ число уходов обслуженных заявок с сервера i в интервале $[0,\, t]$ при условии, что сервер постоянно занят в этом интервале (это так называемый насыщенный режим), $i = \overline{1,m}$. Более точно, на основе процедуры каплинга в процессе $\{\widehat{D}_i(t),\, t \geq 0\}$ используются те же самые интервалы, которые представляют собой времена обслуживания, формирующие реальный процесс уходов $\{D_i(t),\, t \geq 0\}$ в системе Σ. Таким образом, процесс $\{\widehat{D}_i(t),\, t \geq 0\}$ можно представить как результат «выбрасывания» интервалов простоя сервера i на промежутке $[0,\, t]$ и сдвига полученной траектории к началу координат. Эта процедура применяется к каждому серверу и распространяется на $t \to \infty$. (Отметим, что на самом деле в каплинге используются не исходные, а стохастически эквивалентные им СВ (см., например, [12]).)

Как хорошо известно, классическая регенерация процесса $\{\nu(t),\, t \geq 0\}$ возникает в моменты прихода заявок в полностью пустую систему, определяемые рекурсивно как

$$T_0 := 0,\ T_{n+1} = \inf_k \left(t_k : t_k > T_n,\ \ \nu\left(t_k^-\right) = 0\right),\ \ n \geq 0\,.$$

Длины циклов регенерации $T_{n+1} - T_n$ — НОР СВ, причем типичная длина цикла будет обозначаться через T. Таким образом, верно стохастическое равенство $T =_{\mathrm{st}} T_{n+1} - T_n$, $n \geq 1$. Будем считать (лишь для некоторого упрощения доказательства), что в момент прихода первой заявки $t_1 = 0$ система полностью пуста (т. е. $T_0 = 0$ — момент регенерации). В противном случае распределение времени T_1 до первого момента регенерации может не совпадать с распределением T, однако проведенный ниже анализ остается справедливым и для этого более общего случая (см. разд. 4 данной статьи).

Определим теперь незавершенное в момент t время до очередного момента регенерации процесса очереди:

$$T(t) = \min_{n \geq 1} \left(T_n - t : T_n > t\right),\ \ t \geq 0\,.$$

Заметим, что $T(0) = T_1 =_{\mathrm{st}} T$. Очевидно, моменты регенерации $\{T_n\}$ образуют процесс восстановления.

Рассмотрим некоторый регенерирующий процесс $\{X(t)\}$ с моментами регенерации $\{T_n\}$ и длиной цикла регенерации T. Ключевой асимптотический

результат, используемый в регенеративном анализе стационарности, состоит в следующем: если $\mathsf{E}T = \infty$, то имеет место сходимость по вероятности

$$T(t) \Rightarrow \infty, \;\; t \to \infty\,,$$

или, эквивалентно, $\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(T(t) > x) = 1$ для каждого $x \geq 0$. Обратно, сходимость $T(t) \Rightarrow \infty$ влечет $\mathsf{E}T = \infty$ (см. гл. XI в [8].) Регенерирующий процесс $\{X(t)\}$ называется положительно возвратным, если

$$\mathsf{E}T < \infty\,, \tag{1}$$

и в этом случае процесс незавершенного времени $\{T(t),\, t \geq 0\}$ стохастически ограничен (см. [7, 8]), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $C < \infty$, что

$$\inf_{t\geq 0} \mathsf{P}(T(t) \leq C) \geq 1 - \varepsilon\,.$$

Если в дополнение к условию (1) распределение длины цикла T нерешетчатое [8], то существует единственное предельное стационарное распределение

$$\pi(\cdot) = \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(X(t) \in \cdot) = \mathsf{P}(X \in \cdot) = \frac{\mathsf{E}\left(\int_0^T 1(X(t) \in \cdot)\, dt\right)}{\mathsf{E}\,T}\,, \tag{2}$$

где X есть предел по распределению процесса $X(t)$ при $t \to \infty$. (Подробное изложение соответствующей теории можно найти в [7, 11, 13].) Соотношение (2) показывает важность понятия положительной возвратности для регенерирующего процесса (по аналогии с ролью этого понятия в теории цепей Маркова [11]). Отметим, что используемые ниже результаты теории восстановления можно найти, например, в монографиях [11, 13, 14].

3 Критерий стационарности

Цель данной работы — дать новое, гораздо более короткое, чем прежнее (см., например, разд. 4.1, 4.4 в монографии [7]), доказательство следующего критерия положительной возвратности процесса очереди в рассматриваемой системе. (Заметим, что впервые этот критерий был найден в статье [6].) Ниже система обслуживания называется положительно возвратной, если регенерирующий процесс $\{\nu(t)\}$ — положительно возвратный.

Теорема 1.

I. *Если*

$$\lambda = \sum_k \lambda_k < \mu = \sum_i \mu_i. \tag{3}$$

то система Σ *положительно возвратна*.

II. *Пусть* $\lambda \geq \mu$. *Тогда если* $\lambda > \mu$, *то с вероятностью* 1

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\nu(t)}{t} \geq \lambda - \mu > 0\,,$$

если $\lambda = \mu$, то $\nu(t) \Rightarrow \infty$.

Доказательство. Предположим, от противного, что при условии (3)

$$\nu(t) \Rightarrow \infty, \quad t \to \infty\,. \tag{4}$$

Тогда для каждого i $\mathsf{P}\,(S_i(t) = 0) \leq \mathsf{P}(\nu(t) \leq m) \to 0$ и среднее суммарное время простоя серверов удовлетворяет соотношению:

$$\mathsf{E}I(t) = \sum_i \int_0^t \mathsf{P}(S_i(u) = 0)\, du = o(t), \;\; t \to \infty\,. \tag{5}$$

По построению $D_i(t) = \widehat{D}_i(t - I_i(t))$, и поэтому верно следующее соотношение для числа заявок в системе в момент t:

$$\nu(t) = A(t) - \sum_{i=1}^{m} D_i(t) = A(t) - \sum_{i=1}^{m} \widehat{D}_i\,(t - I_i(t))\,, \;\; t \geq 0\,. \tag{6}$$

Поскольку $\{\widehat{D}_i(t)\}$ есть процесс восстановления со средней длиной интервала восстановления $\mathsf{E}S_i = 1/\mu_i$, то при $t \to \infty$ с вероятностью 1

$$\frac{\widehat{D}_i(t)}{t} \to \mu_i, \quad i = \overline{1, m}\,. \tag{7}$$

Ввиду (5), для любого $\delta > 0$ можно выбрать такое число t_δ, что $\mathsf{E}I(t)/t \leq \delta^2$ при $t \geq t_\delta$. Тогда по неравенству Маркова

$$\mathsf{P}\left(\frac{I(t)}{t} > \delta\right) \leq \frac{\mathsf{E}I(t)}{t\delta} \leq \delta, \;\; t \geq t_\delta\,.$$

Таким образом, имеет место также сходимость по вероятности $I(t)/t \Rightarrow 0$, откуда следует

$$\frac{I_i(t)}{t} \Rightarrow 0, \;\; i = \overline{1, m}; \quad t \to \infty\,. \tag{8}$$

Обозначим $\mu - \lambda = \varepsilon_o$, так что $\varepsilon_o > 0$. Поскольку $A(t)/t \Rightarrow \lambda$ с вероятностью 1 (и по вероятности), то из (6), ввиду (7) и (8), следует

$$0 \le \frac{\nu(t)}{t} = \frac{A(t)}{t} - \sum_i \frac{\widehat{D}_i(t - I_i(t))}{t - I_i(t)} \frac{t - I_i(t)}{t} \Rightarrow \lambda - \mu = -\varepsilon_o < 0, \;\; t \to \infty.$$

Таким образом, неотрицательная величина $\nu(t)/t$ сходится по распределению к отрицательной постоянной. Полученное противоречие заставляет отказаться от предположения (4), т. е. $\nu(t) \not\Rightarrow \infty$. Поэтому

$$\inf_i \mathsf{P}(\nu(u_j) \le N) \ge \varepsilon \tag{9}$$

для некоторой детерминированной последовательности моментов времени $u_j \to$ $\to \infty$ и некоторых постоянных N и $\varepsilon > 0$.

Завершающий этап доказательства состоит в том, чтобы показать, что на событии $\{\nu(u_j) \le N\}$ система опустошается и наступает момент регенерации в течение независящего от j и u_j интервала времени с некоторой вероятностью, равномерно по j отделенной от нуля. Этот этап называется процедурой разгрузки [7].

Рассмотрим максимальное по всем классам и серверам время обслуживания n-й обслуживаемой заявки

$$\max_{1 \le k \le K} \max_{1 \le i \le m} S_{ik}^{(n)} =: \mathcal{S}_n \le \sum_k \sum_i S_{ik}^{(n)}, \;\; n \ge 1\,.$$

Заметим, что СВ $\{\mathcal{S}_n\}$ — НОР со средним $\mathsf{E}\mathcal{S} < \infty$. Построим нижнюю границу для распределения суммарной незавершенной работы в системе $W(u_j) = \sum_{i=1}^m W_i(u_j)$ в произвольный момент времени u_j, удовлетворяющий неравенству (9). Нетрудно видеть, что для произвольного заданного $x \ge 0$ выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(W(u_j) \le x) &\ge \mathsf{P}\left(\sum_{j=1}^{\nu(u_j)} \mathcal{S}_j + \sum_{i=1}^m S_i(u_j) \le x\right) \ge \\
&\ge \mathsf{P}\left(\sum_{j=1}^{N} \mathcal{S}_j + \sum_{i=1}^m S_i(u_j) \le x,\, \nu(u_j) \le N\right) \ge \\
&\ge \mathsf{P}\left(\nu(u_j) \le N\right) - \mathsf{P}\left(\sum_{j=1}^{N} \mathcal{S}_j + \sum_{i=1}^m S_i(u_j) > x\right). \qquad (10)
\end{aligned}$$

Отметим, что процесс незавершенного времени обслуживания $\{S_i(t),\, t \geq 0\}$ ограничен по вероятности, что следует из важной работы [9]. Поэтому найдется число x_0 такое, что вычитаемое в (10) может быть сделано меньше $\varepsilon/2$ при $x \geq x_0$, где ε удовлетворяет (9). Тогда из соотношений (9) и (10) следует справедливость следующей равномерной (по j) нижней границы:

$$\inf_j \mathsf{P}(W(u_j) \leq x) \geq \frac{\varepsilon}{2}, \;\; x \geq x_0.$$

Выберем произвольную постоянную $C \geq x_0 + \Delta$, где $\Delta > 0$ — другая произвольная постоянная. Тогда имеет место следующая равномерная нижняя граница для распределения незавершенного в момент u_j времени до регенерации:

$$\inf_j \mathsf{P}(T(u_j) \leq C) \geq \inf_j \mathsf{P}\left(W(u_j) \leq x_0,\, x_0 < \tau(u_j) \leq x_0 + \Delta\right) \geq$$

$$\geq \frac{\varepsilon}{2}\, e^{-\lambda x_0}(1 - e^{-\lambda\Delta}),$$

где учтено, что остаточное время $\tau(u_j)$ в момент u_j до прихода очередной заявки распределено как СВ τ. Отсюда следует, что $T(t) \not\Rightarrow \infty$, и поэтому $\mathsf{E}T < \infty$, т. е. система положительно возвратна.

Доказательство п. II (при $\lambda \geq \mu$) не меняется по сравнению с [7] и поэтому опущено. Теорема доказана.

Отметим, что в случае идентичных серверов, т. е. при $\mu_i \equiv \mu_o$, условие (3) сводится к хорошо известному условию $\lambda < \mu_o m$ [7, 11, 13].

Результаты теоремы 1 непосредственно переносятся на систему $\tilde{\Sigma}$ с единственным входным процессом восстановления с HOP-интервалами между приходами заявок $\{\tau_n,\, n \geq 1\}$ с интенсивностью $\lambda = 1/\mathsf{E}\tau$. При этом новая заявка оказывается заявкой класса k с заданной вероятностью p_k, и поэтому заявки класса k образуют входной процесс восстановления с интенсивностью $\lambda_k := \lambda p_k$ ($\sum_k p_k = 1$). Минимальным дополнительным условием в этом случае (по сравнению со случаем пуассоновского входного потока) оказывается требование

$$\max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq k \leq K} \mathsf{P}(\tau > S_{ik}) > 0\,, \tag{11}$$

которое используется в процедуре разгрузки для достижения состояния нуль после попадания процесса $\nu(\cdot)$ в интервал $[0,\, N]$, см. (9). (Также см. п. 4.1.1 в [7].) В этом случае процедура разгрузки оказывается сложнее, чем в случае показательного интервала τ, однако она упрощается, если (11) заменить на условие

$$\min_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq k \leq K} \mathsf{P}(\tau > S_{ik}) > 0\,.$$

Заметим, что условие (11) автоматически выполнено, если интервал τ не ограничен.

4 Заключительные замечания

На самом деле проведенный выше анализ справедлив для системы с произвольным (конечным с вероятностью 1) начальным значением $\nu(0)$, когда требуется дополнительно доказать, что первый момент регенерации $T_1 < \infty$ с вероятностью 1. (См. разд. 2.3, гл. 2 в [7].)

Очевидно, что теорема 1 содержит критерий положительной возвратности также и для процесса незавершенной работы в системе, который регенерирует в те же самые моменты регенерации $\{T_n\}$.

В работе [6] использовалось следующее соотношение баланса между величиной незавершенной работы $W(t)$ в момент t, поступившей в систему работой $V(t) = \sum_{n=1}^{A(t)} S_n$ (S_n — время обслуживания n-й заявки) и обслуженной работой $V_0(t)$, в интервале $[0,\, t]$:

$$W(t) = V(t) - V_0(t), \;\; t \geq 0\,. \tag{12}$$

В случае одного класса заявок (с типичным временем обслуживания S) и идентичных серверов $V(t)/t \to \lambda/\mathsf{E}S$. Однако для рассматриваемой в данной статье системы этот предел не удается определить, поскольку распределение величины S_n зависит от сервера, который назначается n-й по счету заявке. Это обстоятельство значительно усложняет анализ стационарности в [6] на основе соотношения (12).

Отметим, что проведенный анализ справедлив для более широкого класса входных процессов, если существует конечный предел $\lim_{t\to\infty} A(t)/t = \lambda$ и система обладает классической регенерацией. Это верно, в частности, для входного регенерирующего процесса, рассмотренного в разд. 4.6 в [7].

Требование наличия лишь одного входного процесса восстановления (в системе $\tilde{\Sigma}$) связано с тем, что проведенный анализ опирается на понятие классической регенерации по Смиту [14]. При наличии более одного (непуассоновского) входного процесса классическая регенерация, вообще говоря, не имеет места. В этом случае, однако, можно использовать так называемую однозависимую регенерацию [15], когда два соседних цикла регенерации зависимы, но их длины, вообще говоря, нет. Такая регенерация возникает при построении моментов регенерации цепей Маркова, возвратных по Харрису, методом расщепления [11, 16]. Альтернативный метод построения такой (более сложной) регенерации, основанной на теории обновляющих событий, был предложен А. А. Боровковым в [17].

Представляется перспективным обобщение проведенного анализа на многосерверную систему с однозависимой регенерацией в случае, когда длины циклов по-прежнему образуют процесс восстановления.

Литература

1. *Borst S.* Load balancing in large-scale heterogeneous systems // Queueing Syst., 2022. Vol. 100. No. 3-4. P. 397–399. doi: 10.1007/s11134-022-09819-x.

2. *Stavrinides G. L., Karatza H. D.* Security, cost and energy aware scheduling of real-time IoT Workflows in a mist computing environment // Inform. Syst. Front., 2024. Vol. 26. Iss. 4. P. 1223–1241. doi: 10.1007/s10796-022-10304-2.
3. *Jaleel A. J., Doroudi S., Gardner K.* Queue-length-aware dispatching in large-scale heterogeneous systems // Queueing Syst., 2024. Vol. 108. No. 1-2. P. 125–184. doi: 10.1007/s11134-024-09918-x.
4. *Qiguang T., Wei C., Dake L.* Task scheduling for heterogeneous multi-core processors based on deep reinforcement learning // Int. J. Intell. Syst., 2025. Art. 7562400. 22 p. doi: 10.1155/int/7562400.
5. *Asmussen S., Glynn P. W.* Stochastic simulation: Algorithms and analysis. — Cham, Switzerland: Springer, 2007. 476 p.
6. *Morozov E.* Stability criterion of a general multiserver multiclass queueing system // Information sciences systems / Eds. T. Czachórski, E. Gelenbe, R. Lent. — Cham, Switzerland: Springer, 2014. P. 229–238.
7. *Morozov E., Steyaert B.* Stability analysis of regenerative queueing models. — Cham, Switzerland: Springer, 2021. 185 p.
8. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения / Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. Т. 2. 752 с. (*Feller W.* An introduction to probability theory and its applications. — 2nd ed. — New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 1971. Vol. 2. 752 p.)
9. *Боровков А. А.* Некоторые предельные теоремы теории массового обслуживания. II (многоканальные системы) // Теория вероятн. и ее примен., 1965. Т. 10. Вып. 3. С. 409–437.
10. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. — М.: Наука, 1972. 368 с.
11. *Asmussen S.* Applied probability and queues. — New York, NY, USA: Springer, 2003. 439 p.
12. *Thorisson H.* Coupling, stationarity and regeneration. — New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 2000. 517 p.
13. *Serfozo R. F.* Basics of applied stochastic processes. — Heidelberg: Springer, 2009. 443 p.
14. *Кокс Д. Р., Смит В. Л.* Теория восстановления / Пер. с англ. — М.: Советское радио, 1967. 300 с. (*Cox D. R.* Renewal theory. — Methuen's monographs on applied probability and statistics ser. — London–New York: Methuen & Co. Ltd and John Wiley & Sons, 1962. 142 p.)
15. *Sigman K.* One-dependent regenerative processes and queues in continuous time // Math. Oper. Res., 1990. Vol. 15. P. 175–189.
16. *Sigman K.* Queues as Harris recurrent Markov chains // Queueing Syst., 1988. Vol. 3. P. 179–198.
17. *Боровков А. А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. — М.: Наука, 1980. 384 с.

Поступила в редакцию 28.06.2026
Принята к публикации 15.09.2026

STABILITY CRITERION OF A MULTICLASS QUEUEING SYSTEM WITH NONIDENTIAL SERVERS

E. V. Morozov[1,2]

[1]Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre of the Russian Academy of Science, 11 Pushkinskaya Str., Petrozavodsk 185910, Republic of Karelia, Russian Federation

[2]Petrozavodsk State University, 33 Lenina Pr., Petrozavodsk 185910, Republic of Karelia, Russian Federation

Abstract: The paper provides a new, short proof of the stability criterion for a multiclass stochastic $M/G/m$-type queueing system with an unlimited buffer for the waiting customers and different classes of customers such that the service time of a customer depends both on their class and the assigned server. The proof is based on the theory of regenerative processes and a balance relation for the number of customers in the system, unlike the proof found earlier which used a balance relation for the workload process. The criterion is constructively formulated and has the following evident intuitive interpretation: the input rate must be less than the (properly defined) maximal capacity of the system. Moreover, the proof shows all the main steps of the regenerative stability analysis method of stochastic queueing systems.

Keywords: multiserver queueing system; regeneration; nonidentical servers; customers of different classes; stability criterion

DOI: 10.14357/08696527260302 **EDN:** KQFRWR

Acknowledgments

The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the Agreement No. 075-15-2025-345.

References

1. Borst, S. 2022. Load balancing in large-scale heterogeneous systems. *Queueing Syst.* 100 (3-4):397–399. doi: 10.1007/s11134-022-09819-x.
2. Stavrinides, G. L., and H. D. Karatza. 2024. Security, cost and energy aware scheduling of real-time IoT Workflows in a mist computing environment. *Inform. Syst. Front.* 26(4):1223–1241. doi: 10.1007/s10796-022-10304-2.
3. Jaleel, A. J., S. Doroudi, and K. Gardner. 2024. Queue-length-aware dispatching in large-scale heterogeneous systems. *Queueing Syst.* 108(1-2):125–184. doi: 10.1007/s11134-024-09918-x.
4. Qiguang, T., C. Wei, and L. Dake. 2025. Task scheduling for heterogeneous multi-core processors based on deep reinforcement learning. *Int. J. Intell. Syst.* 7562400. 22 p. doi: 10.1155/int/7562400.

5. Asmussen, S., and P. W. Glynn, 2007. *Stochastic simulation: Algorithms and analysis*. Cham, Switzerland: Springer. 476 p.
6. Morozov, E. 2014. Stability criterion of a general multiserver multiclass queueing system. *Information sciences systems*. Eds. T. Czachórski, E. Gelenbe, and R. Lent. Cham, Switzerland: Springer. 229–238.
7. Morozov, E., and B. Steyaert. 2021. *Stability analysis of regenerative queueing models*. Cham, Switzerland: Springer. 185 p.
8. Feller, W. 1971. *An introduction to probability theory and its applications*. 2nd ed. New York, NY: John Wiley & Sons. Vol. 2. 752 p.
9. Borovkov, A. A. 1965. Some limit theorems in the queueing theory II. *Theor. Probab. Appl.* 10:375–400.
10. Borovkov A. A. 1979. *Stochastic processes in queueing theory*. New York, NY: Springer. 368 p.
11. Asmussen, S. 2003. *Applied probability and queues.* New York, NY: Springer. 439 p.
12. Thorisson, H. 2000. *Coupling, stationarity and regeneration.* NY, Berlin, Heidelberg: Springer. 517 p.
13. Serfozo, R. F. 2009. *Basics of applied stochastic processes*. Heidelberg: Springer. 443 p.
14. Cox, D. R. 1962. *Renewal theory*. Methuen's monographs on applied probability and statistics ser. London – New York: Methuen & Co. Ltd and John Wiley & Sons. 142 p.
15. Sigman, K. 1990. One-dependent regenerative processes and queues in continuous time. *Math. Oper. Res.* 15: 175–189.
16. Sigman, K. 1988. Queues as Harris recurrent Markov chains. *Queueing Syst.* 3:179–198.
17. Borovkov, A. A. 1984. *Asymptotic methods in queueing theory*. New York, NY: Wiley. 384 p.

Received June 28, 2026
Accepted September 15, 2026

Contributor

Morozov Evsey V. (b. 1947) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences, 11 Pushkinskaya Str., Petrozavodsk 185910, Republic of Karelia, Russian Federation; professor, Petrozavodsk State University, 33 Lenina Pr., Petrozavodsk 185910, Republic of Karelia, Russian Federation; emorozov@karelia.ru

АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕГРУЗКОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ВЕКТОРНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ

***Фэнжуй Го*[1], *Р. Л. Смелянский*[2]**

Аннотация: Предложен комбинированный алгоритм управления перегрузкой TCP (Transmission Control Protocol), основанный на совместном использовании традиционного реактивного алгоритма управления размером Cwnd (Congestion Window) и метода прогнозирования Cwnd с помощью экспоненциальной векторной авторегрессии (Exponential Vector Autoregression, EVAR). После возникновения перегрузки метод EVAR используется для прогнозирования размера Cwnd на следующем интервале наблюдения, а полученный прогноз применяется в качестве нового значения Cwnd с целью получения большего объема доступной пропускной способности (ДПС). Кроме того, в работе вводится безопасный порог $\overline{\text{RTT}}$ (Round-Trip Time), который ограничивает использование прогнозируемого значения и позволяет избежать ситуации, когда слишком быстрое восстановление размера Cwnd приводит к возникновению дополнительных событий перегрузки. Предложенный алгоритм исследуется на экспериментальном стенде ns-3 при сопоставлении с NewReno, CUBIC и BBRv1. Результаты показывают, что по сравнению с базовыми алгоритмами управления перегрузкой предложенный алгоритм позволяет получить дополнительно не менее 0,5 Мбит/с ДПС.

Ключевые слова: управление перегрузкой TCP; экспоненциальная векторная авторегрессия; прогнозирование окна перегрузки; доступная пропускная способность; моделирование в ns-3

DOI: 10.14357/08696527260303 **EDN:** LRRIMB

1 Введение

Протокол TCP — основной протокол транспортного уровня с гарантированным сервисом [1]. Основную сложность в работу протокола TCP вносят изменчивость доступной пропускной способности транспортного соединения (далее — канала) и задержки пакетов в канале. Последняя величина оценивается через параметр RTT, отслеживаемый протоколом TCP. Причина этой изменчивости кроется в случайном характере смеси пакетов разных потоков данных, разделяющих одну и ту же линию передачи и ее сетевые устройства. Маршрут передачи, используемый протоколом TCP, состоит из нескольких линий и сетевых устройств. Состав потоков, разделяющих каждую из них, в разные моменты

[1]Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, guofengrui@lvk.cs.msu.ru

[2]Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, smel@cs.msu.ru

времени различен. Перегрузкой называют ситуацию, при которой суммарный поток данных, проходящий через хотя бы одно из устройств маршрута, превышает ресурсные возможности этого устройства. Как результат, устройство начинает сбрасывать пакеты.

Фактически алгоритм управления перегрузкой в каждый момент времени должен определять максимально допустимое число пакетов, которые он может инжектировать в канал, не вызывая перегрузки и не приводя к чрезмерному росту задержки передачи [2]. Это число определяет размер окна перегрузки (далее — Cwnd) на стороне отправителя. Ранее было предложено множество алгоритмов управления перегрузкой [3]. Факт возникновения перегрузки они определяют либо по потере пакета (так называемые loss-based-методы), либо по росту величины RTT (delay-based-методы). Величину Cwnd они подбирают, зондируя ДПС по схеме AIMD (Additive Increase Multiplicative Decrease) [4]. При возникновении перегрузки размер Cwnd сокращается, вследствие чего требуется время на его восстановление. Как правило, чем выше ДПС канала, тем продолжительнее период времени, необходимый для восстановления размера Cwnd [5]. В этот период ДПС канала недоиспользуется, а скорость потока данных оказывается ниже максимально возможной. Поэтому алгоритмы управления перегрузкой стремятся максимально сократить период восстановления размера Cwnd.

В качестве критерия оценки метода управления перегрузкой будет использоваться критерий

$$B_f - \frac{\mathrm{Cwnd}}{\mathrm{RTT}} \approx 0\,, \tag{1}$$

где B_f — доступная потоку f пропускная способность канала[1] (далее — просто ДПС). Величину $B_f - \mathrm{Cwnd}/\mathrm{RTT}$ будем называть недоиспользованной ДПС (НДПС). Чем ближе НДПС к нулю, тем лучше алгоритм управления перегрузкой использует ДПС потока.

В статье предлагается метод управления перегрузкой, где управление размером Cwnd представляет собой композицию традиционного алгоритма управления размером Cwnd и алгоритма на основе прогнозирования размера Cwnd по методу EVAR (подробно он описан в [6]). Метод EVAR был разработан для прогнозирования качества канала передачи данных на транспортном уровне, включая такие параметры, как RTT, ДПС и др.

2 Обзор алгоритмов управления перегрузкой

Как уже было отмечено выше, ДПС канала изменчива. Алгоритм управления перегрузкой должен максимально использовать ДПС, но так, чтобы не вызывать потерь и роста задержки передачи из-за роста длины очередей в канале [7].

[1] Подробная методика ее вычисления приведена в разд. 4.

Несмотря на то что базовая спецификация TCP была опубликована более 40 лет назад, TCP остается основным протоколом транспортного уровня для передачи данных в интернете. В связи с этим развитие алгоритмов управления перегрузкой по-прежнему остается актуальной задачей. Новые условия передачи данных связаны с ростом ДПС канала, увеличением произведения пропускной способности на задержку, появлением каналов с быстро меняющимися параметрами, а также широким использованием сетей центров обработки данных и беспроводных сетей. В этих условиях алгоритм управления перегрузкой должен не только выявлять факт возникновения перегрузки или ее приближения, но и быстрее восстанавливать размер Cwnd после его сокращения.

С методологической точки зрения различия между алгоритмами управления перегрузкой определяются тем, как выявляется факт возникновения перегрузки или ее приближения, а также тем, какая информация используется при формировании управляющего воздействия (решения). Можно выделить две большие группы алгоритмов управления перегрузкой [8]: реактивные и проактивные, основанные на прогнозе состояния канала.

Реактивные алгоритмы корректируют размер Cwnd по сигналам, отражающим уже наступившую (или нарастающую) перегрузку, например по потерям пакетов (loss-based), росту RTT или задержки в очереди (delay-based) и т. п. [9]. Примерами широко распространенных loss-based-алгоритмов могут служить Reno/NewReno [2, 10], CUBIC [11]. Эти алгоритмы выбраны в качестве представителей реактивного управления перегрузкой потому, что они считаются стандартами для всех широко распространенных операционных систем Linux, Windows, macOS/iOS.

В современных реализациях TCP развитие реактивных алгоритмов направлено на адаптацию к более высокой ДПС канала и к более сложной динамике потерь и задержек. NewReno уточняет механизм восстановления после потерь за счет обработки частичных подтверждений (ACK), что повышает устойчивость восстановления размера Cwnd при нескольких потерях в одном окне передачи. CUBIC использует нелинейный рост размера Cwnd как функцию времени после последнего сокращения окна, что позволяет быстрее зондировать ДПС в каналах с большими значениями ДПС и RTT и одновременно уменьшать агрессивность роста около ранее достигнутого размера окна.

Проактивные алгоритмы управления перегрузкой оценивают и прогнозируют ДПС, размер Cwnd и ожидаемую долю потерь на определенном горизонте прогнозирования, а затем на основе полученных результатов определяют необходимый размер Cwnd. Проактивные алгоритмы можно разделить на три класса:

(1) алгоритмы, основанные на произведении пропускной способности на задержку (Bandwidth-Delay Product, BDP), например алгоритм BBR [12]. Этот алгоритм базируется на известном факте [13]: размер Cwnd не должен превышать произведения величин RTT и B;

(2) алгоритмы на основе статистических моделей, например модель частично-диффузионного марковского процесса для TCP-соединения в гетерогенном канале [14];

(3) алгоритмы на основе глубокого обучения, в частности обучения с подкреплением, например алгоритм PCC Vivace [15].

Независимо от того, относятся ли алгоритмы управления перегрузкой к реактивным или проактивным, их цель достигается за счет изменения размера Cwnd. Кроме того, задача предотвращения перегрузок может решаться и за счет управления очередями в сетевых устройствах, например с использованием RED-подобных алгоритмов управления очередями [16]. В таких алгоритмах управление перегрузкой реализуется посредством активного регулирования длины очереди в системе массового обслуживания $G/M/1$: если очередь превышает заданное пороговое значение, то считается, что система находится в зоне перегрузки, и часть заявок в очереди может быть сброшена с заданной вероятностью. Благодаря этому рост очереди ограничивается до полного заполнения буфера, что позволяет снижать задержку и уменьшать вероятность последующих потерь из-за его переполнения.

Однако управление очередями в сетевых устройствах и управление размером Cwnd на стороне отправителя решают задачу управления перегрузкой на разных уровнях: первое ограничивает рост очереди в канале, второе регулирует объем данных, инжектируемых отправителем в канал. В настоящей работе основное внимание уделяется алгоритмам, в которых управление перегрузкой реализуется за счет управления размером Cwnd.

Основной недостаток реактивных алгоритмов управления перегрузкой заключается в длительном восстановлении размера Cwnd после его сокращения из-за появления признаков перегрузки [17]. Как следствие — недоиспользование доступной пропускной способности канала. Они чрезмерно резко сокращают размер окна перегрузки при возникновении перегрузки или ее признаках [18]. Идея предлагаемого подхода состоит в том, чтобы «смягчить» это сокращение за счет применения алгоритмов прогнозирования, что должно позволить быстрее восстанавливать размер окна перегрузки. Сравнением НДПС канала у реактивного алгоритма и у алгоритма с использованием прогнозирования можно определить, какой из методов эффективнее использует ДПС потока.

Предлагаемый в настоящей работе алгоритм управления перегрузкой построен на идее комбинирования традиционных реактивных алгоритмов управления размером Cwnd и алгоритмов на основе его прогнозирования.

3 Методика расчета окна перегрузки и прогнозирование по EVAR

3.1 Окно управления перегрузкой (Cwnd) и методика его расчета

В дальнейшем t обозначает непрерывное время и измеряется в миллисекундах. Для вычисления параметров канала ось времени разбивается на интервалы

наблюдения одинаковой длины Δt. Эти интервалы далее называются слотами. Слот с номером n имеет вид:

$$I_n = [n\Delta t, (n+1)\Delta t), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где Δt — длительность одного интервала наблюдения, измеряемая в миллисекундах; n — безразмерный номер слота. Все параметры качества канала, используемые далее в методе EVAR, рассчитываются по данным, полученным в пределах соответствующего слота I_n.

Обозначим через $\mathrm{FlightSize}\,(t)$ объем данных, находящихся в канале и не подтвержденных получателем к моменту непрерывного времени t [1]. Он должен удовлетворять следующему ограничению:

$$\mathrm{FlightSize}\,(t) \leq \min\{\mathrm{Cwnd}\,(t), \mathrm{rwnd}\}, \tag{3}$$

где rwnd — размер окна получателя. Учитывая, что размер Cwnd всегда значительно меньше размера rwnd, будем считать, что

$$\mathrm{FlightSize}\,(t) \leq \mathrm{Cwnd}\,(t). \tag{4}$$

Как уже было отмечено выше, размер $\mathrm{Cwnd}\,(t)$ для потока f в текущий момент времени t может быть представлен в виде

$$\mathrm{Cwnd}\,(t) \approx B_f(t, \Delta t)\mathrm{RTT}_f(t, \Delta t), \tag{5}$$

где Δt — длительность окна наблюдений; $\mathrm{RTT}_f(t, \Delta t)$ — среднее значение RTT по всем пакетам, полученным на интервале наблюдения $(t, t + \Delta t]$; $B_f(t, \Delta t)$ — ДПС канала для потока f на интервале $(t, t + \Delta t]$, т. е. разница между номинальной пропускной способностью канала и числом бит, переданных другими на этом интервале Δt, отнесенной к длительности интервала.

Из соотношений (3)–(5) получаем:

$$\mathrm{FlightSize}\,(t) \leq \mathrm{Cwnd}\,(t) \approx B_f(t, \Delta t)\mathrm{RTT}_f(t, \Delta t). \tag{6}$$

Соотношение (5) в рамках предлагаемого метода используется как «безопасная» верхняя оценка для $\mathrm{Cwnd}\,(t)$ и не обязано точно выполняться в каждый момент времени.

3.2 Метод экспоненциальной векторной авторегрессии

Метод экспоненциальной векторной авторегрессии (EVAR) был предложен для задачи прогнозирования характеристик транспортного канала и подробно описан в работе [6]. Ключевая идея этого метода состоит в следующем: вместо непосредственного применения классической векторной авторегрессии (VAR) [19]

к исходному временно́му ряду $\{X_n\}$, сначала выполняется преобразование ряда $\{X_n\}$ в последовательность векторов квантилей, построенных по взвешенной эмпирической функции распределения; а затем к полученному многомерному ряду применяется модель VAR. (О квантилях было сказано выше во введении.)

Шаг 1. Взвешенная эмпирическая функция распределения.

Пусть задан наблюдаемый временной ряд $\{X_1, \ldots, X_n\}$, где X_n — значение интересующей характеристики канала (например, RTT) на слоте I_n. Для скользящего окна регрессии длины N вводится взвешенная эмпирическая функция распределения

$$F^*_{n,N}(x) = \sum_{i=1}^{N} w_i \, \mathbb{I}\left(X_{n-N+i} < x\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

где w_i — известные веса, $w_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$; $\mathbb{I}(X_{n-N+i} < x)$ — индикатор.

В EVAR веса выбираются экспоненциальными, так что более свежим наблюдениям приписывается больший вес. При экспоненциальном взвешивании веса определяются следующим образом:

$$w_j = \frac{(1-p_e)(1-p_e^j)}{N - p_e(N+1-p_e^N)}, \quad j = \overline{1,N}, \quad p_e \in [0,1),$$

где p_e обозначает экспоненциальный коэффициент затухания (предполагаем, что чем ближе наблюдение к текущему моменту, тем сильнее его влияние на $F^*_{n,N}$).

Шаг 2. Определить на основе $F^*_{n,N}$ взвешенные выборочные квантили [20].

Выберем m уровней квантилей $0 < p_1 < \cdots < p_m < 1$. На каждом временно́м окне регрессии взвешенный выборочный квантиль $u_{t,k}$ определяется как решение уравнения $F^*_{n,N}(u_{n,k}) = p_k$; учитывая, что $F^*_{n,N}$ — эмпирическая функция распределения, это эквивалентно следующей записи:

$$u_{n,k} = \inf\left\{u : F^*_{n,N}(u) \geq p_k\right\}, \quad k = \overline{1,m},$$

где p_k — порядок квантиля; m — число квантилей; N — размер окна регрессии.

Полученные m квантилей образуют вектор квантилей окна регрессии $\{u_{n,1}, u_{n,2}, \ldots, u_{n,m}\}$, который при сдвиге во времени образует m-мерный временной ряд, который служит исходными данными для метода VAR.

3.3 Прогнозирование Cwnd на основе EVAR

Использование метода EVAR рассматривается при следующих предположениях:

– процесс передачи разбивается на интервалы наблюдения Δt, определенные в разд. 3.1 как слоты I_n. Предполагается, что длительность одного интервала наблюдения равна времени выполнения алгоритма EVAR;

– ДПС потока такова, что за время одного слота может произойти не более одного события перегрузки.

Будем обозначать прогноз, полученный по методу EVAR, — $\mathrm{EVAR}\,(\widehat{m})$, где $\widehat{m}$ означает упорядоченный по времени набор значений в окне регрессии, который будем называть окном наблюдений. Тогда прогнозы RTT и ДПС на следующем слоте можно записать так:

$$\mathrm{RTT}_{n+1} = \mathrm{EVAR}\left(\widehat{\mathrm{RTT}}\right), \qquad B_{n+1} = \mathrm{EVAR}\left(\widehat{B}\right), \tag{7}$$

где RTT_{n+1} — прогнозируемое значение RTT на слоте $n+1$; $\widehat{\mathrm{RTT}}$ — совокупность значений RTT в окне регрессии; аналогично B_{n+1} обозначает прогнозируемое значение ДПС на слоте $n+1$, а $\widehat{B}$ — совокупность значений B в окне регрессии.

Исходя из соотношения (6), прогнозируемое значение окна перегрузки может быть вычислено так:

$$\mathrm{Cwnd}_e = \mathrm{RTT}_{n+1} B_{n+1}. \tag{8}$$

Есть два способа оценки Cwnd. Один представлен формулой (8). Другой использует метод квантилей. В этом случае пропускная способность $B^{(Q)}_{n+1}$ вычисляется по формуле (2):

$$B^{(Q)}_{n+1} = \inf\{x : F^*_B(x) \geq p_B\}, \quad 0 < p_B < 1, \tag{9}$$

где $F^*_B(x)$ — эмпирическая функция распределения значений пропускной способности в окне регрессии; p_B — вероятность, которую также можно интерпретировать как уровень квантиля для пропускной способности.

Тогда прогноз размера окна перегрузки можно оценить как

$$\mathrm{Cwnd}_k = \mathrm{RTT}_{n+1} B^{(Q)}_{n+1}.$$

Прогноз пропускной способности может быть получен двумя способами: (*а*) методом EVAR (по формуле (7)); (*б*) на основе квантилей пропускной способности, вычисляемой по формуле (9). Значение Cwnd, полученное в случае (*а*), далее обозначается как Cwnd_e, а в случае (*б*) — как Cwnd_k. В экспериментальной части проводятся анализ и сравнение этих двух вариантов прогноза Cwnd.

3.4 Комбинированный алгоритм управления размером окна перегрузки с использованием EVAR

Идея комбинированного алгоритма управления перегрузкой состоит в том, чтобы оснастить известные реактивные алгоритмы управления перегрузкой (например, NewReno) алгоритмом, который в случае наступления перегрузки будет

применять оценку «разумного» сокращения размера окна перегрузки на основе алгоритмов прогнозирования. Это позволит сократить период наращивания размера Cwnd и тем самым увеличить скорость потока. Предлагаемая комбинация работает следующим образом.

1. На каждом интервале наблюдения рассчитываются параметры качества канала (RTT и пропускная способность), а также Cwnd. По окончании каждого интервала наблюдения вычисляются прогнозы $\widehat{\mathrm{RTT}}$ и $\widehat{\mathrm{Cwnd}}$ по параметрам качества канала, накопленным в окне регрессии. Кроме того, с использованием метода квантилей по окну регрессии оценивается величина $\overline{\mathrm{RTT}}$, называемая безопасным порогом RTT.
2. Если к концу текущего интервала наблюдения не зафиксировано возникновение перегрузки в канале в течение данного интервала, то вычисленный на этом интервале прогноз $\widehat{\mathrm{Cwnd}}$ не влияет на размер окна перегрузки и определяется выбранным реактивным алгоритмом управления перегрузкой.
3. Если перегрузка или признаки ее появились на текущем интервале наблюдения, то после его завершения сравнивают последнее значение $\widehat{\mathrm{Cwnd}}$ с предыдущего интервала T_p с размером Cwnd, рассчитанным реактивным алгоритмом управления перегрузкой. Если $\widehat{\mathrm{Cwnd}} < \mathrm{Cwnd}$, то выбираем Cwnd и возвращаемся к шагу 2. Если же $\widehat{\mathrm{Cwnd}} > \mathrm{Cwnd}$, то в качестве нового значения размера окна перегрузки Cwnd берем значение $\widehat{\mathrm{Cwnd}}$ и переходим к шагу 4.
4. Пока $\widehat{\mathrm{RTT}} \le \overline{\mathrm{RTT}}$, используем в качестве значения окна перегрузки $\widehat{\mathrm{Cwnd}}$. Когда $\widehat{\mathrm{RTT}} > \overline{\mathrm{RTT}}$, использование прогноза размера окна перегрузки прекращается и управление переходит к базовому реактивному алгоритму. Переход к шагу 2.

Необходимость введения безопасного порога $\overline{\mathrm{RTT}}$ обусловлена тем, что использование на очередном слоте величины $\widehat{\mathrm{Cwnd}}$ после возникновения перегрузки определяется не только соотношением $\widehat{\mathrm{Cwnd}}$ и Cwnd, но и текущим значением $\widehat{\mathrm{RTT}}$. При неизменной ДПС рост $\widehat{\mathrm{RTT}}$ может спровоцировать увеличение очередей в канале и падение скорости потока. Поэтому условие $\widehat{\mathrm{Cwnd}} > \mathrm{Cwnd}$ в качестве критерия выбора $\widehat{\mathrm{Cwnd}}$ необходимо применять с учетом динамики $\widehat{\mathrm{RTT}}$, которая может существенно возрастать из-за неоправданно большого увеличения размера окна перегрузки. Последнее может приводить к росту НДПС согласно формуле (1). Это обусловливает необходимость введения $\overline{\mathrm{RTT}}$ в качестве дополнительного ограничения. Безопасный порог $\overline{\mathrm{RTT}}$ определяется по формуле:

$$\overline{\mathrm{RTT}} = \inf\{x : F^*_{\mathrm{RTT}}(x) \ge p_{\mathrm{RTT}}\}, \quad 0 < p_{\mathrm{RTT}} < 1,$$

где $F^*_{\mathrm{RTT}}(x)$ — эмпирическая функция распределения RTT в окне регрессии, а p_{RTT} — уровень квантиля для RTT. Различным значениям p_{RTT} соответствуют различные значения $\overline{\mathrm{RTT}}$. В разд. 4.3 на примере CUBIC анализируются результаты экспериментов при различных значениях p_{RTT}.

3.5 Вычислительная сложность предлагаемого алгоритма

В данном разделе анализируются вычислительная сложность нескольких базовых алгоритмов управления перегрузкой и метода EVAR, а также момент выполнения вычислений в каждом из этих алгоритмов.

Предлагаемый в настоящей работе алгоритм не заменяет базовый реактивный алгоритм, а расширяет его за счет процедуры прогнозирования размера Cwnd. В связи с этим дополнительная вычислительная нагрузка возникает не при обработке каждого пакета или поступлении каждого подтверждения (ACK), а один раз на каждом слоте I_n, т. е. после завершения очередного интервала наблюдения Δt. Обозначим через N размер окна регрессии. Вычислительная задача EVAR связана с построением взвешенной эмпирической функции распределения по данным окна регрессии и вычислением квантилей. Поэтому вычислительная сложность метода EVAR напрямую зависит от размера окна регрессии.

Как показано в таблице, алгоритмы NewReno и CUBIC обновляют размер окна перегрузки по подтверждениям (ACK), дублям ACK и тайм-аутам (time_out). BBRv1, в свою очередь, корректирует размер окна перегрузки на основе оценки BDP. При каждом таком обновлении выполняется конечное число арифметических операций, поэтому вычислительная сложность одного управляющего действия может рассматриваться как $O(1)$. В то же время вычислительная сложность метода EVAR составляет $O(N \log N)$, где N обозначает размер окна регрессии.

Если сравнивать только вычислительную сложность, то метод EVAR имеет более высокие показатели по сравнению с указанными базовыми алгоритмами. Однако для NewReno, CUBIC и BBRv1 вычисления выполняются после поступления каждого подтверждения (ACK). EVAR же выполняется только один раз на каждом слоте I_n. В экспериментах, рассмотренных в данной статье, при пропускной способности канала 100 Мбит/с и $I_n = 100$ мс за один слот в среднем поступает около 830 ACK-пакетов. Кроме того, для EVAR должно

Сравнение вычислительной сложности алгоритмов

Алгоритм	**Когда выполняется обновление**	**Вычислительная сложность**
NewReno	По ACK и time_out	$O(1)$
CUBIC	По ACK и состоянию после последнего сокращения Cwnd	$O(1)$
BBRv1	По ACK и оценкам ДПС и минимального RTT	$O(1)$
EVAR	Один раз на слот I_n	$O(N \log N)$

выполняться условие $T_{\text{EVAR}} \leq \Delta t$, где T_{EVAR} — время вычисления прогноза. Выполнение этого условия означает, что EVAR успевает завершить вычисление прогноза до начала следующего слота и не приводит к существенному увеличению вычислительной нагрузки на отправляющую сторону.

4 Экспериментальные данные, методика и результаты

Экспериментальная часть работы состоит из трех экспериментов.

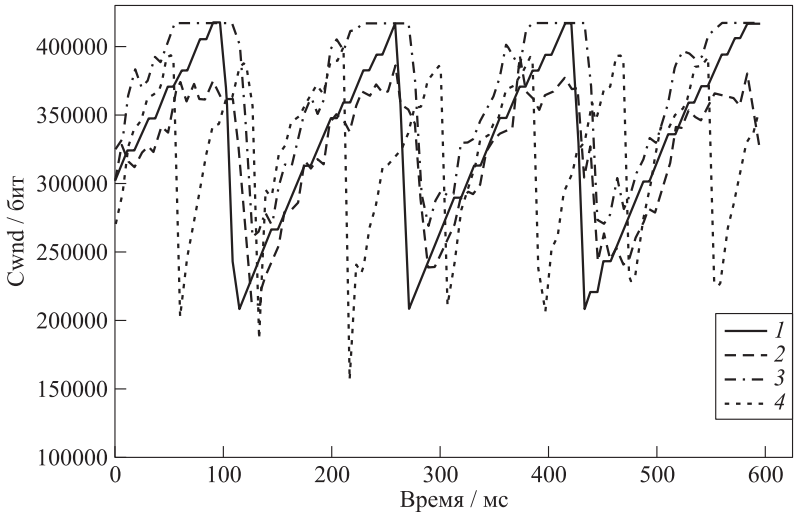
1. Цель эксперимента 1 — оценка и сравнение точности прогнозирования Cwnd методами Cwnd_k и Cwnd_e. Для оценки точности используются критерии RMSE и MAPE [21].
2. Цель эксперимента 2 — сравнение предлагаемого метода с несколькими традиционными алгоритмами (NewReno, CUBIC и BBRv1) по критериям НДПС и коэффициента эффективности метода (см. п. 4.2.2). Для этого на базе симулятора ns-3 был построен экспериментальный стенд (см. п. 4.2.1).
3. Цель эксперимента 3 — анализ зависимости уровня квантиля для оценки $\overline{\text{RTT}}$. В качестве критерия используется среднее значение коэффициента эффективности метода при различных уровнях квантиля (см. разд. 4.3).

Во всех экспериментах использовались следующие фиксированные параметры модели EVAR: регрессионный порядок $p_r = 4$, размер окна регрессии $N = 10\,000$, параметр экспоненциального взвешивания $p_e = 0{,}8$; применялось 11 квантилей с уровнями вероятности p_i: 5%, 15%, 25%, 35%, 45%, 50%, 55%, 65%, 75%, 85% и 95%. Вопрос выбора параметров модели EVAR подробно описан и проанализирован в статье [6].

4.1 Эксперимент 1: анализ на открытом наборе данных

В эксперименте используется открытый набор [22], состоящий из временны́х рядов параметров TCP-потоков под управлением алгоритма Reno. Из этого набора данных случайным образом выбирались 10 100 последовательных наблюдений; первые 10 000 наблюдений применялись в качестве исторических (обучающих) данных для прогнозирования последующих 100 наблюдений. Рассчитывались два вида прогнозов: Cwnd_e, полученный при совсместном прогнозировании RTT_{n+1} и B_{n+1}, и Cwnd_k, где величина RTT_{n+1} предсказывалась методом EVAR, а значение $B_{n+1}^{(Q)}$ рассчитывалось методом квантилей (уровень квантиля $p_B = 95\%$). Далее полученные значения сравнивали с реально наблюдаемым Cwnd_r. Кроме того, в качестве сравнительного метода использовался классический алгоритм VAR; полученный с его помощью результат обозначается как Cwnd_v. Порядок вычисления RMSE и MAPE приведен в статье [21].

На рис. 1 показаны изменения размера окна перегрузки Cwnd_r (*1*) для алгоритма Reno: Cwnd_e (*2*), Cwnd_k (*3*) и Cwnd_v (*4*). По критериям RMSE и MAPE прогноз Cwnd_v оказался наихудшим. Это связано с тем, что в классическом



Метод	RMSE	MAPE, %
Cwnd_e	39082,934	9,31
Cwnd_k	56442,163	13,84
Cwnd_v	90253,771	22,91

Рис. 1 График результатов прогноза Cwnd при использовании алгоритма Reno: *1* — Cwnd_r; *2* — Cwnd_e; *3* — Cwnd_k; *4* — Cwnd_v

VAR, в отличие от EVAR, не используется экспоненциальное взвешивание более свежих наблюдений в окне регрессии, поэтому метод хуже учитывает последние изменения параметров канала и дает менее точный прогноз. По критериям RMSE и MAPE метод Cwnd_e превосходит Cwnd_k. Однако после каждого эпизода перегрузки Cwnd_e и Cwnd_r снижались примерно до одного и того же уровня, в то время как сокращение Cwnd_k было менее значительным и позволяло быстрее восстанавливать максимально допустимый размер. Поэтому Cwnd_k оказывается предпочтительнее.

4.2 Эксперимент 2: проверка на экспериментальном стенде ns-3

Поскольку получить данные о состоянии канала после изменения Cwnd с использованием EVAR только на основе открытого набора данных, упомянутого выше, было невозможно, то был построен с помощью ns-3 экспериментальный стенд, на котором были проведены эксперименты серии 2 и 3.

4.2.1 Состав модулей экспериментального стенда ns-3

Схема экспериментального стенда показана на рис. 2. Стенд состоит из четырех основных компонентов: модуля TCP Agent, модуля Noise Agent, модуля

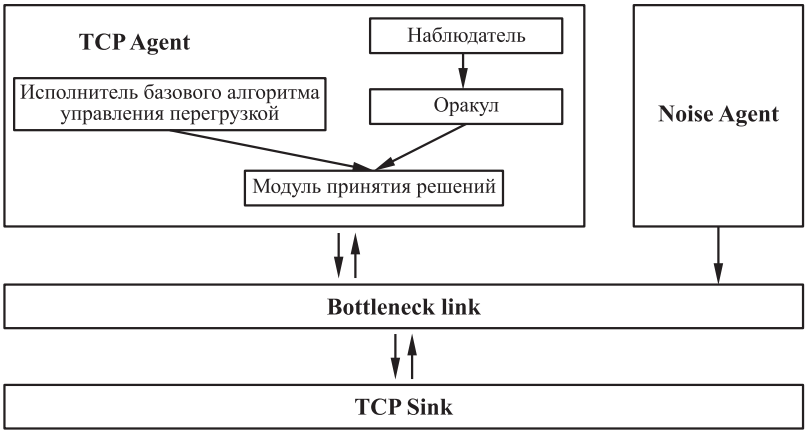


Рис. 2 Топология экспериментального TCP-стенда в ns-3

TCP Sink и узкого канала связи (Bottleneck Link). Модуль TCP Agent управляет передачей, формирует основной TCP-поток и при определенных выше условиях использует прогноз для окна перегрузки. Модуль Noise Agent задает фоновую нагрузку в канале в виде пуассоновского UDP-потока (далее — шум), конкурирующего с основным потоком за пропускную способность канала. На рис. 3 показано изменение скорости шума и доступной пропускной способности канала, где синяя линия обозначает скорость передачи шума, а желтая область — ДПС. Модуль TCP Sink принимает TCP-поток от TCP Agent. Компонент

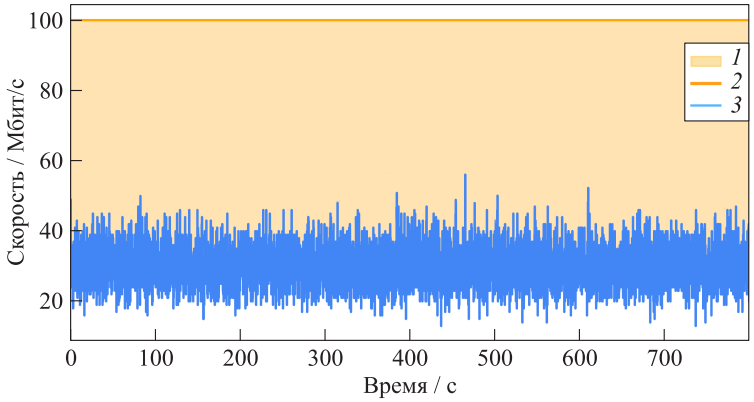


Рис. 3 Изменение скорости передачи шумового потока и доступной пропускной способности канала: *1* — доступная пропускная способность для потока при наличии шума; *2* — пропускная способность канала; *3* — скорость передачи шумового потока

Bottleneck Link моделирует канал связи между узлами client и server и определяет номинальные параметры канала. Подробное описание каждого модуля, а также исходный код опубликованы на GitHub [23].

4.2.2 Критерии анализа экспериментов

В эксперименте для оценки того, насколько полно соответствующий алгоритм управления использует ДПС, вычисляются НДПС и коэффициент эффективности метода. На примере NewReno НДПС на m-м интервале длиной T_p, обозначаемая как B_m^{NewReno}, рассчитывается следующим образом:

$$B_m^{\text{NewReno}} = B_{\text{ДПС}}^m - \frac{\text{Cwnd}_m}{\text{RTT}_m}, \tag{10}$$

где $B_{\text{ДПС}}^m$ обозначает ДПС потока в канале на m-м интервале наблюдения, которая может рассчитываться по формуле (1); Cwnd_m — среднее Cwnd, наблюдаемое на m-м интервале; RTT_m — среднее RTT, наблюдаемое на том же интервале.

Если значения НДПС у двух различных алгоритмов совпадают, их можно сравнивать по максимальным значениям НДПС: чем меньше максимальное значение НДПС, тем полнее используется ДПС.

Аналогично на примере NewReno коэффициент эффективности метода на m-м интервале длиной T_p, обозначаемый как K_m^{NewReno}, рассчитывается следующим образом:

$$K_m^{\text{NewReno}} = \frac{B_m^{\text{NewReno}}}{B_{\text{ДПС}}^m}, \tag{11}$$

где $B_{\text{ДПС}}^m$ представляет собой доступную пропускную способность, вычисляемую на m-м интервале. $K_m^{\text{NewReno}} \in [0, 1]$.

4.2.3 Результаты экспериментов

В рассматриваемых экспериментах скорость передачи по каналу составляла 100 Мбит/с, задержка варьировалась в диапазоне 6–12 мс, размер пакета был равен 1 000 байт, а интервал наблюдения T_p — 100 мс. Кроме того, в качестве сравнительного метода использовался алгоритм VAR. Логика его работы соответствует схеме, описанной в разд. 3.4; отличие состоит только в том, что для вычисления прогноза используется VAR.

На рис. 4 представлены НДПС и коэффициент эффективности для алгоритма NewReno (*2*), предложенного метода (*1*) и алгоритма VAR (*3*) в соответствии с формулами (10) и (11). Из рис. 4 видно, что НДПС для NewReno колеблется от 0 до 3,1 Мбит/с, для предложенного метода — от 0 до 2,2 Мбит/с, тогда как для алгоритма VAR — от 0 до 4,2 Мбит/с. Максимальное значение НДПС

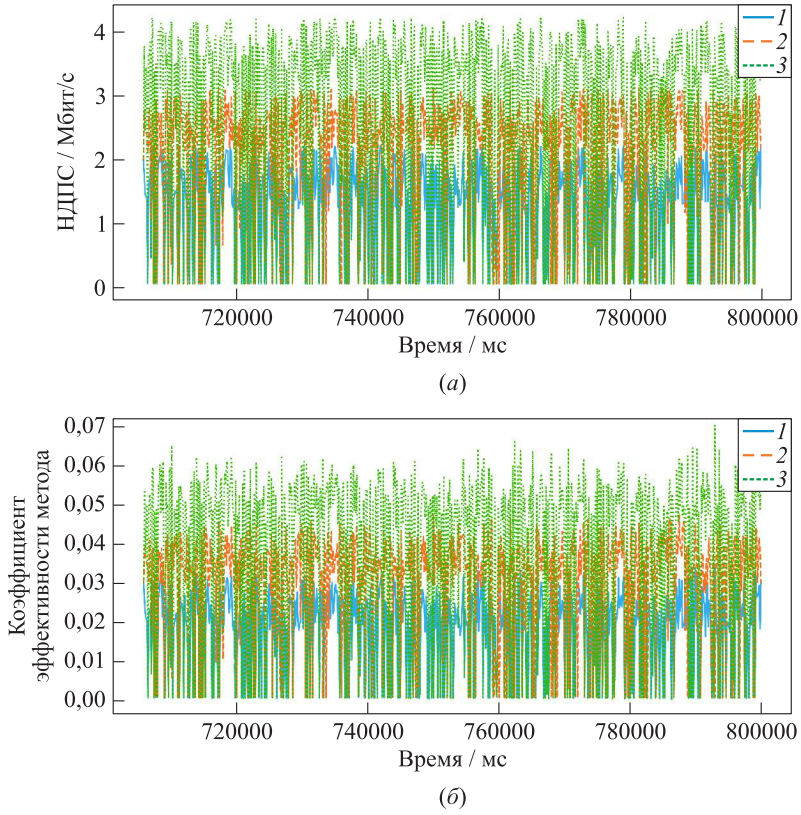


Рис. 4 Сравнение НДПС (*а*) и коэффициента эффективности (*б*) для предложенного метода (*1*), алгоритма NewReno (*2*) и алгоритма VAR (*3*)

у предложенного метода на 0,9 Мбит/с меньше, чем максимальное значение НДПС у NewReno. Это означает, что полезный поток получает почти 1 Мбит/с дополнительно при том же самом шуме. Для алгоритма VAR из-за недостаточно точного прогноза были получены наихудшие результаты: его НДПС оказалась почти на 1 Мбит/с выше, чем у NewReno.

На рис. 5 представлены НДПС и коэффициент эффективности для алгоритма CUBIC (*2*), предложенного метода (*1*) и алгоритма VAR (*3*) в соответствии с формулами (10) и (11). Из рис. 5 видно, что НДПС для CUBIC колеблется от 0 до 2,9 Мбит/с, для предложенного метода — от 0 до 2,4 Мбит/с, тогда как для алгоритма VAR — от 0 до 3,7 Мбит/с. Максимальное значение НДПС у предложенного метода на 0,5 Мбит/с меньше, чем у CUBIC. Это означает, что полезный поток получает 0,5 Мбит/с дополнительно при том же самом шуме. Как и в случае с NewReno, алгоритм VAR также показал

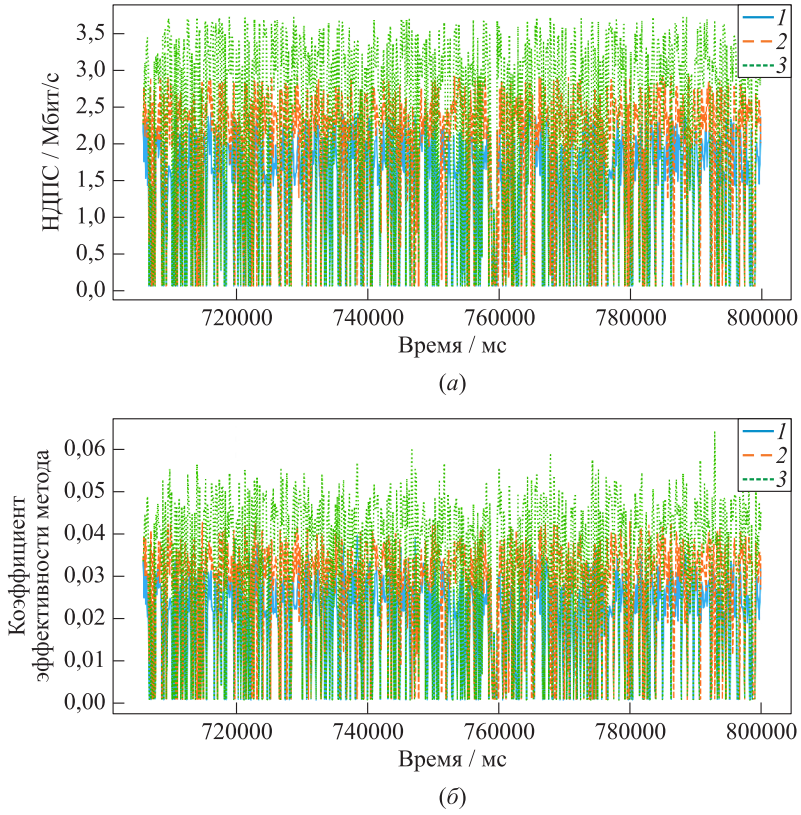


Рис. 5 Сравнение НДПС (*а*) и коэффициента эффективности (*б*) для предложенного метода (*1*), алгоритма CUBIC (*2*) и алгоритма VAR (*3*)

наихудшие результаты: его НДПС оказалась почти на 0,8 Мбит/с выше, чем у CUBIC.

Помимо традиционных алгоритмов NewReno и CUBIC было также проведено сравнение BBRv1 [13] с предлагаемым методом. На рис. 6 представлены НДПС и коэффициент эффективности для алгоритма BBRv1 (*2*), предложенного метода (*1*) и алгоритма VAR (*3*) в соответствии с формулами (10) и (11). На рис. 6 видно: максимальное значение НДПС у предложенного метода было на 52,3 Мбит/с меньше, чем у BBRv1. Алгоритм VAR занимает промежуточное положение между EVAR и BBR: НДПС у VAR оказалась почти на 8,9 Мбит/с выше, чем у EVAR, но почти на 43,1 Мбит/с ниже максимального значения НДПС у BBR.

Рисунок 6 также демонстрирует, что при одинаковом уровне шума в период активного пробирования очереди алгоритмом BBR полезный поток по-

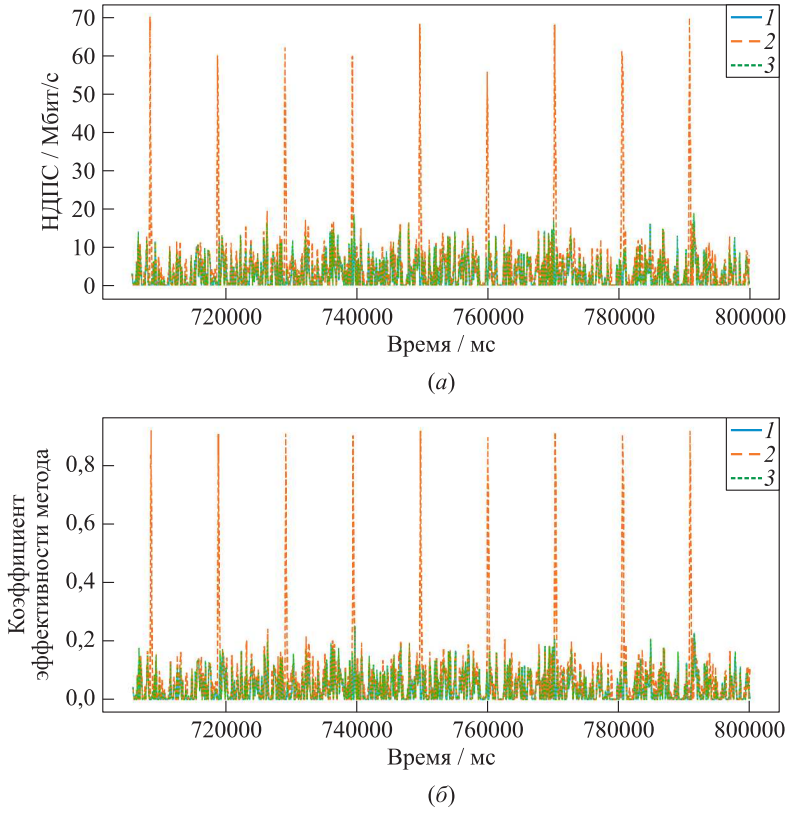


Рис. 6 Сравнение НДПС (*а*) и коэффициента эффективности (*б*) для предложенного метода (*1*), алгоритма BBRv1 (*2*) и алгоритма VAR (*3*)

лучает почти 50 Мбит/с дополнительно, тогда как вне этого периода — лишь 0,04 Мбит/с.

4.3 Эксперимент 3: Оценка безопасного порога при различных значениях квантилей

В разд. 3.4 было введено понятие безопасного порога $\overline{\mathrm{RTT}}$, необходимого для того, чтобы исключить ситуацию неоправданно долгого использования прогноза. Для оценки значения $\overline{\mathrm{RTT}}$ был проведен анализ влияния уровня квантиля в окне регрессии на величину $\overline{\mathrm{RTT}}$. В качестве алгоритма сравнения был выбран CUBIC. Для квантилей уровней 10%, 20%, . . . , 90% вычислялась разность ΔK между средними значениями коэффициента эффективности метода для CUBIC и EVAR для квантилей каждого уровня, а именно:

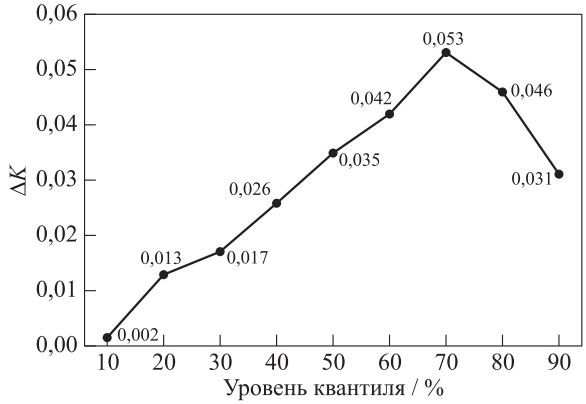


Рис. 7 Разность средних значений коэффициента эффективности ΔK для CUBIC и EVAR при различных квантильных значениях безопасного порога

$$\Delta K(m) = \frac{1}{n}\left(\sum_{n} K_{(m)}^{\text{CUBIC}} - \sum_{n} K_{(m)}^{\text{EVAR}}\right),$$

где $K_{(m)}^{\text{CUBIC}}$ и $K_{(m)}^{\text{EVAR}}$ — коэффициенты эффективности метода для CUBIC и EVAR соответственно при квантиле уровня m, вычисляемые по формуле (11). Чем больше значение ΔK, тем ближе EVAR при одном и том же уровне квантиля к максимально допустимой пропускной способности канала по сравнению с CUBIC.

На рис. 7 обобщены результаты для рассмотренных девяти уровней квантиля. Из них видно, что максимальное значение ΔK достигается при квантиле безопасного порога, равном 70%.

5 Заключение

В работе предложен алгоритм управления перегрузкой на основе экспоненциальной векторной авторегрессии. Ключевая идея заключается в том, чтобы «сглаживать» сокращение окна перегрузки за счет использования прогноза его размера, тем самым сокращая время, которое реактивные алгоритмы затрачивают на пробирование доступной пропускной способности, и время на восстановление его размера.

Результаты экспериментов показывают, что по сравнению с классическими реактивными алгоритмами управления перегрузкой (NewReno, CUBIC) предложенный алгоритм позволяет максимально использовать ДПС потока. По сравнению с BBRv1 предложенный алгоритм позволяет заметно снизить НДПС в моменты периодического пробирования очереди.

Однако, как отмечено в разд. 3.3, предлагаемый алгоритм рассмотрен в предположении, что ДПС потока допускает появление не более одного события перегрузки за время одного слота. Это предположение фактически накладывает ограничение на соотношение между скоростью изменения состояния канала и временем, необходимым для вычисления прогноза методом EVAR. В рассматриваемой постановке на текущем интервале используется прогнозируемое значение окна перегрузки, полученное по данным предыдущего интервала наблюдения. В дальнейшем планируется разработать корректирующий алгоритм для более общего случая, когда за время одного слота может происходить несколько событий перегрузки.

Литература

1. *Allman M., Paxson V., Blanton E.* RFC 5681: TCP congestion control // Internet Engineering Task Force. — RFC Editor, 2009. doi: 10.17487/RFC5681.
2. *Jacobson V.* Congestion avoidance and control // ACM SIGCOMM Comp. Com., 1988. Vol. 18. No. 4. P. 314–329. doi: 10.1145/52324.52356.
3. *Low S. H., Paganini F., Doyle J. C.* Internet congestion control // IEEE Contr. Syst. Mag., 2002. Vol. 22. No. 1. P. 28–43. doi: 10.1109/37.980245.
4. *Zheng J., Wu C., Lan T., Tian C., Chen G.* Revisiting weighted AIMD-based congestion control: A comprehensive perspective // IEEE/ACM 31st Symposium (International) on Quality of Service Proceedings. — IEEE, 2023. Art. 10188753. 10 p. doi: 10.1109/IWQoS57198.2023.10188753.
5. *Wang R., Pau G., Yamada K., Sanadidi M. Y., Gerla M.* TCP startup performance in large bandwidth networks // INFOCOM Proceedings. — IEEE, 2004. Vol. 2. P. 796–805. doi: 10.1109/INFCOM.2004.1356968.
6. *Го Фэнжуй, Королев В. Ю., Смелянский Р. Л.* О прогнозировании качества наложенного канала // Вестник Московского университета. Сер. 15: Вычислительная математика и кибернетика, 2025. № 4. С. 17–25. doi: 10.55959/MSU/0137-0782-15-2025-49-4-17-25.
7. *Floyd S.* RFC2914: Congestion control principles // Internet Engineering Task Force. — RFC Editor, 2000. doi: 10.17487/RFC2914.
8. *Jose L., Yan L., Alizadeh M., Varghese G., McKeown N., Katti S.* High speed networks need proactive congestion control // 14th Workshop on Hot Topics in Networks Proceedings. — New York, NY, USA: ACM, 2015. Art. 14. 7 p. doi: 10.1145/2834050.2834096.
9. *Gangane S., Kakade A.* A survey on TCP/IP protocol stack // Int. J. Computer Applications, 2015. Vol. 120. No.19. P. 39–42.
10. *Henderson T., Floyd S., Gurtov A., Nishida Y.* RFC 6582: The NewReno modification to TCP's fast recovery algorithm // Internet Engineering Task Force. — RFC Editor, 2012. doi: 10.17487/RFC6582.
11. *Ha S., Rhee I., Xu L.* CUBIC: A new TCP-friendly high-speed TCP variant // ACM SIGOPS Operating Systems Review, 2008. Vol. 42. No. 5. P. 64–74. doi: 10.1145/1400097.1400105.

12. *Hock M., Bless R., Zitterbart M.* Experimental evaluation of BBR congestion control // 25th Conference (International) on Network Protocols Proceedings. — IEEE, 2017. Art. 8117540. 10 p. doi: 10.1109/ICNP.2017.8117540.
13. *Cardwell N., Cheng Y., Gunn C. S., Hassas Yeganeh S., Jacobson V.* BBR: Congestion-based congestion control // ACM Queue, 2016. Vol. 14. No. 5. P. 20–53. doi: 10.1145/3012426.3022184.
14. *Borisov A., Bosov A., Miller G., Sokolov I.* Partial diffusion Markov model of heterogeneous TCP link: Optimization with incomplete information // Mathematics, 2021. Vol. 9. No. 14. Art. 1632. doi: 10.3390/math9141632.
15. *Dong M., Meng T., Zarchy D., Arslan E., Gilad Y., Godfrey B., Schapira M.* PCC Vivace: Online-learning congestion control // 15th Conference on Networked Systems Design and Implementation Proceedings. — Berkeley, CA, USA: USENIX Association, 2018. P. 343–356.
16. *Агаларов Я. М., Коновалов М. Г.* Доказательство унимодальности целевой функции в задаче порогового управления нагрузкой на сервер // Информатика и её применения, 2019. Т. 13. Вып. 2. С. 2–6. doi: 10.14357/19922264190201.
17. *Rhee I., Xu L., Ha S., Zimmermann A., Eggert L., Scheffenegger R.* RFC 8312: CUBIC for fast long-distance networks // Internet Engineering Task Force. — RFC Editor, 2018. doi: 10.17487/RFC8312.
18. *Khademi N., Welzl M., Armitage G., Fairhurst G.* RFC 8511: TCP alternative Backoff with ECN (ABE) // Internet Engineering Task Force. — RFC Editor, 2018. doi: 10.17487/RFC8511.
19. *Kilian L.* New introduction to multiple time series analysis, by Helmut Lutkepohl, Springer, 2005 // Econom. Theor., 2006. Vol. 22. No. 5. P. 961–967. doi: 10.1017/S0266466606000442.
20. *Hyndman R. J., Fan Y.* Sample quantiles in statistical packages // Am. Stat., 1996. Vol. 50. No. 4. P. 361–365. doi: 10.1080/00031305.1996.10473566.
21. *Hyndman R. J., Koehler A. B.* Another look at measures of forecast accuracy // Int. J. Forecasting, 2006. Vol. 22. No. 4. P. 679–688. doi: 10.1016/j.ijforecast.2006.03.001.
22. *Fesl J., Capkova T., Konopa M., Beranek L., Fiala J., Houda M., Chladek P., Klicnarova J., Remes R., Sulista M., Vocetkova K., Feslova M.* Data center TCP dataset // Data Brief, 2024. Vol. 54. Art. 110522. doi: 10.1016/j.dib.2024.110522.
23. *Guo F.* ns-3-test-stand: TCP test stand for EVAR-based congestion control // Source code repository. — GitLab ASVK MSU, 2026. https://gitlab.asvk.cs.msu.ru/guofengrui/ns-3-test-stand/-/tree/main/NS-3%20Stand%20V8/V8.3?ref_type=heads.

Поступила в редакцию 18.03.2026
Принята к публикации 15.09.2026

CONGESTION CONTROL ALGORITHM USING EXPONENTIAL VECTOR AUTOREGRESSION

Fengrui Guo and R. L. Smeliansky

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, 1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russian Federation

Abstract: The paper proposes a combined TCP (Transmission Control Protocol) congestion control algorithm that integrates a traditional reactive congestion window control mechanism with a congestion window (Cwnd) prediction procedure based on exponential vector autoregression (EVAR). The method is intended to reduce the period during which the available bandwidth remains underutilized after a congestion event. Once congestion or its signs are detected, EVAR is used to predict the Cwnd value for the next observation interval, and this forecast is applied as a new Cwnd value if it satisfies an additional safety constraint. The safety threshold is defined through the round-trip time ($\overline{\text{RTT}}$) and limits the use of the forecast when rapid Cwnd recovery may increase queues and cause additional congestion events. The proposed algorithm is evaluated on an ns-3 test stand and compared with NewReno, CUBIC, and BBRv1. The results show that, compared with the baseline congestion control algorithms, the proposed algorithm makes it possible to obtain at least 0.5 Mbit/s of additional available bandwidth.

Keywords: TCP congestion control; exponential vector autoregression; congestion window prediction; available bandwidth; ns-3 simulation

DOI: 10.14357/08696527260303 **EDN:** LRRIMB

References

1. Allman, M., V. Paxson, and E. Blanton. 2009. RFC 5681: TCP congestion control. *Internet Engineering Task Force*. RFC Editor. doi: 10.17487/RFC5681.
2. Jacobson, V. 1988. Congestion avoidance and control. *ACM SIGCOMM Comp. Com.* 18(4):314–329. doi: 10.1145/52324.52356.
3. Low, S. H., F. Paganini, and J. C. Doyle. 2002. Internet congestion control. *IEEE Contr. Syst. Mag.* 22(1):28–43. doi: 10.1109/37.980245.
4. Zheng, J., C. Wu, T. Lan, C. Tian, and G. Chen. 2023. Revisiting weighted AIMD-based congestion control: A comprehensive perspective. *IEEE/ACM 31st Symposium (International) on Quality of Service Proceedings*. IEEE. Art. 10188753. 10 p. doi: 10.1109/IWQoS57198.2023.10188753.
5. Wang, R., G. Pau, K. Yamada, M. Y. Sanadidi, and M. Gerla. 2004. TCP startup performance in large bandwidth networks. *INFOCOM Proceedings*. IEEE. 2:796–805. doi: 10.1109/INFCOM.2004.1356968.
6. Guo, Fengrui, V. Yu. Korolev, and R. L. Smelyansky. 2025. On forecasting overlay channel quality. *Moscow University Computational Mathematics Cybernetics* 49(4):324–332.

7. Floyd, S. 2000. RFC 2914: Congestion control principles. *Internet Engineering Task Force*. RFC Editor. doi: 10.17487/RFC2914.
8. Jose, L., L. Yan, M. Alizadeh, G. Varghese, N. McKeown, and S. Katti. 2015. High speed networks need proactive congestion control. *14th Workshop on Hot Topics in Networks Proceedings*. New York, NY: ACM. Art. 14. 7 p. doi: 10.1145/2834050.2834096.
9. Gangane, S., and A. Kakade. 2015. A survey on TCP/IP protocol stack. *Int. J. Computer Applications* 120(19):39–42.
10. Henderson, T., S. Floyd, A. Gurtov, and Y. Nishida. 2012. RFC 6582: The NewReno modification to TCP's fast recovery algorithm. *Internet Engineering Task Force*. RFC Editor. doi: 10.17487/RFC6582.
11. Ha, S., I. Rhee, and L. Xu. 2008. CUBIC: A new TCP-friendly high-speed TCP variant. *ACM SIGOPS Operating Systems Review* 42(5):64–74. doi: 10.1145/1400097.1400105.
12. Hock, M., R. Bless, and M. Zitterbart. 2017. Experimental evaluation of BBR congestion control. *25th Conference (International) on Network Protocols Proceedings*. IEEE. Art. 8117540. 10 p. doi: 10.1109/ICNP.2017.8117540.
13. Cardwell, N., Y. Cheng, C. S. Gunn, S. Hassas Yeganeh, and V. Jacobson. 2016. BBR: Congestion-based congestion control. *ACM Queue* 14(5):20–53. doi: 10.1145/3012426.3022184.
14. Borisov, A., A. Bosov, G. Miller, and I. Sokolov. 2021. Partial diffusion Markov model of heterogeneous TCP link: Optimization with incomplete information. *Mathematics* 9(14):1632. doi: 10.3390/math9141632.
15. Dong, M., T. Meng, D. Zarchy, E. Arslan, Y. Gilad, B. Godfrey, and M. Schapira. 2018. PCC Vivace: Online-learning congestion control. *15th Symposium on Networked Systems Design and Implementation Proceedings*. Berkeley, CA: USENIX Association. 343–356.
16. Agalarov, Ya. M., and M. G. Konovalov. 2019. Dokazatel'stvo unimodal'nosti tselevoy funktsii v zadache porogovogo upravleniya nagruzkoy na server [Proof of unimodality of the objective function in the problem of threshold control of server load]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 13(2):2–6. doi: 10.14357/19922264190201.
17. Rhee, I., L. Xu, S. Ha, A. Zimmermann, L. Eggert, and R. Scheffenegger. 2018. RFC 8312: CUBIC for fast and long-distance networks. *Internet Engineering Task Force*. RFC Editor. doi: 10.17487/RFC8312.
18. Khademi, N., M. Welzl, G. Armitage, and G. Fairhurst. 2018. RFC 8511: TCP alternative backoff with ECN (ABE). *Internet Engineering Task Force*. RFC Editor. doi: 10.17487/RFC8511.
19. Kilian, L. 2006. New introduction to multiple time series analysis, by Helmut Lutkepohl, Springer, 2005. *Economet. Theor.* 22(5):961–967. doi: 10.1017/S0266466606000442.
20. Hyndman, R. J., and Y. Fan. 1996. Sample quantiles in statistical packages. *Am. Stat.* 50(4):361–365. doi: 10.1080/00031305.1996.10473566.
21. Hyndman, R. J., and A. B. Koehler. 2006. Another look at measures of forecast accuracy. *Int. J. Forecasting* 22(4):679–688. doi: 10.1016/j.ijforecast.2006.03.001.
22. Fesl, J., T. Capkova, M. Konopa, L. Beranek, J. Fiala, M. Houda, P. Chladek, J. Klicnarova, R. Remes, M. Sulista, K. Vocetkova, and M. Feslova. 2024. Data center TCP dataset. *Data Brief* 54:110522. doi: 10.1016/j.dib.2024.110522.

23. Guo, F. 2026. ns-3-test-stand: TCP test stand for EVAR-based congestion control. *Source code repository*. GitLab ASVK MSU. Available at: https://gitlab.asvk.cs.msu.ru/guofengrui/ns-3-test-stand/-/tree/main/NS-3%20Stand%20V8/V8.3?ref_type=heads.

Received March 18, 2026
Accepted September 15, 2026

Contributors

Fengrui Guo (b. 1996) — PhD student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; guofengrui@lvk.cs.msu.ru

Smeliansky Ruslan L. (b. 1950) — Doctor of Science in physics and mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, professor, head of department, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; smel@cs.msu.ru

ЭФФЕКТИВНОСТЬ КВАНТОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КЛЮЧЕЙ В СПУТНИКОВОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ*

***М. В. Сапожников*[1], *С. Ю. Казанцев*[2], *Ю. Б. Миронов*[3], *Б. М. Шабанов*[4], *А. Е. Матюнин*[5]**

Аннотация: Проводится оценка возможности применения квантового распределения ключей (КРК) в задачах спутниковой оптической связи. Верифицирована методика расчета показателей эффективности спутникового КРК, включающая общую эффективность пропускания такого канала связи. Верификация методики выполнена путем качественного сопоставления полученных результатов с данными натурного эксперимента по спутниковому КРК между квантовым спутником Micius и наземной станцией, расположенной в Звенигороде. Проведена оценка предельной эффективной длины спутникового канала при трех стандартных длинах волн: 850, 1310 и 1550 нм. Для длины волны 850 нм выполнен расчет показателей эффективности КРК с учетом протоколов BB84 и B92. Проведенное исследование подтверждает принципиальную возможность применения КРК в задачах спутниковой оптической связи.

Ключевые слова: спутниковая оптическая связь; квантовое распределение ключей; эффективность квантового распределения ключей; скорость регистрации фотонов; скорость темновых отсчетов

DOI: 10.14357/08696527260304 **EDN:** FAVBZT

1 Введение

В условиях растущей угрозы, которую представляют квантовые компьютеры для криптографической стойкости классических криптосистем с открытым ключом [1, 2], технология КРК рассматривается как перспективное средство обеспечения информационной безопасности [3]. Квантовое распределение ключей позволяет генерировать и распределять криптографические ключи с доказуемой защитой от пассивного и активного перехвата, исключая необходимость доверенных посредников при передаче ключевой информации.

Теоретически спутниковый КРК позволяет обеспечить безопасность передачи данных на трансконтинентальные расстояния [1, 4]. Однако практическая реализация спутникового КРК сталкивается с фундаментальными ограничениями. Частные атмосферные воздействия, вызывающие затухание сигнала [4–7],

*Финансовая поддержка исследований М. В. Сапожникова, Ю. Б. Миронова и Б. М. Шабанова осуществлена НИЦ «Курчатовский институт» в рамках государственного задания.

[1]Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», msapozh@jscc.ru

[2]Московский технический университет связи и информатики, s.i.kazantsev@mtuci.ru

[3]Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», ymironov@jscc.ru

[4]Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», jscc@jscc.ru

[5]Московский технический университет связи и информатики, alexmatu7@yandex.ru

низкая квантовая эффективность детекторов одиночных фотонов и ненулевой уровень темновых отсчетов приводят к резкому снижению скорости генерации ключа (R_{sift}) и росту уровня квантовых ошибок (Quantum Bit Error Rate, QBER) с увеличением дистанции [8].

Критическими условиями работоспособности КРК считаются непревышение порога QBER $< 11\%$ (для протокола BB84) [9] и превышение вероятности регистрации сигнала над эффективным уровнем шума. Эти факторы и определяют предельно допустимую длину трассы [10]. В наземных волоконно-оптических линиях связи (ВОЛС) эти ограничения делают невозможным КРК на расстояния свыше $\sim$ 500 км. Рекордные дальности КРК по оптическому волокну в $\sim$ 1000 км, достигнутые в лабораторных условиях с использованием протокола КРК на полях-близнецах (Twin-Field Quantum Key Distribution, TF-QKD), в настоящее время не могут быть реализованы в современной телекоммуникационной инфраструктуре ВОЛС, поскольку данный подход требует очень точной настройки оборудования и чрезвычайно чувствителен к любым внешним воздействиям [10, 11]. Все это стимулирует развитие спутниковых систем КРК, где бóльшая часть трассы проходит в вакууме, а атмосферный участок ограничен 15–20 км [12, 13].

Тем не менее даже в спутниковых сценариях эффективность канала зависит от длины волны, геометрии трассы, параметров оптической системы и характеристик детекторов, что требует строгой количественной оценки перед проектированием реальных систем, обусловливая актуальность такого исследования.

Целью настоящей работы ставится верификация методики расчета показателей эффективности спутникового КРК (QBER и R_{sift}), включающей общую эффективность пропускания такого канала и пороговую длину трассы, с последующей оценкой работоспособности канала для длин волн $\lambda = 850$, 1310 и 1550 нм при использовании протоколов BB84 и B92. Для верификации методики проведено количественное сопоставление полученных результатов с данными натурного эксперимента по спутниковому КРК между спутником Micius [12, 14, 15] и наземной станцией в Звенигороде [16].

Для расчетов в первом окне прозрачности ($\lambda = 850$ нм) выбран лавинный детектор одиночных фотонов модели SPDMH2 компании Thorlabs [17]. Для

Таблица 1 Характеристики исследуемых детекторов

Детектор (фирма)	Спектральный диапазон, нм	Эффективность η_d (длина волны)	Частота темновых отсчетов DCR, Гц	Максимальная частота f, МГц
SPDMH2 (Thorlabs)	400–1000	50% ($\lambda = 850$ нм)	100	20
ID Qube NIR (ID Quantique)	900–1700	20% ($\lambda = 1301$ нм) 20% ($\lambda = 1550$ нм)	3000 6000	100

расчетов во втором и третьем окнах прозрачности (λ = 1310 и 1550 нм) выбран лавинный детектор серии ID Qube NIR компании ID Quantique (Gated model) [18]. Характеристики исследуемых детекторов приведены в табл. 1.

2 Методика расчета показателей эффективности спутникового квантового распределения ключей

Для протокола BB84 коэффициент квантовых ошибок на бит может быть рассчитан по различным методикам, описанным в [19–21]. В простейшем случае QBER рассчитывается согласно выражению:

$$e_{84} = \frac{cp_{\text{signal}} + (p_{\text{dark}} + p_{\text{staycounts}})/2}{p_{\text{click}}}. \quad (1)$$

Здесь c — собственная ошибка детектора, вероятность того, что фотон попал в ошибочный детектор вследствие неточности процедуры измерения приемником квантового состояния; p_{signal} — вероятность срабатывания детектора, обусловленного фотонами, переданными в одном слабом когерентном импульсе; $p_{\text{click}} = p_{\text{signal}} + p_{\text{dark}} + p_{\text{staycounts}}$ — полная вероятность зарегистрировать отправленный передатчиком слабый когерентный импульс на стороне приемника, где $p_{\text{dark}} = \text{DCR}/f$ — вероятности темновых отчетов детектора (DCR — частота темновых отсчетов (Dark Count Rate); f — максимальная частота импульсов передатчика); $p_{\text{staycounts}}$ — вероятность срабатывания детектора, вызванного дополнительными фоновыми вкладами, определенная в ходе эксперимента по КРК [16].

Вероятность срабатывания детектора, обусловленного фотонами, переданными в одном слабом когерентном импульсе, рассчитывается как

$$p_{\text{signal}} = 1 - e^{-\eta_d \eta \mu}, \quad (2)$$

где η_d — квантовая эффективность детектора; η — общая эффективность пропускания; μ — среднее число фотонов в импульсе.

Общая эффективность пропускания определяется согласно методикам [21–23] выражением

$$\eta = \eta_t \eta_r \eta_{\text{div}} \eta_{\text{absorption}} \eta_{\text{scattering}_R} \eta_{\text{scattering}_{\text{MI}}} \eta_{\text{sci}} \eta_{\text{bw}}, \quad (3)$$

где η_t и η_r — эффективности передатчика и приемника соответственно; η_{div} — коэффициент пропускания, обусловленный расходимостью оптического излучения; $\eta_{\text{absorption}}$ — коэффициент пропускания, обусловленный поглощением; $\eta_{\text{scattering}_R}$ — коэффициент пропускания, обусловленный молекулярным рассеянием; $\eta_{\text{scattering}_{\text{MI}}}$ — коэффициент пропускания, обусловленный аэрозольным рассеянием; η_{sci} — коэффициент пропускания из-за эффекта сцинтилляции; η_{bw} — коэффициент пропускания из-за эффекта блуждания луча.

Скорость генерации ключа R_{sift} в протоколе BB84 может быть рассчитана следующим образом [21, 24]:

$$R_{\text{BB84}} = \frac{1}{2} p_{\text{click}} \left\{ 1 - \tau' + f(e_{84}) [e_{84} \log_2(e_{84}) + (1 - e_{84}) \log_2(1 - e_{84})] \right\}. \quad (4)$$

Здесь e_{84} — коэффициент квантовых ошибок на бит (1); p_{click} — полная вероятность зарегистрировать отправленный передатчиком слабый когерентный импульс на стороне приемника; $f(e_{84})$ — коэффициент избыточности при коррекции ошибок [25]; $\tau' = \tau(e_{84}/\beta)$ — доля ключа, отбрасываемая на этапе усиления конфиденциальности (privacy amplification), в которой

$$\tau(e_{84}) = \begin{cases} \log_2 \left(1 + 4e_{84} - 4e_{84}^2\right), & e_{84} < \dfrac{1}{2}; \\ 1, & e_{84} \geq \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

где β — параметр безопасности:

$$\beta = \frac{p_{\text{click}} - p'}{p_{\text{click}}}.$$

Здесь p' — вероятность того, что в слабом когерентном импульсе содержится два или более фотонов, и выражается через среднее число фотонов в импульсе μ следующим образом:

$$p' = 1 - \left(1 + \mu + \frac{\mu^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mu^3}{6}\right) \exp(-\mu).$$

Для протокола B92 коэффициент квантовых ошибок на бит QBER и скорость генерации ключа R_{sift} рассчитываются аналогично протоколу BB84 с учетом замены коэффициентов $1/2$ на $1/4$ [21, 24, 25] и определяются выражениями

$$e_{92} = \frac{cp_{\text{signal}} + (d_{\text{dark}} + p_{\text{staysounts}})/4}{p_{\text{click}}}; \quad (5)$$

$$R_{\text{B92}} = \frac{1}{4} p_{\text{click}} \left\{ 1 - \tau' + f(e_{92}) [e_{92} \log_2(e_{92}) + (1 - e_{92}) \log_2(1 - e_{92})] \right\}. \quad (6)$$

3 Верификация методики расчета показателей эффективности спутникового квантового распределения ключей

В целях оценки валидности рассмотренной методики расчета показателей эффективности КРК, включая выражения (1), (2), (4)–(6), а также обобщенного

Таблица 2 Параметры, определенные в ходе эксперимента по КРК [16]

Протокол КРК	BB84
Орбита спутника Micius	Низкая околоземная орбита
Максимальный угол возвышения спутника	54°
Угол места на спутник, с которого началось устойчивое двустороннее наведение	28°
Диаметр линзы приемного устройства, D_r	600 мм
Диаметр линзы передающего устройства, D_t	300 мм
Оптическая эффективность элементов наземной приемной станции, $\eta_{\text{opt}}(\eta_r)$	0,27
Квантовая эффективность детектора одиночных фотонов, η_d	0,6
Среднее число фотонов в импульсе, μ	0,8
Частота импульсов передатчика, f_t	10^8 Гц
Вероятность зарегистрировать шум, который включает в себя число темновых отсчетов детекторов одиночных фотонов и дополнительные фоновые вклады, $p_{\text{dark}} + p_{\text{staycounts}}$	$5 \cdot 10^{-6}$
Собственная ошибка детектора, вероятность того, что фотон попал в ошибочный детектор вследствие неточности процедуры измерения приемником квантового состояния, c	0,5%

коэффициента пропускания (3), необходимо провести ее верификацию путем качественного сопоставления полученных результатов с данными натурного эксперимента по спутниковому КРК, описанного в работе [16]. Такого вида сравнение обеспечивает верификацию полученных зависимостей и служит критерием валидности применяемого расчетного подхода к оценке эффективности КРК.

В указанном эксперименте реализовано спутниковое КРК между спутником «Мициус» (Micius) [12, 14, 15] и наземной станцией, расположенной в Звенигороде. Сеанс связи проведен в ночь с 28 февраля на 1 марта 2022 г. при прохождении спутника через зону видимости станции. Параметры, определенные в ходе эксперимента, представлены в табл. 2.

На основании данных табл. 2, на рис. 1 приведено сопоставление рассчитанной скорости генерации просеянного квантового ключа, полученной с использованием описанной методики оценки показателей эффективности спутникового КРК, и экспериментальных данных, зарегистрированных в ходе пролета спутника Micius над Звенигородской наземной станцией [16].

При численном моделировании скорости генерации просеянного квантового ключа (см. рис. 1) коэффициенты пропускания, обусловленные сцинтилляцией и блужданием пучка, рассчитывались на основе вертикального профиля структурной постоянной показателя преломления $C_n^2(h)$ [6], описываемого моделью Гринвуда [26], в соответствии с методикой, изложенной в [6]. Данная модель

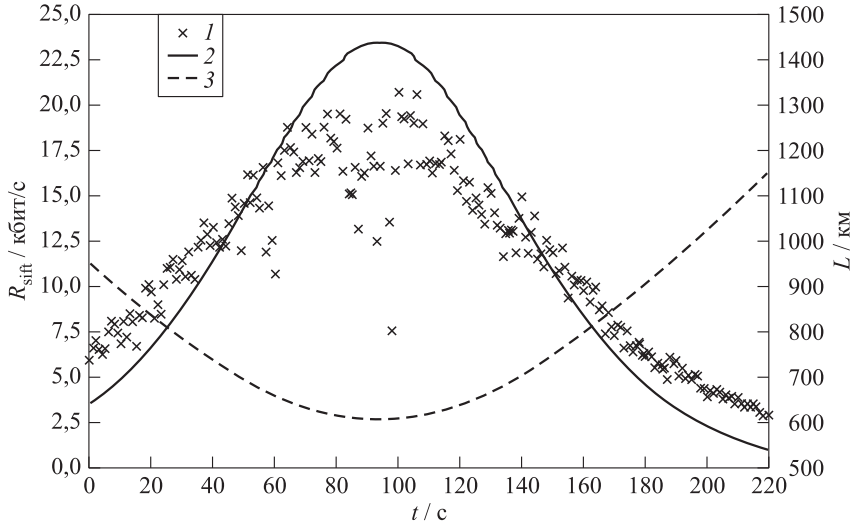


Рис. 1 Скорость генерации просеянной квантовой ключевой последовательности: *1* — экспериментальные данные; *2* — численное моделирование; *3* — протяженность трассы

выбрана с учетом ночных условий проведения натурного эксперимента [16], при которых турбулентные флуктуации в приземном слое атмосферы ослаблены, а профиль $C_n^2(h)$ соответствует устойчивой стратификации, что обеспечивает адекватность ее применения для оценки общей эффективности канала η (3).

Сопоставление рассчитанной и экспериментальной скорости генерации просеянного ключа R_{sift} в ходе пролета спутника Micius над Звенигородской станцией демонстрирует хорошее качественное согласие в течение всего сеанса связи. Наблюдаемая динамика подтверждает адекватность моделирования влияния атмосферных потерь и геометрической конфигурации канала. Это свидетельствует о применимости описанной методики расчета показателей эффективности спутникового КРК для дальнейших исследований.

4 Оценка предельной протяженности спутникового канала для квантового распределения ключей

Эффективность спутниковой квантовой линии связи определяется не только геометрической протяженностью трассы и частными атмосферными воздействиями, но и соотношением между скоростью регистрации полезных фотонов и темновым фоном. Критическим фактором, ограничивающим работоспособность системы, считается условие, при котором скорость регистрации полезных фотонов становится сопоставимой или ниже темнового фона. Это влечет за собой резкое снижение достоверности передаваемой информации, вплоть до неприемле-

мых значений [9]. В связи с этим, если значение произведения частоты отправки одиночных фотонов f на вероятность регистрации фотона p меньше скорости темновых отсчетов DCR, то передача неосуществима: при этом пределе отличить сигнал от шума затруднительно.

Сигнал должен быть различим по сравнению с фоновым уровнем, поэтому необходимо выполнение неравенства

$$1 - e^{-\eta_d \eta \mu} = p_{\text{signal}} > p_{\text{dark}}\,, \tag{7}$$

где η — общая эффективность пропускания (3); p_{signal} — вероятность срабатывания детектора, обусловленного фотонами, переданными в одном слабом когерентном импульсе (2); p_{dark} — вероятность темновых отсчетов детекторов одиночных фотонов.

Учитывая, что при $\eta_d \eta \mu \ll 1$ вероятность срабатывания детектора $p_{\text{signal}} \approx$ $\approx \eta_d \eta \mu$, на основании выражения (7) пороговая вероятность регистрации одиночного фотона определяется как

$$p_{\text{signal}_{\text{порог}}} = \frac{\text{DCR}}{f \mu \eta_d}\,.$$

Для расчета вероятности срабатывания детектора p_{signal} требуется предварительная оценка общей эффективности пропускания канала η, определяемой как произведение геометрических и частных атмосферных потерь (3).

Зависимости общей эффективности пропускания канала в случае максимального возвышения спутника 50° для $\lambda = 850$, 1310 и 1550 нм представлены на рис. 2. На вторичной оси отложена протяженность трассы $L(t)$, соответствующая геометрии спутниковой связи.

На основании данных рис. 2 можно сделать следующие выводы: эффективность пропускания снижается с увеличением длины волны, т. е. $\eta|_{\lambda=850} > \eta|_{\lambda=1310} > \eta|_{\lambda=1550}$; наиболее высокую эффективность демонстрирует канал при $\lambda = 850$ нм, что обусловлено, в частности, меньшими дифракционными потерями и более высокой квантовой эффективностью детекторов в этом диапазоне (см. табл. 1).

Рассчитанные вероятности срабатывания детектора p_{signal} с учетом рис. 2 для $\lambda = 850$, 1310 и 1550 нм представлены на рис. 3. На рис. 3 также нанесены пороговые вероятности регистрации одиночных фотонов.

На рис. 3 показаны временны́е зависимости вероятности регистрации полезного фотона p_{signal} (*1*) и пороговой вероятности (*2*). На вторичной оси отложена протяженность трассы $L(t)$, определяемая геометрией спутниковой связи. Из рис. 3 видно, что:

(1) при $\lambda = 850$ нм $p_{\text{signal}} > p_{\text{signal}_{\text{порог}}}$ в течение интервала времени от $t \approx$ ≈ 10 до 290 с. Пороговая длина трассы, отвечающая моменту пересечения кривых, составляет $L_{\max} \approx 1289{,}8$ км, что соответствует углу места спутника $\varphi < 20°$, когда устойчивое двустороннее наведение отстутствует.

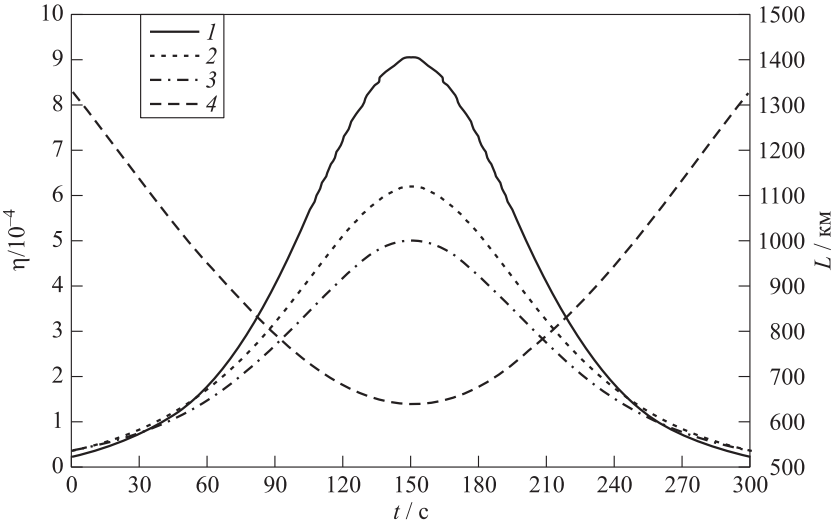


Рис. 2 Зависимости общей эффективности пропускания канала для различных длин волн: *1* — $\lambda = 850$ нм; *2* — 1310; *3* — $\lambda = 1550$ нм; *4* — протяженность трассы

Таким образом, система на длине волны 850 нм способна обеспечить работоспособный сеанс связи в течение времени, когда угол места спутника превышает 20°. Это согласуется с физическими ограничениями реальных спутниковых экспериментов, где связь возможна только при относительно высоких углах места (обычно $> 15°$–$20°$);

(2) при $\lambda = 1310$ нм во всем диапазоне времени сеанса $p_{\text{signal}} < p_{\text{signal}_{\text{порог}}}$. Таким образом, условие различимости сигнала и шума не выполняется ни при каких условиях. Это обусловлено снижением квантовой эффективности детекторов по сравнению с аналогичными приборами на длине волны 850 нм, увеличением дифракционных потерь, а также частными атмосферными воздействиями, особенно при больших зенитных углах. На основании этого при заданных параметрах детектора использование длины волны 1310 нм для спутникового КРК физически невозможно в рамках данной конфигурации: система не может достичь порога работоспособности даже при минимальной длине трассы;

(3) для длины волны $\lambda = 1550$ нм качественная картина полностью повторяет случай 1310 нм. Различие между сигналом и шумом отсутствует на всем интервале времени.

Проведенный анализ демонстрирует, что работоспособность спутникового канала с КРК сильно зависит от длины волны, и лишь при использовании

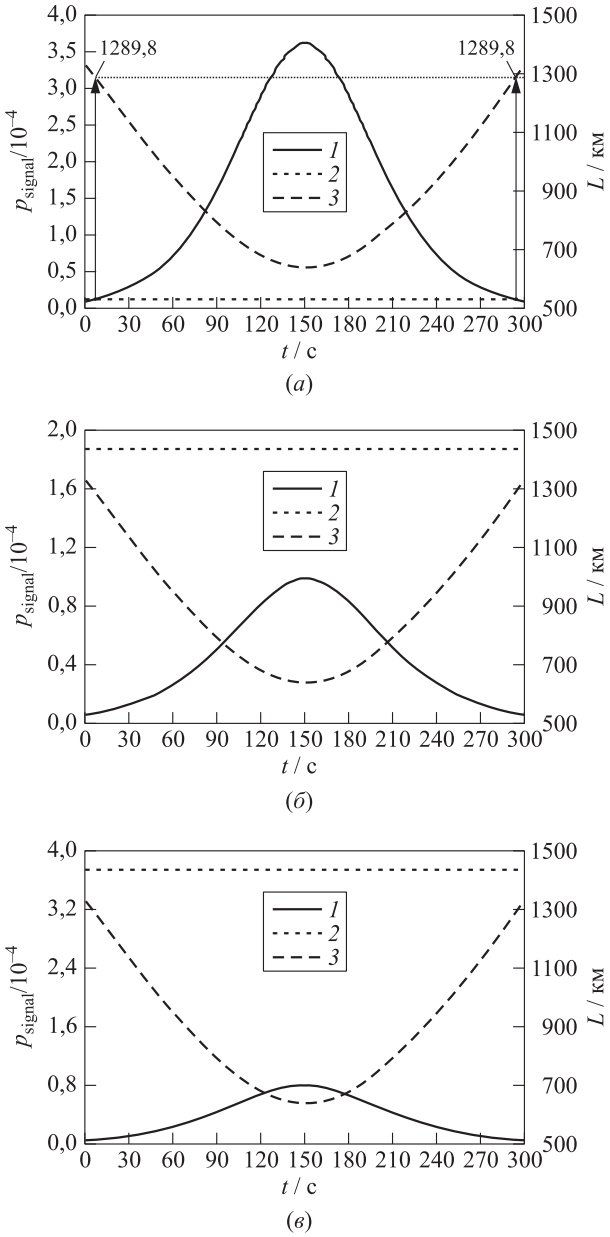


Рис. 3 Вероятность срабатывания детектора: (*а*) $\lambda = 850$ нм; (*б*) 1310; (*в*) $\lambda = 1550$ нм; *1* — p_{signal}; *2* — $p_{\text{signal}_{\text{порог}}}$; *3* — протяженность трассы

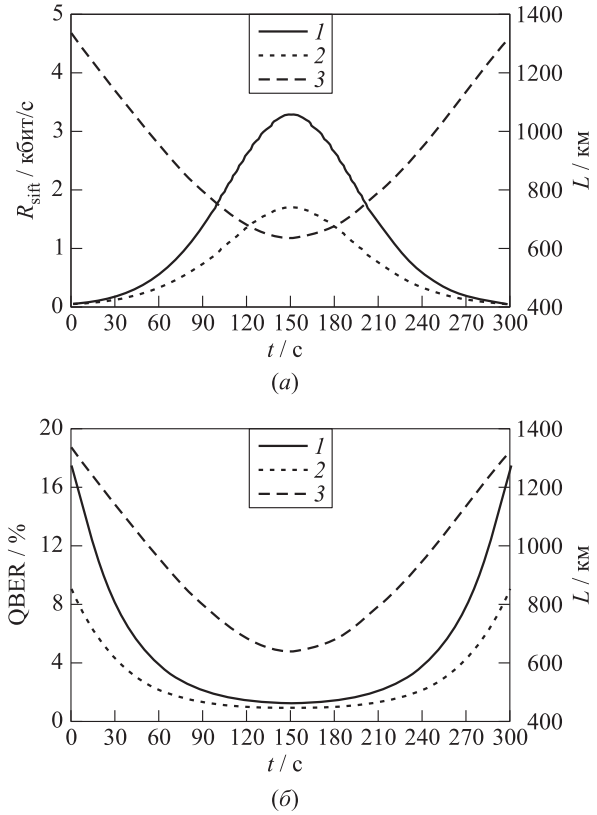


Рис. 4 Скорость генерации просеянной квантовой ключевой последовательности (*а*) и коэффициент квантовых ошибок на бит (*б*): *1* — BB84; *2* — B92; *3* — протяженность трассы

$\lambda = 850$ нм возможно достижение условия $p_{\text{signal}} > p_{\text{signal}_{\text{порог}}}$ при заданных параметрах детекторов (см. табл. 1). Для длин волн 1310 и 1550 нм при заданных параметрах детекторов передача информации невозможна, поскольку уровень сигнала остается ниже порога различимости с фоновым шумом на всем протяжении сеанса связи. Эти результаты подтверждают критическую роль выбора длины волны при проектировании спутниковых систем квантовых коммуникаций и указывают на необходимость использования высокоэффективных детекторов.

На рис. 4 представлены скорость генерации просеянной квантовой ключевой последовательности и коэффициент квантовых ошибок на бит при рабочей длине волны $\lambda = 850$ нм для двух протоколов КРК: BB84 и B92. На вторичной оси отложена протяженность трассы $L(t)$, соответствующая геометрии спутниковой связи.

Из рис. 4 видно, что:

(1) протокол BB84 обеспечивает более высокую скорость (максимальное значение $R_{\text{sift}}^{\max} \approx 3{,}3$ кбит/с), в то время как протокол B92 имеет меньшую скорость ($R_{\text{sift}}^{\max} \approx 1{,}7$ кбит/с). Это различие объясняется более низкой эффективностью кодирования в B92 (в среднем 50% импульсов теряются на этапе просеивания, тогда как в BB84 50% — только при несовпадении базисов);

(2) для протокола BB84 минимальный QBER $\approx 1{,}1\%$, максимальный $\approx 17{,}5\%$; для B92: минимальный QBER $\approx 0{,}8\%$, максимальный $\approx 8{,}5\%$. Для протокола BB84 значение QBER превышает пороговую границу 11%, что теоретически делает формирование ключа невозможным [9]. Это свидетельствует о наличии третьей стороны (Евы), поскольку любое измерение со стороны злоумышленника неизбежно вызывает изменение состояния квантовых частиц. В этом случае протокол прекращается, и участники повторяют процедуру генерации ключа пока не удостоверятся в его безопасности. Однако эти временны́е интервалы соответствуют углам места спутника $\varphi < 20^\circ$. Таким образом, превышение QBER в «крайних» точках не становится критичным для практической реализации, поскольку в этих условиях связь не устанавливается.

Итак, при использовании длины волны 850 нм в спутниковом канале КРК:

(1) протокол BB84 обеспечивает высокую скорость генерации ключа (до 3,3 кбит/с), но сопряжен с более высоким уровнем в области малых углов места;

(2) протокол B92 характеризуется меньшей скоростью (до 1,7 кбит/с), но более низким и стабильным , что повышает надежность ключа в условиях слабого сигнала.

5 Заключение

В работе верифицируется методика расчета показателей эффективности спутникового КРК (QBER и R_{sift}), включающая общую эффективность пропускания η такого канала связи. Верификация выполнена путем качественного сопоставления полученных результатов с данными натурного эксперимента по спутниковому КРК между спутником Micius и наземной станцией, расположенной в Звенигороде. Показано хорошее согласие между рассчитанной и экспериментальной скоростью генерации ключа в течение всего сеанса, что подтверждает корректность принятых модельных предположений.

Проведена оценка предельной эффективной длины спутникового канала на трех длинах волн: 850, 1310 и 1550 нм. Установлено, что при $\lambda = 850$ нм достижима работоспособная связь; для $\lambda = 1310$ и 1550 нм скорость регистрации полезных фотонов всегда ниже темнового фона, что обусловлено низкой квантовой эффективностью исследуемых детекторов, значительными дифракционными и атмосферными потерями.

Для длины волны 850 нм выполнен расчет эффективности КРК для протоколов BB84 и B92. Проведенный анализ показывает, что протокол BB84 обеспечивает высокую скорость генерации ключа (до 3,3 кбит/с), но сопряжен с более высоким уровнем QBER в области малых углов места; протокол B92 характеризуется меньшей скоростью (до 1,7 кбит/с), но более низким и стабильным QBER, что повышает надежность ключа в условиях слабого сигнала. Хотя QBER в BB84 превышает критический порог 11% (при $\varphi > 20°$), этот интервал исключается из практического использования, поскольку в нем эффективность канала падает ниже требуемого уровня и физическая связь невозможна.

Полученные результаты подтверждают принципиальную возможность применения КРК в задачах спутниковой оптической связи.

Литература

1. *Pirandola S., Andersen U. L., Banchi L., et al.* Advances in quantum cryptography // Adv. Opt. Photonics, 2020. Vol. 12. No. 4. P. 1012–1236. doi: 10.1364/AOP.361502.
2. *Гаврилов В. Е., Зацаринный А. А.* Проблемы и угрозы внедрения некоторых новых цифровых технологий // Системы и средства информатики, 2022. Т. 32. № 3. С. 15–25. doi: 10.14357/08696527220302. EDN: QKESJR.
3. *Durr-E-Shahwar, Imran M., Altamimi A. B., Khan W., Hussain S., Alsaffar M.* Quantum cryptography for future networks security: A systematic review // IEEE Access, 2024. Vol. 12. P. 180048–180078. doi: 10.1109/ACCESS.2024.3504815.
4. *Kaushal H., Kaddoum G.* Optical communication in space: Challenges and mitigation techniques // IEEE Commun. Surv. Tut., 2016. Vol. 19. No. 1. P. 57–96. doi: 10.1109/COMST.2016.2603518.
5. *Зуев В. Е., Банах В. А., Покасов В. В.* Атмосферная оптика. — Л.: Гидрометеоиздат, 1988. Т. 5. 271 с.
6. *Сапожников М. В.* Анализ влияния атмосферной турбулентности на устойчивость квантового канала связи. Существующие подходы и методы // Электросвязь, 2025. № 4. С. 37–46. doi: 10.34832/ELSV.2025.66.4.005. EDN: DYWMRT.
7. *Сапожников М. В., Миронов Ю. Б.* Ослабление оптического излучения в атмосфере // Электросвязь, 2025. № 7. С. 2–7. doi: 10.34832/ELSV.2025.69.7.001. EDN: VOIOVK.
8. *Миронов Ю. Б., Казанцев С. Ю., Шаховой Р. А. и др.* Анализ перспектив развития источников одиночных фотонов в системах квантового распределения ключей // Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли, 2021. Т. 13. № 6. С. 22–33. doi: 10.36724/2409-5419-2021-13-6-22-33. EDN: RBHHOT.
9. *Tan X.* Introduction to quantum cryptography // Theory and practice of cryptography and network security protocols and technologies. — IntechOpen, 2013. P. 111–146. doi: 10.5772/56092.
10. *Сукачев Д. Д.* Протяженные квантовые сети // Успехи физических наук, 2021. Т. 191. № 10. С. 1077–1094. doi: 10.3367/UFNr.2020.11.038888.
11. *Xie Z.-L., Zheng M.-Y., Li W.-H., et al.* Performance evaluation of twin-field quantum key distribution using avalanche photodiode single-photon detectors // Opt. Express, 2026. Vol. 34. P. 1674–1685. doi: 10.1364/OE.582280.

12. *Chen Y.-A., Zhang Q., Shen Q., et al.* An integrated space-to-ground quantum communication network over 4,600 kilometers // Nature, 2021. Vol. 589. No. 7841. P. 214–219. doi: 10.1038/s41586-020-03093-8.
13. *Велихов В. Е., Ковальчук М. В., Кулик С. П. и др.* О межуниверситетской квантовой сети // Электросвязь, 2024. № 11. С. 2–11. doi: 10.34832/ELSV.2024.60.11.001. EDN: AOWFLL.
14. *Bedington R., Arrazola J. M., Ling A.* Progress in satellite quantum key distribution // npj Quantum Information, 2017. Vol. 3. No. 1. Art. 30. 13 p. doi: 10.1038/s41534-017-0031-5.
15. *Lu C.-Y., Cao Y., Peng C.-Z., et al.* Micius quantum experiments in space // Rev. Mod. Phys., 2022. Vol. 94. No. 3. Art. 035001. 46 p. doi: 10.1103/RevModPhys.94.035001.
16. *Khmelev A. V., Duplinsky A. V., Bakhshaliev R. M., et al.* Eurasian-scale experimental satellite-based quantum key distribution with detector efficiency mismatch analysis // Opt. Express, 2024. Vol. 32. No. 7. P. 11964–11978. doi: 10.1364/OE.511772. EDN: AAQERH.
17. Single photon detectors. https://www.thorlabs.com.
18. ID Qube Series NIR Gated Single Photon Detector. https://www.idquantique.com.
19. *Liorni C., Kampermann H., Bruss D.* Satellite-based links for quantum key distribution: Beam effects and weather dependence // New J. Phys., 2019. Vol. 21. No. 9. Art. 093055. 20 p. doi: 10.1088/1367-2630/ab41a2.
20. *Khmelev A. V., Duplinsky A. V., Kurochkin V. L., et al.* Semi-empirical satellite-to-ground quantum key distribution model for realistic receivers // Entropy, 2023. Vol. 25. No. 4. Art. 670. 14 p. doi: 10.3390/e25040670. EDN: PLBAMI.
21. *Muskan R. M., Meena R., Banerjee S.* Performance analysis of satellite-based QKD protocols. — Cornell University, 2023. 19 p. arXiv:2308.01036 [quant-ph]. doi: 10.48550/arXiv.2308.01036.
22. *Сапожников М. В., Миронов Ю. Б., Казанцев С. Ю.* Методика оценки потерь, обусловленных атмосферной турбулентностью в квантовом канале связи с КРК // Электросвязь, 2025. № 8. С. 60–69. doi: 10.34832/ELSV.2025.70.8.007. EDN: PNABGV.
23. *Казанцев С. Ю., Сапожников М. В., Терехин Д. Н., Миронов Ю. Б., Шабанов Б. М.* Оценка доступности атмосферной оптической связи в различных субъектах Российской Федерации // Системы и средства информатики, 2025. Т. 35. № 2. С. 61–80. doi: 10.14357/08696527250205. EDN: ZRUEZE.
24. *Khir M. F. A., Mohd Zain M. N., Suryadi, Shaari S.* Implementation of two way quantum key distribution protocol with decoy state // Opt. Commun., 2011. Vol. 285. No. 5. P. 842–845. doi: 10.1016/J.OPTCOM.2011.11.036.
25. *Lútkenhaus N.* Security against individual attacks for realistic quantum key distribution // Phys. Rev. A, 2000. Vol. 61. No. 5. Art. 052304. 10 p. doi: 10.1103/PhysRevA.61.052304.
26. *Greenwood D. P.* Bandwidth specification for adaptive optics systems // J. Opt. Soc. Am., 1977. Vol. 67. No. 3. P. 390–393. doi: 10.1364/JOSA.67.000390.

Поступила в редакцию 09.04.2026
Принята к публикации 15.09.2026

EFFICIENCY OF QUANTUM KEY DISTRIBUTION IN SATELLITE OPTICAL COMMUNICATIONS

***M. V. Sapozhnikov*[1], *S. Yu. Kazantsev*[2], *Yu. B. Mironov*[1], *B. M. Shabanov*[1], *and A. E. Matyunin*[2]**

[1]National Research Center "Kurchatov Institute, 1 Acad. Kurchatov Sq., Moscow 123182, Russian Federation
[2]Moscow Technical University of Communications and Informatics, 8A Aviamotornaya Str., Moscow 111024, Russian Federation

Abstract: The paper evaluates the feasibility of using quantum key distribution in satellite optical communications. A methodology for calculating the performance indicators of satellite quantum key distribution, including the overall throughput efficiency of such a communication channel, is verified. The methodology is verified by qualitatively comparing the obtained results with data from a full-scale satellite quantum key distribution experiment between the Micius quantum satellite and a ground station located in Zvenigorod. The maximum effective length of the satellite channel is estimated for three standard wavelengths: 850, 1310, and 1550 nm. For a wavelength of 850 nm, the performance indicators of quantum key distribution are calculated taking into account the BB84 and B92 protocols. The study confirms the fundamental feasibility of using quantum key distribution in satellite optical communications.

Keywords: satellite optical communication; quantum key distribution; quantum key distribution efficiency; photon detection rate; dark count rate

DOI: 10.14357/08696527260304 **EDN:** FAVBZT

Acknowledgments

Finansial support for the research of M. V. Sapozhnikov, Yu. B. Mironov, and B. M. Shabanov was provided by the National Research Center "Kurchatov Institute" within the framework of the state assignment.

References

1. Pirandola, S., U. L. Andersen, L. Banchi, *et al.* 2020. Advances in quantum cryptography. *Adv. Opt. Photonics* 12(4):1012–1236. doi: 10.1364/AOP.361502.
2. Gavrilov, V. E., and A. A. Zatsarinny. 2022. Problemy i ugrozy vnedreniya nekotorykh novykh tsifrovykh tekhnologiy [Problems and threats of some new digital technologies implementation]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 32(3):15–25. doi: 10.14357/08696527220302. EDN: QKESJR.
3. Durr-E-Shahwar, M. Imran, A. B. Altamimi, W. Khan, S. Hussain, and M. Alsaffar. 2024. Quantum cryptography for future networks security: A systematic review. *IEEE Access* 12:180048–180078. doi: 10.1109/ACCESS.2024.3504815.

4. Kaushal, H., and G. Kaddoum. 2016. Optical communication in space: Challenges and mitigation techniques. *IEEE Commun. Surv. Tut.* 19(1):57–96. doi: 10.1109/COMST.2016.2603518.
5. Zuev, V. E., V. A. Banakh, and V. V. Pokasov. 1988. *Atmosfernaya optika* [Atmospheric optics]. Leningrad: Gidrometeoizdat. Vol. 5. 271 p.
6. Sapozhnikov, M. V. 2025. Analiz vliyaniya atmosfernoy turbulentnosti na ustoychivost' kvantovogo kanala svyazi. Sushchestvuyushchie podkhody i metody [Analysis of the influence of atmospheric turbulence on the stability of a quantum communication channel. Existing approaches and methods]. *Elektrosvyaz'* [Telecommunication] 4:37–46. doi: 10.34832/ELSV.2025.66.4.005. EDN: DYWMRT.
7. Sapozhnikov, M. V., and Yu. B. Mironov. 2025. Oslablenie opticheskogo izlucheniya v atmosfere [Attenuation of optical radiation in the atmosphere]. *Elektrosvyaz'* [Telecommunication] 7:2–7. doi: 10.34832/ELSV.2025.69.7.001. EDN: VOIOVK.
8. Mironov, Yu. B., S. Yu. Kazantsev, R. A. Shakhovoy, *et al.* 2021. Analiz perspektiv razvitiya istochnikov odinochnykh fotonov v sistemakh kvantovogo raspredeleniya klyuchey [Analysis of single photon sources with quantum key distribution systems development prospects]. *Naukoemkie tekhnologii v kosmicheskikh issledovaniyakh Zemli* [H&ES Research] 13(6):22–33. doi: 10.36724/2409-5419-2021-13-6-22-33. EDN: RBHHOT.
9. Tan, X. 2013. Introduction to quantum cryptography. *Theory and practice of cryptography and network security protocols and technologies*. IntechOpen. 111–146. doi:10.5772/56092.
10. Sukachev, D. D. 2021. Large quantum networks. *Phys. — Usp.* 64(10):1021–1037. doi: 10.3367/UFNe.2020.11.038888. EDN: BBEXID.
11. Xie, Z.-L., M.-Y. Zheng, W.-H. Li, *et al.* 2026. Performance evaluation of twin-field quantum key distribution using avalanche photodiode single-photon detectors. *Opt. Express* 34(2):1674–1685. doi: 10.1364/OE.582280.
12. Chen, Y.-A., Q. Zhang, Q. Shen, *et al.* 2021. An integrated space-to-ground quantum communication network over 4,600 kilometers. *Nature* 589:214–219. doi: 10.1038/s41586-020-03093-8.
13. Velikhov, V. E., M. V. Kovalchuk, S. P. Kulik, *et al.* 2024. O mezhuniversitetskoy kvantovoy seti [About the inter-university quantum network]. *Elektrosvyaz'* [Telecommunication] 11:2–11. doi: 10.34832/ELSV.2024.60.11.001. EDN: AOWFLL.
14. Bedington, R., J. M. Arrazola, and A. Ling. 2017. Progress in satellite quantum key distribution. *npj Quantum Information* 3(1):30. 13 p. doi: 10.1038/s41534-017-0031-5.
15. Lu, C.-Y., Y. Cao, C.-Z. Peng, *et al.* 2022. Micius quantum experiments in space. *Rev. Mod. Phys.* 94(3):035001. 46 p. doi: 10.1103/RevModPhys.94.035001.
16. Khmelev, A. V., A. V. Duplinsky, R. M. Bakhshaliev, *et al.* 2024. Eurasian-scale experimental satellite-based quantum key distribution with detector efficiency mismatch analysis. *Opt. Express* 32(7):11964–11978. doi: 10.1364/OE.511772. EDN: AAQERH.

17. Single photon detectors. Available at: https://www.thorlabs.com (accessed September 8, 2026).
18. ID Qube Series NIR Gated Single Photon Detector. Available at: https://www.idquantique.com (accessed September 8, 2026).
19. Liorni, C., H. Kampermann, and D. Bruss. 2019. Satellite-based links for quantum key distribution: Beam effects and weather dependence. *New J. Phys.* 21(9):093055. 20 p. doi: 10.1088/1367-2630/ab41a2.
20. Khmelev, A. V., A. V. Duplinsky, V. L. Kurochkin, *et al.* 2023. Semi-empirical satellite-to-ground quantum key distribution model for realistic receivers. *Entropy* 25(4):670. 14 p. doi: 10.3390/e25040670. EDN: PLBAMI.
21. Muskan, R. M., R. Meena, and S. Banerjee. 2023. Performance analysis of satellite-based QKD protocols. Cornell University. 19 p. Available at: https://arxiv.org/pdf/2308.01036 (accessed September 8, 2026).
22. Sapozhnikov, M. V., Yu. B. Mironov, and S. Yu. Kazantsev. 2025. Metodika otsenki poter', obuslovlennykh atmosfernoy turbulentnost'yu v kvantovom kanale svyazi s KRK [Methodology for estimating losses due to atmospheric turbulence in a quantum communication channel with qkd]. *Elektrosvyaz'* [Telecommunication] 8:60–69. doi: 10.34832/ELSV.2025.70.8.007. EDN: PNABGV.
23. Kazantsev, S. Yu., M. V. Sapozhnikov, D. N. Terekhin, Yu. B. Mironov, and B. M. Shabanov. 2025. Otsenka dostupnosti atmosfernoy opticheskoy svyazi v razlichnykh sub"ektakh Rossiyskoy Federatsii [Assessment of the availability of atmospheric optical communications in various regions of the Russian Federation]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 35(2):61–80. doi: 10.14357/08696527250205. EDN: ZRUEZE.
24. Khir, M. F. A., M. N. Mohd Zain, Suryadi, and S. Shaari. 2011. Implementation of two way quantum key distribution protocol with decoy state. *Opt. Commun.* 285(5):842–845. doi: 10.1016/J.OPTCOM.2011.11.036.
25. Lútkenhaus, N. 2000. Security against individual attacks for realistic quantum key distribution. *Phys. Rev. A* 61(5):052304. 10 p. doi: 10.1103/PhysRevA.61.052304.
26. Greenwood, D. P. 1977. Bandwidth specification for adaptive optics systems. *J. Opt. Soc. Am.* 67(3):390–393. doi: 10.1364/JOSA.67.000390.

Received April 9, 2026
Accepted September 15, 2026

Contributors

Sapozhnikov Maksim V. (b. 1998) — Candidate of Science (PhD) in technology, junior scientist, National Research Center "Kurchatov Institute," 1 Acad. Kurchatov Sq., Moscow 123182, Russian Federation; msapozh@jscc.ru

Kazantsev Sergey Yu. (b. 1971) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Moscow Technical University of Communications and Informatics, 8a Aviamotornaya Str., Moscow 111024, Russian Federation; s.i.kazantsev@mtuci.ru

Mironov Yuri B. (b. 1985) — Candidate of Science (PhD) in technology, leading scientist, National Research Center "Kurchatov Institute," 1 Acad. Kurchatov Sq., Moscow 123182, Russian Federation; ymironov@jscc.ru

Shabanov Boris M. (b. 1954) — Doctor of Science in technology, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, deputy director, National Research Center "Kurchatov Institute," 1 Acad. Kurchatov Sq., Moscow 123182, Russian Federation; jscc@jscc.ru

Matyunin Alexander E. (b. 1991) — PhD student, Moscow Technical University of Communications and Informatics, 8a Aviamotornaya Str., Moscow 111024, Russian Federation; alexmatu7@yandex.ru

ОЦЕНКА РИСКА В ЗАДАЧЕ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОРОГОВЫХ ФУНКЦИЙ*

***А. А. Кудрявцев*[2], *О. В. Шестаков*[2]**

Аннотация: Методы вейвлет-анализа широко используются при решении задач реконструкции томографических изображений, возникающих в медицине, биологии, астрономии и других областях. Их привлекательность заключается в быстроте алгоритмов, адаптации к особенностям изображений и возможности реконструкции локальных участков изображения по неполным проекционным данным. Это имеет важное значение, например для медицинских приложений, где пациента нежелательно подвергать лишней дозе облучения. Анализ погрешностей этих методов представляет собой важную практическую задачу, поскольку позволяет оценить качество как самих методов, так и используемого оборудования. В работе рассматривается задача реконструкции функции изображения при обращении оператора Радона. Исследуются асимптотические свойства оценки риска при пороговой обработке коэффициентов вейвлет-вейглет-разложения функции изображения. Приводятся условия, при которых имеет место асимптотическая нормальность и сильная состоятельность несмещенной оценки риска.

Ключевые слова: преобразование Радона; вейвлет-вейглет-разложение; пороговая обработка; оценка риска

DOI: 0.14357/08696527260305 **EDN:** BDPUOD

1 Введение

Методы статистического анализа часто применяются для решения задач, в которых доступны лишь косвенные наблюдения, в частности для задач компьютерной томографии, связанных с реконструкцией изображений по проекциям. Томографические методы реконструкции изображений широко распространены в самых разных областях, включая медицину, геофизику, астрономию и радиолокацию. Задача обращения преобразования Радона, лежащего в основе

*Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2025-345.

[1]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, aakudryavtsev@cs.msu.ru

[2]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Московский центр фундаментальной и прикладной математики; Федеральный исследовательский центра «Информатика и управление» Российской академии наук; oshestakov@cs.msu.ru

математической модели проекционных данных, относится к некорректно поставленным, и для ее решения требуется использовать методы регуляризации, поскольку в реальных наблюдениях всегда присутствует шум. Классические линейные методы регуляризации не всегда дают удовлетворительные результаты, поскольку не учитывают особенности изображений, такие как резкая смена фона, границы контуров и т. п. С этим недостатком позволяют справиться методы вейвлет-разложения, предложенные в работе [1]. В работах [2–4] проводится анализ среднеквадратичного риска методов нелинейной регуляризации, основанных на пороговой обработке коэффициентов вейвлет-разложения. В данной работе рассматривается оценка среднеквадратичного риска и показывается, что при некоторых дополнительных требованиях на гладкость функции изображения эта оценка сильно состоятельна и асимптотически нормальна. Аналогичные результаты для задачи обращения линейных однородных операторов получены в работах [5–7].

2 Преобразование Радона

Преобразование Радона функции f определяется следующим образом:

$$Rf(s,\theta) = \int\limits_{L_{s,\theta}} f(x,y)\, dl,$$

где

$$L_{s,\theta} = \{(x,y)\colon x\cos\theta + y\sin\theta - s = 0\}\,.$$

Задача реконструкции томографического изображения состоит в нахождении функции $f(x,y)$ при наблюдении функции $Rf(s,\theta)$, т. е. обращении преобразования R. Для решения этой задачи в работе [1] предложен метод вейвлет-вейглет-разложения, который позволяет учитывать различные локальные особенности изображений. Выбирается так называемая масштабирующая функция $\phi(x)$ и соответствующая вейвлет-функция $\psi(x)$, с помощью которых строится двумерный ортонормированный базис

$$\left.\begin{aligned}
\psi^{[1]}_{j,k_1,k_2}(x,y) &= 2^j \phi\left(2^j x - k_1\right) \psi\left(2^j y - k_2\right);\\
\psi^{[2]}_{j,k_1,k_2}(x,y) &= 2^j \psi\left(2^j x - k_1\right) \phi\left(2^j y - k_2\right);\\
\psi^{[3]}_{j,k_1,k_2}(x,y) &= 2^j \psi\left(2^j x - k_1\right) \psi\left(2^j y - k_2\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $j, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Индекс j в (1) называется масштабом, а индексы k_1 и k_2 — сдвигами. Для построения базиса функции ϕ и ψ должны удовлетворять определенным условиям [8], однако класс допустимых функций достаточно широк, и можно обеспечить выполнение необходимых требований: заданное число непрерывных производных, определенное число нулевых моментов у ψ и достаточно

быстрое убывание функций ϕ и ψ на бесконечности. Всюду далее предполагается, что ϕ и ψ удовлетворяют всем необходимым требованиям.

Вейвлет-разложение функции f имеет вид:

$$f = \sum_{\lambda,j,k_1,k_2} \left\langle f, \psi^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2} \right\rangle \psi^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}. \tag{2}$$

Метод реконструкции f заключается в замене коэффициентов в (2) на величины, выражающиеся через Rf, а не через f. Пусть

$$\xi^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2} = \frac{1}{4\pi}\mathrm{Ri}[R\psi^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}],$$

где оператор Рисса Ri определяется соотношением

$$\widehat{\mathrm{Ri}[g]}(\omega) = |w|\widehat{g}(\omega).$$

При достаточной гладкости ϕ и ψ последовательность $\{2^{-j/2}\xi^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}\}$ образует устойчивый базис [2]. При этом $\langle f, \psi^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}\rangle = \langle Rf, \xi^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}\rangle$. Функции $2^{-j/2}\xi^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}$ называются вейглетами, и формула обращения, лежащая в основе метода вейвлет-вейглет-разложения, выглядит следующим образом:

$$f = \sum_{\lambda,j,k_1,k_2} \left\langle Rf, \xi^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2} \right\rangle \psi^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}.$$

3 Модель проекционных данных

На практике наблюдения представляют собой отсчеты функции на некотором конечном носителе. Кроме того, наблюдения содержат шум, вызванный фоновым излучением, помехами оборудования и другими причинами. Без ограничения общности будем считать, что проекционные данные измеряются при $(s,\theta) \in \in [-1,1]\times[0,\pi]$, и рассмотрим следующую модель:

$$X_{i,l} = (Rf)_{i,l} + \zeta_{i,l}, \qquad i = \overline{1,n}\,,\ \ l = \overline{1,n}\,,$$

где R — оператор Радона; f — искомая функция изображения; $\zeta_{i,l} \sim N(0,\sigma^2)$ и независимы в совокупности. Для применения вейвлет-разложения необходимо, чтобы число наблюдений было некоторой степенью двойки. Если это не так, то недостающие данные каким-либо образом дополняются. В связи с этим далее будем предполагать, что $n = 2^J$ для некоторого $J > 0$.

Переход к дискретному аналогу вейвлет-вейглет-разложения фактически представляет собой некоторое матричное преобразование [1], в результате которого получается следующая модель дискретных коэффициентов [9]:

$$Z^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2} = \nu^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2} + \zeta^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}, \tag{3}$$

где $\nu^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2} = 2^J \langle Rf, \xi^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2} \rangle$, а $\zeta^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}$ уже перестают быть независимыми и имеют нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2_{\lambda,j} = \sigma^2_\lambda 2^j$ (величины σ^2_λ ($\lambda = 1, 2, 3$) зависят от выбранного вейвлет-базиса).

Для упрощения записи далее наряду с (3) будем рассматривать нормированную модель

$$Y^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2} = \frac{Z^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}}{\sigma_\lambda \cdot 2^{j/2}} = \frac{\nu^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}}{\sigma_\lambda \cdot 2^{j/2}} + \frac{\zeta^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}}{\sigma_\lambda \cdot 2^{j/2}} = \mu^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2} + z^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}, \tag{4}$$

где $\mu^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2} = (\sigma_\lambda \cdot 2^{j/2})^{-1} \cdot 2^J \langle f, \psi^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2} \rangle$; $z^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2} \sim N(0,1)$.

4 Пороговая обработка

Чтобы подавить шум и восстановить «очищенное» изображение, к коэффициентам в (4) обычно применяется пороговая обработка с функцией $\rho_H(y,T) = y\mathbf{1}(|y| > T)$ (жесткая пороговая обработка) или $\rho_S(y,T) = \mathbf{sgn}(y)\,(|y| - T)_+$ (мягкая пороговая обработка) и некоторым порогом T. Смысл такой процедуры заключается в обнулении достаточно малых коэффициентов, которые интерпретируются как шум. Каждая из этих функций имеет свои недостатки: функция ρ_H разрывна, что приводит к потере устойчивости, а ρ_S искажает все коэффициенты, вызывая дополнительное смещение. В ряде работ предложены альтернативные функции пороговой обработки $\rho(y,T)$, представляющие собой компромисс между жесткой и мягкой пороговой обработкой [10–21]. Эти функции непрерывны, как и функция $\rho_S(y,T)$, но при этом $\rho(y,T) \to y$ при $|y| \to \infty$, т. е. для больших абсолютных значений коэффициентов они похожи на функцию жесткой пороговой обработки.

В связи с появлением разнообразных видов функций пороговой обработки имеет смысл рассмотреть некоторый общий класс таких функций. Пусть функция $h(y,T)$ обладает следующими свойствами:

(1) $h(-y,T) = -h(y,T)$ (нечетность);

(2) $0 \le h(y,T) \le T$ при $y \ge 0$ (ограниченность);

(3) $h(T,T) = T$ (непрерывность пороговой функции).

Тогда функция пороговой обработки определяется выражением

$$\rho_h(y,T) = \begin{cases} y - h(y,T) & \text{при } |y| > T; \\ 0 & \text{при } |y| \le T. \end{cases}$$

Такой вид имеют, например, функции мягкой и гибридной пороговой обработки [13, 20], функция пороговой обработки на основе гиперболического тангенса [19], сигмоидная функция [21] и некоторые другие.

5 Погрешность пороговой обработки

Одним из ключевых вопросов становится выбор порогового значения T. Пороговое значение должно быть таким, чтобы сделать погрешность используемого метода минимальной. Для оценивания погрешности в методах пороговой обработки обычно рассматривается среднеквадратичный риск

$$R_J(T) = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} \sum_{\lambda=1}^{3} \sigma_\lambda^2 \cdot 2^j \mathsf{E} \left(\rho_h \left(Y_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]}, T_j \right) - \mu_{j,k_1,k_2}^{[\lambda]} \right)^2. \qquad (5)$$

В связи с наличием множителей 2^j, оказывающих влияние на величину риска на каждом масштабе, порог T_j обычно выбирается отдельно для каждого j. Таким образом, далее вместо единого порога будем использовать вектор порогов $T = (T_0, \ldots, T_{J-1})$. Обозначим через $T_{\min}$ теоретический «идеальный» вектор порогов, минимизирующий (5):

$$R_J(T_{\min}) = \min_{T_j > 0,\ j=0,\ldots,J-1} R_J(T).$$

Для $R_J(T_{\min})$ справедлива следующая оценка сверху.

Теорема 1. *Пусть f равномерно регулярна по Липшицу с показателем $\gamma > 0$, тогда*

$$R_J(T_{\min}) \le C \cdot 2^{(6/(2\gamma+3))J} J^{(2\gamma+6)(2\gamma+3)},$$

при этом нижней границей для $T_{\min,j}$ служит величина

$$T_j^* = \sqrt{\frac{12\gamma+6}{2\gamma+3} \ln 2^j} - \frac{2\gamma+9}{4\gamma+6} \sqrt{\frac{2\gamma+3}{8\gamma+4\gamma+6}} \frac{\ln\ln 2^j}{\sqrt{\ln 2^j}}.$$

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству соответствующего утверждения в работе [22].

6 Оценка риска

Заметим, что «разумное» пороговое значение должно увеличиваться с ростом J [8]. При этом в определенном смысле максимальным среди «разумных порогов» [23, 24] оказывается так называемый универсальный порог, который в данном случае имеет вид $T_{U,j} = \sqrt{6 \ln 2^j}$ [25]. Поскольку среднеквадратичный риск (5) в явном виде зависит от ненаблюдаемых значений $\mu^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}$, вычислить его на практике нельзя, а значит, нельзя найти и вектор $R_J(T_{\min})$. Поэтому для вычисления порогового значения решается задача минимизации статистической оценки риска (5), построенной по методу Стейна [26]. Если $h(y,T)$ дифференцируема по переменной y, то справедливо соотношение:

$$\mathsf{E}\left(\rho_h\left(Y^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}, T_j\right) - \mu^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}\right)^2 = 1 + \mathsf{E}g^2\left(Y^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}\right) - 2\,\mathsf{E}g'\left(Y^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}\right),$$

где

$$g\left(Y^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}\right) = Y^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2} - \rho_h\left(Y^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}, T_j\right).$$

Таким образом, в качестве несмещенной оценки риска можно использовать следующую величину:

$$\hat{R}_J(T) = \sum_{j=0}^{J-1}\sum_{k_1=0}^{2^j-1}\sum_{k_2=0}^{2^j-1}\sum_{\lambda=1}^{3}\sigma^2_{\lambda,\varkappa}\cdot 2^j F\left(Y^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}, T_j\right), \tag{6}$$

где

$$F(y,T_j) = \begin{cases} y^2 - 1, & |y| \le T_j; \\ h^2(y,T_j) + 1 - 2h'_y(y,T_j), & |y| > T_j. \end{cases}$$

Вектор порогов, минимизирующий оценку (6), обозначим через T_S:

$$\hat{R}_J(T_S) = \min_{T_j\in[0,T_{U,j}],\ j=\overline{0,J-1}} \hat{R}_J(T).$$

Этот вектор имитирует теоретический «идеальный» вектор порогов $T_{\min}$.

Пусть функция f равномерно регулярна по Липшицу с показателем $\gamma > 0$. Обозначим

$$j^{**} \approx \frac{2}{2\gamma+3}\,J + c^{**}\log_2 J,$$

где $c^{**} > 1/(2\gamma+3)$ — некоторое положительное число. При выборе достаточно гладкой вейвлет-функции начиная с j^{**} значения $\mu^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}$ не влияют на порядок риска [27]. В данной работе предполагается, что выбранная вейвлет-функция удовлетворяет всем необходимым требованиям. В частности, для справедливости всех утверждений можно выбрать вейвлет-функцию Мейера с достаточным числом непрерывных производных [8].

Следующее утверждение, доказательство которого аналогично доказательству леммы 3 из работы [22] и теоремы 2 из работы [28], устанавливает нижнюю границу для компонент вектора T_S при $j > j^{**}$.

Теорема 2. *Пусть f равномерно регулярна по Липшицу с показателем $\gamma > 0$. Пусть для некоторых положительных констант b и C*

$$\left|h'_y(y,T)\right| \le CT^b, \ \left|h'_T(y,T)\right| \le CT^b, \ \left|h''_{yT}(y,T)\right| \le CT^b, \ \forall y \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Тогда для $T_{2,j} = \sigma\sqrt{(3u/2)\ln 2^j}$ при произвольном $0 < u < \min\{2, (2/3)(12\gamma+6)/(2\gamma+3)\}$

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{j=j^{**}}^{J-1}\{T_{S,j} \in [0, T_{2,j}]\}\right) \le cJ\cdot 2^{2J}\exp\left\{-C\frac{2^{(2\theta-u)j^{**}}}{J^{\max\{3,b+1\}}}\right\},$$

где θ можно выбрать произвольно из интервала $(u/2, 1)$.

7 Асимптотические свойства оценки риска

Покажем, что оценка (6) асимптотически нормальна.

Теорема 3. *Пусть f равномерно регулярна по Липшицу с показателем $\gamma > 0$ и $h(y,T)$ удовлетворяет условиям (7). Тогда*

$$\mathsf{P}\left(\frac{\hat{R}_J(T_S) - R_J(T_{\min})}{C_\lambda\cdot 2^{2J}} < x\right) \to \Phi(x) \ \text{ при } J\to\infty,$$

где константа C_λ зависит от выбранной вейвлет-функции.

Доказательство: Запишем

$$\hat{R}_J(T_S) - R_J(T_{\min}) = \hat{R}_J(T_S) - \hat{R}_J(T_{\min}) + \hat{R}_J(T_{\min}) - R_J(T_{\min}) = \\ = U(T_S) + \hat{R}_J(T_{\min}) - R_J(T_{\min}),$$

где

$$U(T) = \sum_{j=0}^{J-1} U_j(T_j);$$

$$U_j(T_j) = \hat{R}_{J,j}(T_j) - \hat{R}_{J,j}(T_{\min,j}) = \\ = \sigma_\lambda^2 2^j \sum_{k_1=0}^{2^j-1}\sum_{k_2=0}^{2^j-1}\sum_{\lambda=1}^{3}\left(F(Y^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}, T_j) - F\left(Y^{[\lambda]}_{j,k_1,k_2}, T_{\min,j}\right)\right).$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3 в работе [28], можно убедиться, что

$$\frac{\hat{R}_J(T_{\min}) - R_J(T_{\min})}{C_\lambda 2^{2J}} \Longrightarrow N(0,1), \quad J \to \infty. \tag{8}$$

Покажем, что

$$\frac{U(T_S)}{2^{2J}} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0. \tag{9}$$

Запишем

$$U(T_S) = \sum_{j=0}^{j^{**}-1} U_j\left(T_{S,j}\right) + \sum_{j=j^{**}}^{J-1} U_j\left(T_{S,j}\right) \equiv S_1 + S_2.$$

Число слагаемых в S_1 равно $2^{j^{**}}$, и в силу условий (7) справедлива оценка $|F(Y_{j,k}, T_{S,j})| < Cj^{\max\{2,b\}}$. Следовательно,

$$|S_1| \le CJ^{c'} \cdot 2^{(6/(2\gamma+3))J},$$

где c' — некоторая положительная константа. Таким образом,

$$\frac{|S_1|}{2^{2J}} \to 0 \ \text{ п. в.}$$

Обозначим $T_{2,j} = \sigma\sqrt{v \ln 2^j}$, где $2 < v < \min\{3, (12\gamma+6)/(2\gamma+3)\}$. Для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\frac{|S_2)|}{2^{2J}} > \varepsilon\right) = \mathsf{P}\left(\frac{\left|\sum_{j=j^{**}}^{J-1} U_j(T_{S,j})\right|}{2^{2J}} > \varepsilon\right) \le \sum_{j=j^{**}}^{J-1} \mathsf{P}\left(\frac{|U_j(T_{S,j})|}{2^{2J}} > \varepsilon C\right) \le$$

$$\le \sum_{j=j^{**}}^{J-1} \mathsf{P}\left(T_{S,j} \in [0, T_{2,j}]\right) + \sum_{j=j^{**}}^{J-1} \mathsf{P}\left(\frac{\sup_{T\in[T_{2,j},T_{U,j}]} |U_j(T) - \mathsf{E}U_j(T)|}{2^{2j}} > \frac{\varepsilon C}{2}\right) +$$

$$+ \sum_{j=j^{**}}^{J-1} \mathsf{P}\left(\frac{\sup_{T\in[T_{2,j},T_{U,j}]} |\mathsf{E}U_j(T)|}{2^{2j}} > \frac{\varepsilon C}{2}\right). \tag{10}$$

В силу теоремы 2 первая сумма стремится к нулю. Далее, повторяя рассуждения из работ [22, 28], можно убедиться, что при произвольном выборе $1/2 < \theta < 1$

$$\sum_{j=j^{**}}^{J-1} \mathsf{P}\left(\frac{\sup_{T\in[T_{2,j},T_{U,j}]}|U_j(T)-\mathsf{E}U_j(T)|}{2^{2j}}>\frac{\varepsilon C}{2}\right)\le$$

$$\le c\sum_{j=j^{**}}^{J-1}2^{2j}\exp\left\{-C\frac{2^{(2\theta-1)j}}{j^{\max\{1,b/2\}}}\right\}\le cJ\cdot 2^{2J}\exp\left\{-C\frac{2^{(2\theta-1)j^{**}}}{J^{\max\{1,b/2\}}}\right\}.$$

Наконец, при $j\to\infty$

$$\frac{\sup_{T\in[T_{2,j},T_{U,j}]}|\mathsf{E}U_j(T)|}{2^{2j}}\le C\cdot 2^{(1/2-v/2)j}j^{\max\{1/2,(b-1)/2\}}\to 0\,,$$

и начиная с некоторого J все слагаемые в третьей сумме в (10) становятся равными нулю.

Таким образом, справедливо (9), что вместе с (8) завершает доказательство теоремы.

Следующая теорема устанавливает свойство сильной состоятельности оценки (6).

Теорема 4. *Пусть $\gamma>0$ и функция $h(y,T)$ удовлетворяет условиям* (7). *Тогда*

$$\frac{\hat R_J(T_S)-R_J(T_{\min})}{2^{(2+\delta)J}}\to 0\quad\text{п. в. при } J\to\infty$$

при любом $\delta>0$.

Доказательство. Как в теореме 3, обозначим

$$U(T)=\sum_{j=0}^{J-1}U_j(T_j),\quad U_j(T_j)=\hat R_{J,j}(T_j)-\hat R_{J,j}(T_{\min,j})$$

и запишем

$$\hat R_J(T_S)-R_J(T_{\min})=U(T_S)+\hat R_J(T_{\min})-R_J(T_{\min}),$$
$$U(T_S)=\sum_{j=0}^{j^{**}-1}U_j(T_{S,j})+\sum_{j=j^{**}}^{J-1}U_j(T_{S,j})\equiv S_1+S_2.$$

Из предыдущей теоремы следует, что

$$\frac{|S_1|}{2^{(2+\delta)J}}\to 0\ \text{ п. в.}$$

Пусть $2-2\delta<u<2$. Для произвольного $\varepsilon>0$

$$\mathsf{P}\left(\frac{|S_2)|}{2^{(2+\delta)J}}>\varepsilon\right)=\mathsf{P}\left(\frac{\left|\sum_{j=j^{**}}^{J-1}U_j(T_{S,j})\right|}{2^{(2+\delta)J}}>\varepsilon\right)\le$$

$$\le\sum_{j=j^{**}}^{J-1}\mathsf{P}\left(\frac{|U_j(T_{S,j})|}{2^{(2+\delta)j}}>\varepsilon C\right)\le\sum_{j=j^{**}}^{J-1}\mathsf{P}\left(T_{S,j}\in[0,T_{1,j}]\right)+$$

$$+\sum_{j=j^{**}}^{J-1}\mathsf{P}\left(\frac{\sup_{T\in[T_{1,j},T_{U,j}]}|U_j(T)-\mathsf{E}U_j(T)|}{2^{(2+\delta)j}}>\frac{\varepsilon C}{2}\right)+$$

$$+\sum_{j=j^{**}}^{J-1}\mathsf{P}\left(\frac{\sup_{T\in[T_{1,j},T_{U,j}]}|\mathsf{E}U_j(T)|}{2^{(2+\delta)j}}>\frac{\varepsilon C}{2}\right)\equiv p_J+q_J+r_J.$$

Для p_J справедлива оценка из теоремы 2. Далее, повторяя рассуждения из работ [22, 28], можно убедиться, что при произвольном выборе $1/2<\theta<1$

$$q_J\le cJ\cdot 2^{2J}\exp\left\{-C\frac{2^{(\delta+2\theta-1)j^{**}}}{J^{\max\{1,b/2\}}}\right\}$$

и при $j\to\infty$

$$\frac{\sup_{T\in[T_{1,j},T_{U,j}]}|\mathsf{E}U_j(T)|}{2^{(2+\delta)j}}\le C\cdot 2^{(1/2-u/2-\delta)j}\,j^{\max\{1/2,(b-1)/2\}}\to 0\,,$$

т. е. начиная с некоторого J все слагаемые в r_J становятся равными нулю.

Таким образом,

$$\sum_{J=1}^{\infty}(p_J+q_J+r_J)<\infty$$

и

$$\frac{|S_2|}{2^{(2+\delta)J}}\to 0\ \text{ п. в.}$$

в силу леммы Бореля–Кантелли.

Рассуждая аналогично, можно показать, что

$$\frac{\hat{R}_J(T_{\min})-R_J(T_{\min})}{2^{(2+\delta)J}}\to 0\ \text{ п. в.}$$

Теорема доказана.

8 Заключение

В данной работе рассматривается модель томографических данных, загрязненных аддитивным гауссовым шумом, и обсуждается задача реконструкции томографических изображений с помощью методов пороговой обработки с пороговыми функциями, принадлежащими некоторому специальному классу. Выбор конкретного вида пороговой функции для практического использования зависит от приложений и объема доступных данных. Настройка дополнительных параметров пороговой обработки повышает их производительность в некоторых конкретных ситуациях. В дальнейшем предполагается обобщить рассматриваемую модель и учесть наличие зависимости в шумовой составляющей регистрируемых данных.

Литература

1. *Donoho D.* Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition // Appl. Comput. Harmon. A., 1995. Vol. 2. P. 101–126. doi: 10.1006/acha.1995.1008.
2. *Lee N.* Wavelet-vaguelette decompositions and homogenous equations: PhD Thesis. — West Lafayette, IN, USA: Purdue University, 1997. 93 p.
3. *Abramovich F., Silverman B. W.* Wavelet decomposition approaches to statistical inverse problems // Biometrika, 1998. Vol. 85. No. 1. P. 115–129. doi: 10.1093/biomet/85.1.115.
4. *Маркин А. В., Шестаков О. В.* Асимптотики оценки риска при пороговой обработке вейвлет-вейглет коэффициентов в задаче томографии // Информатика и её применения, 2010. Т. 4. Вып. 2. С. 36–45. EDN: MRMSWX.
5. *Шестаков О. В., Степанов Е. П.* Нелинейная регуляризация обращения линейных однородных операторов с помощью метода блочной пороговой обработки // Информатика и её применения, 2023. Т. 17. Вып. 4. С. 2–8. doi: 10.14357/19922264230401. EDN: PGKKYE.
6. *Шестаков О. В.* Решение обратных статистических задач с помощью методов пороговой обработки, допускающих построение несмещенной оценки среднеквадратичного риска // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 1. С. 74–81. doi: 10.14357/19922264250110. EDN: ZSIBDL.
7. *Шестаков О. В.* Несмещенная оценка риска при решении обратных статистических задач с помощью пороговой обработки с двумя пороговыми значениями // Информатика и её применения, 2025. Т. 19. Вып. 2. С. 9–16. doi: 10.14357/19922264250202. EDN: XILHGE.
8. *Mallat S.* A wavelet tour of signal processing. — New York, NY, USA: Academic Press, 1999. 857 с.
9. *Захарова Т. В., Шестаков О. В.* Теория вейвлетов и ее применение в обработке сигналов. — 3-е изд. — М.: МастерПринт, 2024. 180 с.
10. *Gao H.-Y., Bruce A. G.* Waveshrink with firm shrinkage // Stat. Sinica, 1997. Vol. 7. P. 855–874.

11. *Gao H.-Y.* Wavelet shrinkage denoising using the non-negative garrote // J. Comput. Graph. Stat., 1998. Vol. 7. No. 4. P. 469–488.
12. *Fan J., Li R.* Variable selection via nonconcave penalized likelihood and its oracle properties // J. Am. Stat. Assoc., 2001. Vol. 96. No. 456. P. 1348–1360. doi: 10.1198/016214501753382273.
13. *Chmelka L., Kozumplik J.* Wavelet-based wiener filter for electrocardiogram signal denoising // Comput. Cardiol., 2005. Vol. 32. P. 771–774. doi: 10.1109/CIC.2005.1588218.
14. *Poornachandra S., Kumaravel N., Saravanan T. K., Somaskandan R.* WaveShrink using modified hyper-shrinkage function // 27th Annual Conference (International) of the Engineering in Medicine and Biology Society Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2005. P. 30–32. doi: 10.1109/IEMBS.2005.1616334.
15. *Lin Y., Cai J.* A new threshold function for signal denoising based on wavelet transform // Conference (International) on Measuring Technology and Mechatronics Automation Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2010. P. 200–203. doi: 10.1109/ICMTMA.2010.347.
16. *Huang H.-C., Lee T. C. M.* Stabilized thresholding with generalized sure for image denoising // Conference (International) on Image Processing Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2010. P. 1881–1884. doi: 10.1109/ICIP.2010.5652353.
17. *Hussain S. A., Gorashi S. M.* Image denoising based on spatial/wavelet filter using hybrid thresholding function // Int. J. Computer Applications, 2012. Vol. 42. P. 5–13. doi: 10.5120/5751-7960.
18. *Zhao R.-M., Cui H.-M.* Improved threshold denoising method based on wavelet transform // 7th Conference (International) on Modelling, Identification and Control Proceedings. — Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2015. Art. 7409352. 4 p. doi: 10.1109/ICMIC.2015.7409352.
19. *He C., Xing J., Li J., Yang Q., Wang R.* A new wavelet thresholding function based on hyperbolic tangent function // Math. Probl. Eng., 2015. Vol. 2015. Art. 528656. 10 p. doi: 10.1155/2015/528656.
20. *Priya K. D., Rao G. S., Rao P. S.* Comparative analysis of wavelet thresholding techniques with wavelet-Wiener filter on ECG signal // Procedia Comput. Sci., 2016. Vol. 87. P. 178–183. doi: 10.1016/j.procs.2016.05.145.
21. *He H., Tan Y.* A novel adaptive wavelet thresholding with identical correlation shrinkage function for ECG noise removal // Chinese J. Electron., 2018. Vol. 27. No. 3. P. 507–513. doi: 10.1049/cje.2018.02.006.
22. *Kudryavtsev A. A., Shestakov O. V.* Properties of the SURE estimates when using continuous thresholding functions for wavelet shrinkage // Mathematics, 2024. Vol. 12. No. 23. Art. 3646. doi: 10.3390/math12233646. EDN: AETFBD.
23. *Donoho D., Johnstone I. M.* Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage // J. Am. Stat. Assoc., 1995. Vol. 90. P. 1200–1224. doi: 10.1080/01621459.1995.10476626.
24. *Marron J. S., Adak S., Johnstone I. M., Neumann M. H., Patil P.* Exact risk analysis of wavelet regression // J. Comput. Graph. Stat., 1998. Vol. 7. P. 278–309. doi: 10.1080/10618600.1998.10474777.
25. *Johnstone I. M.* Wavelet shrinkage for correlated data and inverse problems: Adaptivity results // Stat. Sinica, 1999. Vol. 9. No. 1. P. 51–83.

26. *Stein C.* Estimation of the mean of a multivariate normal distribution // Ann. Stat., 1981. Vol. 9. No. 6. P. 1135–1151. doi: 10.1214/aos/1176345632.

27. *Ерошенко А. А., Шестаков О. В.* Асимптотические свойства оценки риска в задаче восстановления изображения с коррелированным шумом при обращении преобразования Радона // Информатика и её применения, 2014. Т. 8. Вып. 4. С. 32–40. doi: 10.14357/19922264140404. EDN: TFYRKT.

28. *Kudryavtsev A. A., Shestakov O. V.* The generalized sure estimate for threshold processing when solving inverse statistical problems // Lobachevskii J. Mathematics, 2025. Vol. 46. No. 9. P. 4898–4907. doi: 10.1134/S1995080225609476. EDN: TTMUCY.

Поступила в редакцию 01.07.2026
Принята к публикации 15.09.2026

RISK ESTIMATION IN THE PROBLEM OF RADON TRANSFORM INVERSION USING CONTINUOUS THRESHOLD FUNCTIONS

***A. A. Kudryavtsev*[1,2] *and O. V. Shestakov*[1,2,3]**

[1]Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

[2]Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

[3]Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: Wavelet analysis methods are widely used to solve tomographic image reconstruction problems in medicine, biology, astronomy, and other fields. Their appeal lies in the speed of the algorithms, adaptability to image features, and the ability to reconstruct local image regions from incomplete projection data. This is particularly important for medical applications where it is undesirable to expose a patient to an unnecessary radiation dose. Error analysis of these methods is an important practical task as it allows one to evaluate the quality of both the methods themselves and the equipment used. This paper considers the problem of image function reconstruction using the Radon operator inversion. The asymptotic properties of the risk estimate are investigated under thresholding of the coefficients of the wavelet-vaguelette decomposition of the image function. Conditions are presented under which the asymptotic normality and strong consistency of the unbiased risk estimate hold.

Keywords: Radon transform; wavelet-vaguelette decomposition; thresholding; risk estimate

DOI: 0.14357/08696527260305 **EDN:** BDPUOD

Acknowledgments

The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under Agreement No. 075-15-2025-345.

References

1. Donoho, D. 1995. Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition. *Appl. Comput. Harmon. A.* 2(2):101–126. doi: 10.1006/acha.1995.1008.
2. Lee, N. 1997. Wavelet-vaguelette decompositions and homogeneous equations. West Lafayette, IN: Purdue University. PhD Thesis. 93 p.
3. Abramovich, F., and B. W. Silverman. 1998. Wavelet decomposition approaches to statistical inverse problems. *Biometrika* 85(1):115–129. doi: 10.1093/biomet/85.1.115.
4. Markin, A. V., and O. V. Shestakov. 2010. Asimptotiki otsenki riska pri porogovoy obrabotke veyvlet-veyglet koeffitsientov v zadache tomografii [Asymptotic properties of risk estimate of wavelet-vaguelette coefficients thresholding in tomographic reconstruction problem]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 4(2):36–45. EDN: MRMSWX.
5. Shestakov, O. V., and E. P. Stepanov. 2023. Nelineynaya regulyarizatsiya obrashcheniya lineynykh odnorodnykh operatorov s pomoshch'yu metoda blochnoy porogovoy obrabotki [Nonlinear regularization of the inversion of linear homogeneous operators using the block thresholding method]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 17(4):2–8. doi: 10.14357/19922264230401. EDN: PGKKYE.
6. Shestakov, O. V. 2025. Reshenie obratnykh statisticheskikh zadach s pomoshch'yu metodov porogovoy obrabotki, dopuskayushchikh postroenie nesmeshchennoy otsenki srednekvadratichnogo riska [Solving inverse statistical problems using threshold processing methods that allow the construction of an unbiased estimate of the mean-square risk]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(1):74–81. doi: 10.14357/19922264250110. EDN: ZSIBDL.
7. Shestakov, O. V. 2025. Nesmeshchennaya otsenka riska pri reshenii obratnykh statisticheskikh zadach s pomoshch'yu porogovoy obrabotki s dvumya porogovymi znacheniyami [Unbiased risk estimate for the firm shrinkage method of solving linear inverse problems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 19(2):9–16. doi: 10.14357/19922264250202. EDN: XILHGE.
8. Mallat, S. 1999. *A wavelet tour of signal processing*. New York, NY: Academic Press. 857 p.
9. Zakharova, T. V., and O. V. Shestakov. 2024. *Teoriya veyvletov i ee primenenie v obrabotke signalov* [Wavelet theory and its application in signal processing]. 3rd ed. Moscow: MasterPrint. 180 p.
10. Gao, H.-Y., and A. G. Bruce. 1997. WaveShrink with firm shrinkage. *Stat. Sinica* 7:855–874.
11. Gao, H.-Y. 1998. Wavelet shrinkage denoising using the non-negative garrote. *J. Comput. Graph. Stat.* 7(4):469–488. doi: 10.1080/10618600.1998.10474789.

12. Fan, J., and R. Li. 2001. Variable selection via nonconcave penalized likelihood and its oracle properties. *J. Am. Stat. Assoc.* 96(456):1348–1360. doi: 10.1198/016214501753382273.
13. Chmelka, L., and J. Kozumplik. 2005. Wavelet-based Wiener filter for electrocardiogram signal denoising. *Comput. Cardiol.* 32:771–774. doi: 10.1109/CIC.2005.1588218.
14. Poornachandra, S., N. Kumaravel, T. K. Saravanan, and R. Somaskandan. 2005. WaveShrink using modified hyper-shrinkage function. *27th Annual Conference (International) of the Engineering in Medicine and Biology Society Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 30–32. doi: 10.1109/IEMBS.2005.1616334.
15. Lin, Y., and J. Cai. 2010. A new threshold function for signal denoising based on wavelet transform. *Conference (International) on Measuring Technology and Mechatronics Automation Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 200–203. doi: 10.1109/ICMTMA.2010.347.
16. Huang, H.-C., and T. C. M. Lee. 2010. Stabilized thresholding with generalized sure for image denoising. *17th Conference (International) on Image Processing Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. 1881–1884. doi: 10.1109/ICIP.2010.5652353.
17. Hussain, S. A., and S. M. Gorashi. 2012. Image denoising based on spatial/wavelet filter using hybrid thresholding function. *Int. J. Computer Applications* 42(13):5–13. doi: 10.5120/5751-7960.
18. Zhao, R.-M., and H.-M. Cui. 2015. Improved threshold denoising method based on wavelet transform. *7th Conference (International) on Modelling, Identification and Control Proceedings*. Piscataway, NJ: IEEE. Art. 7409352. 4 p. doi: 10.1109/ICMIC.2015.7409352.
19. He, C., J. Xing, J. Li, Q. Yang, and R. Wang. 2015. A new wavelet thresholding function based on hyperbolic tangent function. *Math. Probl. Eng.* 2015:528656. 10 p. doi: 10.1155/2015/528656.
20. Priya, K. D., G. S. Rao, and P. S. Rao. 2016. Comparative analysis of wavelet thresholding techniques with wavelet-Wiener filter on ECG signal. *Procedia Comput. Sci.* 87:178–183. doi: 10.1016/j.procs.2016.05.145.
21. He, H., and Y. Tan. 2018. A novel adaptive wavelet thresholding with identical correlation shrinkage function for ECG noise removal. *Chinese J. Electron.* 27(3):507–513. doi: 10.1049/cje.2018.02.006.
22. Kudryavtsev, A. A., and O. V. Shestakov. 2024. Properties of the SURE estimates when using continuous thresholding functions for wavelet shrinkage. *Mathematics* 12(23):3646. 14 p. doi: 10.3390/math12233646. EDN: AETFBD.
23. Donoho, D., and I. M. Johnstone. 1995. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *J. Am. Stat. Assoc.* 90:1200–1224. doi: 10.1080/01621459.1995.10476626.
24. Marron, J. S., S. Adak, I. M. Johnstone, M. H. Neumann, and P. Patil. 1998. Exact risk analysis of wavelet regression. *J. Comput. Graph. Stat.* 7(3):278–309. doi: 10.1080/10618600.1998.10474777.
25. Johnstone, I. M. 1999. Wavelet shrinkage for correlated data and inverse problems adaptivity results. *Stat. Sinica* 9:51–83.
26. Stein, C. 1981. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *Ann. Stat.* 9(6):1135–1151. doi: 10.1214/aos/1176345632.

27. Eroshenko, A. A., and O. V. Shestakov. 2014. Asimptoticheskie svoystva otsenki riska v zadache vosstanovleniya izobrazheniya s korrelirovannym shumom pri obrashchenii preobrazovaniya Radona [Asymptotic properties of risk estimate in the problem of reconstructing images with correlated noise by inverting the Radon transform]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 8(4):32–40. doi: 10.14357/19922264140404. EDN: TFYRKT.
28. Kudryavtsev, A. A., and O. V. Shestakov. 2025. The generalized sure estimate for threshold processing when solving inverse statistical problems. *Lobachevskii J. Mathematics* 46(9):4898–4907. doi: 10.1134/S1995080225609476. EDN: TTMUCY.

Received July 1, 2026
Accepted September 15, 2026

Contributors

Kudryavtsev Alexey A. (b. 1978) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, associate professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; senior scientist, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; aakudryavtsev@cs.msu.ru

Shestakov Oleg V. (b. 1976) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; senior scientist, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; leading scientist, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; oshestakov@cs.msu.su

СИСТЕМЫ И СРЕДСТВА ИНФОРМАТИКИ, 2026. Т. 36. № 3. С. 102–127

КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ РАСТРЕСКИВАНИЯ В ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ ПО ДАННЫМ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ*

***А. В. Пантелеев*[1], *Н. В. Турбин*[2], *Н. А. Тучков*[3], *Р. Л. Талья*[4], *К. В. Акчупанов*[5], *К. К. Ибришев*[6]**

Аннотация: Представлены результаты анализа растрескивания полимерного композиционного материала (ПКМ), выполненного с использованием разработанного метода определения плотности трещин по данным компьютерной томографии (КТ). Метод позволяет осуществлять автоматическое обнаружение и отслеживание микротрещин на последовательных томографических срезах. Алгоритм, лежащий в основе метода, построен на базе современных представлений в области компьютерного зрения. Исследован углепластик авиационного класса с укладкой, состоящей из 33 слоев, и схемой, представительной для основных компонентов конструкции крыла самолета, таких как несущие панели и лонжероны. Растрескивание матрицы в образцах ПКМ возникало в результате приложения циклических растягивающих нагрузок. Перед циклическим нагружением проводились квазистатические испытания на растяжение для определения предела прочности образцов. Число приложенных циклов нагрузки выбиралось опытным путем из условий сохранения целостности образца, с одной стороны, и значительного развития растрескивания матрицы в слоях — с другой. Алгоритм поиска трещин по томографическому изображению состоит из нескольких этапов, включающих определение ориентации и границ слоев по толщине, обнаружение областей с трещинами и корректировку выявленных трещин по данным, полученным в смежных слоях. Для обработки томографических изображений применены фильтры Шарра, Собеля, морфологические операции и бинаризация. В результате применения метода для исследованного ПКМ получены распределения плотности трещин в слоях, соотношения длинных и коротких

*Работа выполнена в рамках Соглашения о предоставлении из федерального бюджета гранта на проведение крупных научных проектов по приоритетным направлениям научно-технологического развития Минобрнауки России № 075-15-2024-552.

[1]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Институт «Компьютерные науки и прикладная математика», avpanteleev@inbox.ru

[2]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Институт «Передовая инженерная школа», turbinnv@mai.ru

[3]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Институт «Компьютерные науки и прикладная математика», tuchkov.nik@bk.ru

[4]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Институт «Компьютерные науки и прикладная математика», r.talya@list.ru

[5]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Институт «Авиационная техника», akchupanovkv@mai.ru

[6]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Институт «Авиационная техника», ibrishevkk@mai.ru

трещин, а также статистические характеристики полученных распределений, представляющие собой базу для анализа трещиностойкости ПКМ, необходимую для качественной обработки результатов его квалификационных испытаний.

Ключевые слова: композиционный материал; растрескивание; компьютерная томография; фильтрация; бинаризация; морфологические преобразования

DOI: 10.14357/08696527260306 **EDN:** BNHSKA

1 Введение

Эксплуатационная надежность и структурная целостность ПКМ критически зависят от их сопротивления накоплению повреждений. Среди различных механизмов повреждения растрескивание матрицы в ПКМ является наиболее частой формой нарушения сплошности материала, предшествующей более серьезной деградации, такой как расслоение и разрывы армирующих волокон [1–7]. Таким образом, внутрислойная трещиностойкость оказывается важным механическим свойством, определяющим сопротивляемость ПКМ растрескиванию. Количественной характеристикой степени поврежденности материала выступает плотность трещин — их число на единицу длины или площади слоя. На данный момент в исследовательской и инженерной практике отсутствуют стандартизованные методы определения числа трещин. Чаще применяются традиционные подходы к наблюдению за возникновением и развитием дефектов, ограничивающиеся визуальным и оптическим контролем поверхности или разрушающим исследованием поперечных шлифов. Указанные методы имеют существенный недостаток, связанный с ограниченным числом доступных для анализа поверхностей образца ПКМ. Перспективным инструментом исследования внутренней структуры конструкционных материалов является метод рентгеновской КТ. Особенности получения томографических изображений и анализа точности результатов сканирования детально рассмотрены в [8, 9]. В качестве основного инструмента в них используются алгебраические методы восстановления трехмерных изображений объекта исследования (томографической реконструкции). В отличие от работ [8, 9], в данной статье исследуются изображения (сканы) слоистых композиционных материалов на основе алгоритмов компьютерного зрения.

В работах [10–15] исследователи успешно применяли объемный анализ данных рентгеновской КТ для количественной оценки растрескивания, возникающего при циклической нагрузке. Однако количественная оценка степени растрескивания ПКМ по томограмме при помощи типовой сегментации затруднительна в связи с невозможностью классификации дефектов типа «трещина» и «по́ра», идентичных по рентгеновской плотности. На томографических изображениях высокого разрешения можно идентифицировать трещины в матрице ПКМ и по́ры невооруженным глазом с последующей классификацией, однако при большом объеме результатов естественно возникает необходимость в автоматизации процедуры обработки результатов томографии. В данном исследовании применяется

рентгеновская КТ высокого разрешения, с помощью которой возможно фиксировать внутреннюю микроструктуру ПКМ [16–18]. В [19] предложен алгоритм и описано программное обеспечение для автоматического обнаружения трещин в слоистых композитных материалах, а в [20] — алгоритм определения монослоев на основе анализа последовательности томографических изображений. Статья посвящена объединению двух разработанных ранее алгоритмов обнаружения трещин и границ монослоев в композиционном материале с целью нахождения общего числа найденных трещин в каждом слое, числа длинных и коротких трещин в каждом слое, среднего (и нормализованного) интервала между трещинами в каждом слое, оценок плотности трещин. Алгоритм построен на основе анализа современных тенденций в области компьютерного зрения [21–25]. Полученные данные представляют базу для анализа трещиностойкости ПКМ, необходимую для проведения качественной обработки квалификационных испытаний ПКМ.

2 Образцы полимерных композиционных материалов

Исследован углепластик (ПКМ на основе углеродного волокна и полимерной матрицы) авиационного класса с укладкой, состоящей из 33 слоев, со схемой, представительной для основных компонентов конструкции крыла самолета, таких как несущие панели и лонжероны. В данной укладке использованы слои с ориентацией 0°, ±45° и 90° в соотношении 9% : 73% : 18%, где 73% соответствует суммарной доле в укладке слоев с ориентацией +45° и −45°. Образцы были изготовлены методом вакуумной инфузии (*англ.* Vacuum assisted Resin Transfer Molding, VaRTM).

3 Рентгеновская компьютерная томография

Рентгеновская КТ является методом неразрушающего контроля, позволяющим получать трехмерные изображения внутренней структуры объекта на основе анализа ослабления рентгеновского излучения при его прохождении через материал. Метод основан на регистрации серии двумерных проекций, получаемых при вращении образца, с последующей математической реконструкцией объема с помощью алгоритмов обратного проецирования, таких как алгоритм Фельдкампа–Дэвиса–Кресса (Feldkamp–Davis–Kress, FDK). Контрастность изображения определяется различиями в коэффициентах ослабления, которые зависят от плотности материала, атомного номера и энергии рентгеновского излучения — фактора, имеющего особо важное значение при исследовании композиционных материалов со схожими свойствами компонентов.

При работе с КТ необходимо учитывать влияние таких артефактов, как ужесточение пучка (*англ.* beam hardening), шумы и кольцевые артефакты, и применять соответствующие методы коррекции и калибровки. Следовательно, оптимальный выбор параметров сбора данных и реконструкции играет ключевую роль в обеспечении высокой точности и информативности результатов КТ.

Таблица 1 Настройки томографического сканирования

Параметр	Значение	Единица измерения
Напряжение	145	кВ
Сила тока	130	μА
Время экспозиции	0,7	с
Размер вокселя	0,017	мм
Геометрическое увеличение	7,89	—
Число проекций	2160	шт.

На качество получаемых томографических данных сильное влияние оказывают: напряжение, сила тока, время экспозиции, число проекций, полученных при вращении образца на 360°, а также расстояния «объект–источник» и «источник–детектор». Геометрия системы (расстояния от источника до объекта и от источника до детектора) влияет на размер вокселя, который определяет минимальный размер объекта или дефекта, различимого на реконструированных срезах или трехмерных моделях.

В исследовании использован комплекс КТ кабинетного типа Sanying nanoVoxel-4000[1], оборудованный источником рентгеновского излучения с напряжением до 300 кВ и микрофокусом, что позволяет реализовать хорошую проницаемость и высокое разрешение на достаточно крупных объектах контроля.

В табл. 1 представлены основные параметры настройки томографа.

4 Испытания

Растрескивание матрицы в образах ПКМ возникало в результате приложения циклических растягивающих нагрузок. Перед циклическим нагружением проводились квазистатические испытания на растяжение для определения предела прочности при растяжении образцов. Данные испытания выполнялись в режиме контроля перемещения в соответствии со стандартом ГОСТ 32656-2014. Среднее значение предела прочности, полученное в результате квазистатических испытаний, в дальнейшем использовалось для задания уровня циклической нагрузки.

Испытания с циклической растягивающей нагрузкой проводились согласно стандарту ГОСТ Р 5743-2016. Все эксперименты выполнялись на сервогидравлической испытательной машине, оснащенной гидравлическими клиновыми захватами для предотвращения проскальзывания и обеспечения точности приложения нагрузки. Образцы подвергались циклическому нагружению по синусоидальному закону с низкой частотой приложения нагрузки для минимизации эффектов вязкого разогрева полимерной матрицы. Циклическая нагрузка

[1] https://nevatec.ru/equipment/nastolnyiy-kompyuternyiy-tomograf-nanovoxel-1000.html; Sanying nanovoxel-4000, https://en.sypi.com/page/407.html.

прикладывалась с коэффициентом асимметрии $R = 0{,}1$. Коэффициент R равен отношению минимальной нагрузки цикла к максимальной с учетом знака. В результате выбора циклической растягивающей нагрузки образец испытывал исключительно растягивающие нагрузки, что предотвращало возникновение повреждений от сжатия. Максимальный уровень циклической нагрузки соответствовал 60% от прочности образцов на растяжение. Продолжительность испытаний определялась в 200 000 циклов нагрузки. Указанное значение выбиралось опытным путем из условий сохранения целостности образца, с одной стороны, и значительного развития растрескивания матрицы в слоях — с другой.

5 Алгоритм поиска трещин

На вход алгоритма обнаружения трещин подается последовательность полутоновых томографических сканов композита и информация об углах укладки слоев. Пример одного из изображений в последовательности, подлежащей анализу описанным методом, представлен на рис. 1. Алгоритм возвращает координаты областей, содержащих трещины, в каждом слое.

Алгоритм поиска трещин по томографическому изображению состоит из трех этапов, проиллюстрированных на примере обработки выделенной области изображения на рис. 2.

Первый этап. *Определение угла ориентации слоя для каждого скана в последовательности*. Эти данные позволяют разбить исходную последовательность на подпоследовательности, количество которых соответствует числу слоев материала. Это позволяет идентифицировать границы слоев, что способствует более точному нахождению областей, содержащих трещины, на третьем этапе алгоритма. Визуализация работы алгоритма на этом этапе показана на рис. 3.

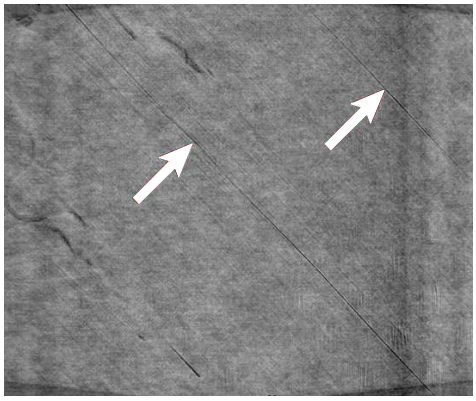


Рис. 1 Пример томографического изображения (стрелками показаны примеры трещины)

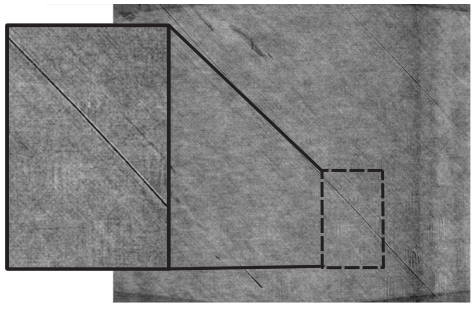
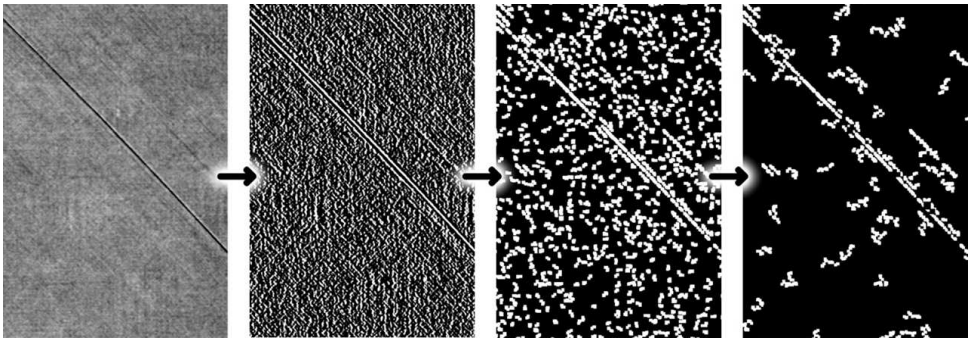


Рис. 2 Пример томографического изображения и области для иллюстрации этапов работы алгоритма поиска трещин



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 3 Первый этап алгоритма поиска трещин

Ориентация слоев определяется путем анализа шума изображения и трещин. Во-первых, алгоритм применяет к исходному изображению (рис. 3, *а*) фильтр Шарра, который достаточно чувствителен к градиентам интенсивности между соседними пикселями, чтобы выделить как высококонтрастные трещины, так и шум (рис. 3, *б*). Полученное изображение затем преобразуется в бинарную форму с использованием адаптивного порога для четкого разделения пикселей на черный фон и белые объекты (шум и трещины). Впоследствии применяются морфологические операции, такие как расширение и эрозия [21], для удаления незначительных шумовых артефактов и группировки оставшихся объектов (рис. 3, *в*). Многие из полученных белых областей имеют четкую ориентацию, которая используется для определения угла ориентации слоя (рис. 3, *г*). Эти области классифицируются по их ориентации, и для каждого класса рассчитывается взвешенная сумма, основанная на площади областей. Ориентация слоев сканирования соответствует классу с наибольшей взвешенной суммой.

Поскольку трещины значительно крупнее шумовых объектов, они вносят наибольший вклад во взвешенную сумму своего класса, эффективно определяя ориентацию слоев. Если трещины отсутствуют, угол определяется исключительно шумом. Наконец, данные об ориентации слоев, предоставленные в качестве входных данных, используются для уточнения углов, определенных алгоритмом.

Рассмотрим алгоритм реализации первого этапа по шагам. Пусть исходное изображение здесь (рис. 3, *а*) и далее (см. рис. 4, *а*) представляет собой матрицу

$$P = (P(p))_{p\in D},\ p = (p_i, p_j),\ P(p) \in \{0, 1, \ldots, 255\},$$
$$D = \{1, 2, \ldots, h\} \times \{1, 2, \ldots, w\},$$

где h — высота изображения; w — ширина; p — координаты пикселя; $P(p)$ — яркость соответствующего пикселя. Каждая операции над изображением в п. 1.1–1.3 и п. 2.1–2.5 выполняется для всех пикселей снимка, т. е. $\forall\, p \in D$.

1.1. Применяется фильтр Шарра для извлечения шумовых артефактов и трещин на снимке (см. рис. 3, *б*):

$$P^{(2)}(p) = \begin{cases} 255, & \left|P^{(\mathrm{Sh})}(p)\right| > 255\,; \\ \left|P^{(\mathrm{Sh})}(p)\right|, & \left|P^{(\mathrm{Sh})}(p)\right| \le 255\,. \end{cases}$$

Здесь $p = (p_i, p_j)$ и $q = (q_i, q_j)$ — координаты пикселя; $P^{(2)}(p)$ — результат применения фильтра Шарра; Sh — ядро свертки:

$$\mathrm{Sh} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -10 & 0 & 10 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$P^{(\mathrm{Sh})}(p) = \sum_{q_i=-1}^{1} \sum_{q_j=-1}^{1} \mathrm{Sh}_{q_i+1,q_j+1}\,, \quad P^{(\mathrm{Sh})}(p) \in [-4080, 4080]\,.$$

1.2. Применяется адаптивная бинаризация с параметрами $k^{(p)} = 7$, $\mathrm{const} = 2$ для упрощения дальнейшего анализа изображения:

$$P^{(3)}(p) = \begin{cases} 255, & P^{(2)}(p) > A_{\mathrm{th}}\,; \\ 0, & P^{(2)}(p) \le A_{\mathrm{th}}\,. \end{cases}$$

Здесь

$$A_{\mathrm{th}} = \sum_{q \in S} G_\sigma(p-q) P^{(2)}(p) - \mathrm{const}\,,$$

где

$$\sigma = 0{,}3\left(\left(k^{(p)} - 1\right) \cdot 0{,}5 - 1\right) + 0{,}8; \;\; G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right);$$

$S = [p_i - k^{(p)}, \ldots, p_i + k^{(p)}] \times [p_j - k^{(p)}, \ldots, p_j + k^{(p)}]$ — ядро, центром которого служит пиксель p; $k^{(p)}$ — размер ядра; const — константа.

1.3. Последовательно применяются морфологические операция расширения и эрозии с ядром $\mathrm{Kr} = (\mathrm{Kr}(q))_{3\times3}$, $\mathrm{Kr}\,(q_i, q_j) = 1$ для очистки изображения от излишне мелких шумовых артефактов (см. рис. 3, *в*):

$$P^{(4)}(p) = \min_{(q_i,q_j):\mathrm{Kr}\,(q_i,q_j)\neq 0} \left(P^{(3)}(p_i + (q_i - 1), p_j + (q_i - 1))\right);$$

$$P^{(5)}(p) = \max_{(q_i,q_j):\mathrm{Kr}\,(q_i,q_j)\neq 0} \left(P^{(4)}(p_i + (q_i - 1), p_j + (q_i - 1))\right).$$

1.4. Для дальнейшего анализа снимка требуется определить координаты областей, где содержатся оставшиеся шумовые артефакты и элементы трещин. Применяется алгоритм Сузуки поиска контуров [21], результатом которого становится множество точек, описывающих геометрию объектов на изображении:

$$O_k = \left\{ \left\{ s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots, s^{(n_k)} \right\}_k \right\}, \; k \in \{1, 2, \ldots, d\},$$

где O_k — k-й объект на снимке, представляющий собой шумовой артефакт или элемент трещины; $s = (s_i, s_j)$ — координаты пикселей, описывающих геометрию объекта; n_k — число данных пикселей. Алгоритм Сузуки поиска контуров отбрасывает все лишние пиксели, лежащие на прямых линиях, и оставляет только их конечные точки.

Найденные объекты на снимке представляются в виде прямоугольных областей:

$$\text{Area}_k = (x, y, h, w)_k, \quad k \in \{1, 2, \ldots, d\},$$

где Area_k — k-я область, описывающая объект на изображении; $x_k = \min_{1 \le m \le n_k}\{s_i^{(m)}\}$ и $y_k = \min_{1 \le m \le n_k}\{s_j^{(m)}\}$ — координаты левого верхнего угла прямоугольной области; $h_k = \max_{1 \le m \le n_k}\{s_i^{(m)}\} - x_k$ и $w_k = \max_{1 \le m \le n_k}\{s_j^{(m)}\} - y_k$ — высота и ширина.

1.5. Зная координаты и геометрию объектов на снимке, можно определить их ориентацию, на основе которой будет установлен угол укладки на изображении (см. рис. 3, *г*). Для каждого объекта на снимке находятся следующие точки: TL (top left) — крайняя верхняя левая точка контура объекта; TR (top right) — крайняя верхняя правая точка; BL (bottom left) — крайняя нижняя левая точка; BR (bottom right) — крайняя нижняя правая точка. Для определения данных точек из элементов множества O формируется упорядоченное множество $O^{(\text{sort}_1)}$ по следующему правилу:

$$\forall\, s^{(a)} = \left(s_i^{(a)}, s_j^{(a)}\right) \text{ и } s^{(b)} = \left(s_i^{(b)}, s_j^{(b)}\right), \; s^{(a)}, s^{(b)} \in Q^{(\text{sort}_1)} :$$
$$s^{(a)} \prec s^{(b)} \Leftrightarrow \left(s_i^{(a)} > s_i^{(b)}\right) \vee \left(s_i^{(a)} = s_i^{(b)} \wedge s_j^{(a)} > s_i^{(b)}\right).$$

Также формируется второе упорядоченное множество $O^{(\text{sort}_2)}$ по правилу

$$\forall\, s^{(a)} = \left(s_i^{(a)}, s_j^{(b)}\right) \text{ и } s^{(b)} = \left(s_i^{(b)}, s_j^{(b)}\right), \; s^{(a)}, s^{(b)} \in O^{(\text{sort}_2)} :$$
$$s^{(a)} \prec s^{(b)} \Leftrightarrow \left(s_j^{(a)} > s_j^{(b)}\right) \vee \left(s_j^{(a)} = s_j^{(b)} \wedge s_i^{(a)} > s_i^{(b)}\right).$$

В итоге получаем:

$$O_k^{(\mathrm{sort}_1)} = \left(s^{\sigma_1(1)} \prec s^{\sigma_1(2)} \prec \cdots \prec s^{\sigma_1(n_k)}\right),\ s^{\sigma_1(m)} \equiv s^{(m)};$$
$$O_k^{(\mathrm{sort}_2)} = \left(s^{\sigma_2(1)} \prec s^{\sigma_2(2)} \prec \cdots \prec s^{\sigma_2(n_k)}\right),\ s^{\sigma_2(m)} \equiv s^{(m)}.$$

Если $w_k > h_k$, то $\mathrm{TL}_k = (\mathrm{TL}_i, \mathrm{TL}_j) = s^{\sigma_1(1)}$, $\mathrm{BL}_k = (\mathrm{BL}_i, \mathrm{BL}_j)_k = s^{\sigma_1(2)}$, $\mathrm{TR} = (\mathrm{TR}_i, \mathrm{TR}_j)_k = s^{\sigma_1(n_k-1)}$, $\mathrm{BR} = (\mathrm{BR}_i, \mathrm{BR}_j)_k = s^{\sigma_1(n_k)}$. В противном случае $\mathrm{TL} = (\mathrm{TL}_i, \mathrm{TL}_j)_k = s^{\sigma_2(1)}$, $\mathrm{TR} = (\mathrm{TR}_i, \mathrm{TR}_j)_k = s^{\sigma_2(2)}$, $\mathrm{BL} = (\mathrm{BL}_i, \mathrm{BL}_j)_k = s^{\sigma_2(n_k-1)}$, $\mathrm{BR} = (\mathrm{BR}_i, \mathrm{BR}_j)_k = s^{\sigma_2(n_k)}$.

Определим ориентацию объектов $O = \{O_1, O_2, \ldots, O_d\}$ на снимке. Для этого необходимо установить их принадлежность одному из классов $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\} = \{0°, 45°, -45°, 90°\}$, разбить исходное множество на подмножества $O^{(c_t)}$ и вычислить соответствующие взвешенные суммы Sm_{c_t}, $t \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Если $w_k > h_k$, то проверяется выполнение условия $(\mathrm{TR}_{j_k} < \mathrm{TL}_{j_k} < \mathrm{BR}_{j_k}) \vee (\mathrm{TR}_{j_k} < \mathrm{BL}_{j_k} < \mathrm{BR}_{j_k})$. Если оно выполняется, то $O_k \in O^{(c_4)}$.

Если $w_k \le h_k$, то проверяется выполнение условия

$$(2w_k < h) \vee (\mathrm{BL}_{i_k} < \mathrm{TL}_{i_k} < \mathrm{BR}_{i_k}) \vee (\mathrm{TL}_{i_k} < \mathrm{BR}_{i_k} < \mathrm{TR}_{i_k}) \vee (\mathrm{TL}_{i_k} < \mathrm{BL}_{i_k} < \mathrm{TR}_{i_k}).$$

Если оно выполняется, то $O_k \in O^{(c_1)}$. В противном случае проверяется выполнение условия $(\mathrm{TL}_{i_k} > x_k + 0{,}5w_k) \wedge (\mathrm{BR}_{i_k} < x_k + 0{,}5w_k)$. Если оно выполняется, то $O_k \in O^{(c_2)}$. В противном случае проверяется выполнение условия $(\mathrm{TR}_{i_k} < x_k + 0{,}5w_k) \wedge (\mathrm{BL}_{i_k} > x_k + 0{,}5w_k)$. Если оно выполняется, то $O_k \in O^{(c_3)}$. В противном случае проверяется выполнение условия:

$$((\mathrm{TR}_{i_k} > x_k + 0{,}3w_k) \wedge (\mathrm{TR}_{i_k} < x_k + 0{,}7w_k)) \wedge ((\mathrm{BL}_{i_k} > x_k + 0{,}3w_k) \wedge (\mathrm{BL}_{i_k} < x_k + 0{,}7w_k)).$$

Если оно выполняется, то $O_k \in O^{(c_1)}$. В противном случае объект не имеет ярко выраженной ориентации и не принадлежит ни одному классу.

Взвешенная сумма Sm_{c_t}, $t \in \{1, 2, 3, 4\}$, вычисляется для классов следующим образом: $\mathrm{Sm}_{c_t} = v_{c_t} \sum_{O_k \in O^{(c_t)}} h_k w_k$, $v = \{1; 1{,}3; 1{,}3; 1\}$.Углу укладки будет соответствовать класс с наибольшей взвешенной суммой:

$$t^* = \underset{t \in \{1,2,3,4\}}{\mathrm{argmin}}\ \mathrm{Sm}_{c_t}; \quad \theta = c_{t^*}.$$

Результатом первого этапа алгоритма становится угол θ укладки слоя на снимке микроструктуры композита.

Второй этап. *Определение на скане областей, содержащих трещины.* Этот этап во многом аналогичен предыдущему, основное отличие заключается в цели: изолировать только трещины при эффективном подавлении фонового шума. Визуализация этого процесса представлена на рис. 4. Первоначально к исходному изображению (рис. 4, *а*) применяется фильтр Собеля. По сравнению с фильтром Шарра он менее чувствителен к градиентам интенсивности между соседними пикселями (рис. 4, *б*). Это позволяет алгоритму изолировать трещины, которые имеют высокий контраст по сравнению с остаточным шумом.

Затем изображение бинаризируется с использованием глобального порога, а шумоподавление выполняется с помощью операций морфологического расширения и эрозии (рис. 4, *в*). Любые оставшиеся шумовые артефакты удаляются путем фильтрации объектов на основе заранее определенного порога области (рис. 4, *г*).

Рассмотрим алгоритм реализации второго этапа по шагам.

2.1. Применяется фильтр Собеля для извлечения трещин (см. рис. 4, *б*):

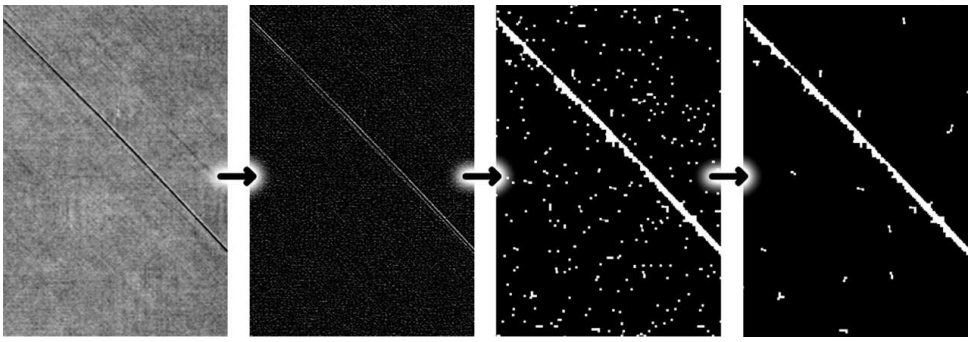
$$P^{(2)}(p) = \begin{cases} 255, & \left|P^{(\mathrm{Sb})}(p)\right| > 255\,; \\ \left|P^{(\mathrm{Sb})}(p)\right|, & \left|P^{(\mathrm{Sb})}(p)\right| \le 255\,. \end{cases}$$

Здесь

$$P^{(\mathrm{Sb})}(p) = \sum_{q_i=-1}^{1} \sum_{q_j=-1}^{1} P(p+q)\mathrm{Sb}_{q_i+1,q_j+1}\,,$$

где $p = (p_i, p_j)$ и $q = (q_i, q_j)$ — координаты пикселя, $P^{(\mathrm{Sb})}(p) \in [-1020, 1020]$; $P^{(2)}(p)$ — результат применения фильтра; Sb — ядро свертки:

$$\mathrm{Sb} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 4 Второй этап алгоритма поиска трещин

2.2. Применяется пороговая бинаризация с пороговым значением $\mathrm{th} = 127$ для упрощения дальнейшего анализа:

$$P^{(3)}(p) = \begin{cases} 255, & P^{(2)}(p) > \mathrm{th}\,; \\ 0, & P^{(2)}(p) \leq \mathrm{th}. \end{cases}$$

Результатом данного шага становится черно-белое изображение, где белые пиксели соответствуют областям, где, возможно, находится трещина.

2.3. К изображению применяется морфологическая операция расширения с ядром $\mathrm{Kr} = (\mathrm{Kr}\,(q))_{5\times 5}$, $\mathrm{Kr}\,(q_i, q_j) = 1$. Это позволит увеличить площадь областей с белыми пикселями и сгруппировать их:

$$P^{(4)}(p) = \max_{(q_i,q_j):\mathrm{Kr}\,(q_i,q_j)\neq 0} \left(P^{(3)}\left(p_i + (q_i - 2), p_j + (q_j - 2)\right)\right).$$

2.4. Применяется морфологическая операция эрозии с ядром $\mathrm{Kr} = (\mathrm{Kr}\,(q))_{6\times 6}$, $\mathrm{Kr}\,(q_i, q_j) = 1$ для возвращения изначальной площади областей с белыми пикселями с сохранением при этом их группировки:

$$P^{(5)}(p) = \min_{(q_i,q_j):\mathrm{Kr}\,(q_i,q_j)\neq 0} \left(P^{(4)}\left(p_i + (q_i - 2), p_j + (q_j - 2)\right)\right).$$

2.5. Для очистки изображения от шума последовательно применяются операции с ядром $\mathrm{Kr} = (\mathrm{Kr}\,(q))_{2\times 2}$, $\mathrm{Kr}\,(q_i, q_j) = 1$ (см. рис. 4, *в*):

$$P^{(6)}(p) = \min_{(q_i,q_j):\mathrm{Kr}\,(q_i,q_j)\neq 0} \left(P^{(5)}\left(p_i + (q_i - 1), p_j + (q_j - 1)\right)\right);$$

$$P^{(7)}(p) = \max_{(q_x,q_y):\mathrm{Kr}\,(q_x,q_y)\neq 0} \left(P^{(6)}\left(p_x + (q_x - 1), p_y + (q_y - 1)\right)\right).$$

2.6. Чтобы извлечь координаты всех областей из белых пикселей применяется алгоритм Сузуки [21] поиска контуров. Результатом его работы становится множество прямоугольных областей, описывающих координаты групп белых пикселей:

$$\mathrm{Area} = \left\{(x, y, h, w)^{(1)}, (x, y, h, w)^{(2)}, \ldots, (x, y, h, w)^{(d)}\right\},\ d \in \mathbb{N}\,,$$

где $x^{(m)}$ и $y^{(m)}$ — координаты левого верхнего угла m-й прямоугольной области; $h^{(m)}$ и $w^{(m)}$ — высота и ширина m-й прямоугольной области, $m \in \{1, 2, \ldots, d\}$.

2.7. Проводится удаление излишне мелких групп белых пикселей, которые, вероятнее всего, не относятся к трещинам. Для этого осуществляется сравнение площадей прямоугольных областей, описывающих группы пикселей, с заданным

пороговым значением. Проверяется выполнение условия $h^{(m)}w^{(m)} > 50$. Если оно не выполняется, то это указывает на то, что m-я группа пикселей представляет собой шумовой артефакт. Из прямоугольных областей, для которых выполняется данное условие, формируется множество (см. рис. 4, *г*)

$$\text{AreaCl} = \left\{(x,y,h,w)^{(1)}, (x,y,h,w)^{(2)}, \ldots, (x,y,h,w)^{(d_c)}\right\},\ d_c \in \mathbb{N},\ \ d_c \le d\,.$$

2.8. Поскольку трещины на снимках представляют собой прямые линии, ориентированные на изображении в соответствии с углом укладки, то элементы трещин, хранящиеся в AreaCl, можно представить в виде $(x_1, y_1, x_2, y_2)^{(m)}$, где $x_1^{(m)}$ и $y_1^{(m)}$ — начало элемента трещины; $x_2^{(m)}$ и $y_2^{(m)}$ — конец элемента трещины, $m \in \{1, 2, \ldots, d_c\}$. Начало и конец элементов трещин определяются на основе угла укладки θ на снимке, вычисленного на первом этапе алгоритма, следующим образом:

$$\theta = 0^\circ : x_1^{(m)} = x^{(m)},\ y_1^{(m)} = \left[y^{(m)} + \frac{w^{(m)}}{2}\right],\ x_2^{(m)} = x^{(m)} + h,$$
$$y_2^{(m)} = \left[y^{(m)} + \frac{w^{(m)}}{2}\right];$$
$$\theta = 45^\circ : x_1^{(m)} = x^{(m)},\ y_1^{(m)} = y^{(m)} + w,\ x_2^{(m)} = x^{(m)} + h,\ y_2^{(m)} = y^{(m)};$$
$$\theta = -45^\circ : x_1^{(m)} = x^{(m)},\ y_1^{(m)} = y^{(m)},\ x_2^{(m)} = x^{(m)} + h,\ y_2^{(m)} = y^{(m)} + w;$$
$$\theta = 90^\circ : x_1^{(m)} = \left[x^{(m)} + \frac{h^{(m)}}{2}\right],\ y_1^{(m)} = y^{(m)},\ x_2^{(m)} = \left[x^{(m)} + \frac{h^{(m)}}{2}\right],$$
$$y_2^{(m)} = y^{(m)} + w\,.$$

В результате формируется множество:

$$\text{CracksLine} = \left\{(x_1,y_1,x_2,y_2)^{(1)}, (x_1,y_1,x_2,y_2)^{(2)}, \ldots, (x_1,y_1,x_2,y_2)^{(d_c)}\right\}.$$

2.9. Из множества элементов трещин CrackLine извлекаются крупные элементы согласно условию

$$\sqrt{\left(x_1^{(m)} - x_2^{(m)}\right)^2 + (y_1^{(m)} - y_2^{(m)})^2} > 40\,.$$

Из элементов, для которых выполняется данное условие, формируется множество:

$$\text{CLnL} = \left\{(x_1,y_1,x_2,y_2)^{(1)}, (x_1,y_1,x_2,y_2)^{(2)}, \ldots, (x_1,y_1,x_2,y_2)^{(d_{\text{cl}})}\right\},$$
$$d_{\text{cl}} \in \mathbb{N},\ d_{\text{cl}} \le d_c.$$

2.10. Проводится группировка элементов трещин, расположенных близко друг к другу. Для каждого элемента формируется область, ограниченная двумя параллельными прямыми линиями, внутри которой он находится, по следующему правилу:

$$\theta = 0^\circ : \mathrm{kr}_m^{(\mathrm{el})} = \inf,\ \mathrm{br}_m^{(\mathrm{el})} = x_1^{(m)} - l,\ \mathrm{kl}_m^{(\mathrm{el})} = \inf,\ \mathrm{bl}_m^{(\mathrm{el})} = x_1^{(m)} + l\,;$$
$$\theta = 45^\circ : \mathrm{kr}_m^{(\mathrm{el})} = -1,\ \mathrm{br}_m^{(\mathrm{el})} = y_1^{(m)} + x_1^{(m)} - l\sqrt{2}\,,\ \mathrm{kl}_m^{(\mathrm{el})} = 1,$$
$$\mathrm{bl}_m^{(\mathrm{el})} = y_1^{(m)} + x_1^{(m)} + l\sqrt{2}\,;$$
$$\theta = -45^\circ : \mathrm{kr}_m^{(\mathrm{el})} = 1,\ \mathrm{br}_m^{(\mathrm{el})} = y_1^{(m)} - x_1^{(m)} - l\sqrt{2},\ \mathrm{kl}_m^{(\mathrm{el})} = 1,$$
$$\mathrm{bl}_m^{(\mathrm{el})} = y_1^{(m)} - x_1^{(m)} + l\sqrt{2}\,;$$
$$\theta = 90^\circ : \mathrm{kr}_m^{(\mathrm{el})} = 0,\ \mathrm{br}_m^{(\mathrm{el})} = y_1^{(m)} - l, \mathrm{kl}_m^{(\mathrm{el})} = 0,\ \mathrm{bl}_m^{(\mathrm{el})} = y_1^{(m)} + l\,,$$

где $\mathrm{kr}_m^{(\mathrm{el})}$ и $\mathrm{br}_m^{(\mathrm{el})}$ — параметры правой прямой, ограничивающей область m-го элемента трещины; kl_m и bl_m — параметры левой прямой; $l = 20$ — параметр алгоритма; $m \in \{1, 2, \ldots, d_{cl}\}$. В результате формируется множество:

$$\mathrm{CrA} = \left\{ (\mathrm{kr}, \mathrm{br}, \mathrm{kl}, \mathrm{bl})_1^{(\mathrm{el})}, (\mathrm{kr}, \mathrm{br}, \mathrm{kl}, \mathrm{bl})_2^{(\mathrm{el})}, \ldots, (\mathrm{kr}, \mathrm{br}, \mathrm{kl}, \mathrm{bl})_{d_{\mathrm{cl}}}^{(\mathrm{el})} \right\}.$$

Элементы множества CrA сравниваются согласно условию:

$$\theta \in \{90^\circ, 45^\circ, -45^\circ\} : \left(\left(y_1^{(a)} > \mathrm{kr}_b^{(\mathrm{el})} x_1^{(a)} + \mathrm{br}_b^{(\mathrm{el})} \right) \wedge \right.$$
$$\left. \wedge \left(y_1^{(a)} < \mathrm{kl}_b^{(\mathrm{el})} x_1^{(a)} + \mathrm{bl}_b^{(\mathrm{el})} \right) \right) \vee \left(\left(y_2^{(a)} > \mathrm{kr}_b^{(\mathrm{el})} x_2^{(a)} + \mathrm{br}_b^{(\mathrm{el})} \right) \wedge \right.$$
$$\left. \wedge \left(y_2^{(a)} < \mathrm{kl}_b^{(\mathrm{el})} x_2^{(a)} + \mathrm{bl}_b^{(\mathrm{el})} \right) \right)\,;$$
$$\theta = 0^\circ : \left(x_1^{(a)} > \mathrm{br}_b^{(\mathrm{el})} \wedge x_1^{(a)} < \mathrm{bl}_b^{(\mathrm{el})} \right) \vee \left(x_2^{(a)} > \mathrm{br}_b^{(\mathrm{el})} \wedge x_2^{(a)} < \mathrm{bl}_b^{(\mathrm{el})} \right),$$

где $a, b \in \{1, 2, \ldots, d_{\mathrm{cl}}\}$, $a \neq b$. Если для двух элементов множества CrA условие выполняется, то это значит, что данные элементы описывают одну и ту же трещину. Такие элементы становятся частью одной группы. Результатом группировки становятся множества:

$$\mathrm{GrC}^{(m)} = \left\{ (\mathrm{kr}, \mathrm{br}, \mathrm{kl}, \mathrm{bl})_1^{(\mathrm{el})}, (\mathrm{kr}, \mathrm{br}, \mathrm{kl}, \mathrm{bl})_2^{(\mathrm{el})}, \ldots, (\mathrm{kr}, \mathrm{br}, \mathrm{kl}, \mathrm{bl})_{d^{(m)}}^{(\mathrm{el})} \right\}^{(m)},$$

где $d^{(m)}$ — число элементов трещин в m-й группе, $m \in \{1, 2, \ldots, g\}$, g — число групп элементов трещин.

2.11. На основе множества GrC формируются области, описывающие расположение групп элементов трещин:

$$\mathrm{Cr} = \{(\mathrm{kr}, \mathrm{br}, \mathrm{kl}, \mathrm{bl})_1, (\mathrm{kr}, \mathrm{br}, \mathrm{kl}, \mathrm{bl})_2, \ldots, (\mathrm{kr}, \mathrm{br}, \mathrm{kl}, \mathrm{bl})_g\},$$

где kr_m и br_m — параметры правой прямой, ограничивающей область m-й группы элементов трещин; kl_m и bl_m — параметры левой прямой, $m \in \{1, 2, \ldots, g\}$.

2.12. Найденные трещины разделяются на длинные и короткие. Классификация осуществляется на основе длины трещины, находящейся в кадре съемки. В итоге формируется множество $K = \{\mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_2, \ldots, \mathrm{cl}_g\}$, $\mathrm{cl} \in \{0; 1\}$, где $\mathrm{cl} = 0$ соответствует короткой трещине, а $\mathrm{cl} = 1$ — длинной трещине.

Результатом второго этапа становится множество областей содержания трещин Cr и множество классов трещин K.

Третий этап. *Корректировка найденных участков возможного содержания трещин с учетом информации о границах слоев, полученной на первом этапе*. Ошибочно идентифицированные зоны удаляются, а пропущенные области достраиваются с использованием координат областей на соседних сканах. Координаты зон, полученные на третьем этапе, будут соответствовать трещинам в исходной последовательности сканов.

Рассмотрим алгоритм реализации третьего этапа по шагам. Исходными данными выступают углы укладки $\theta^{(\mathrm{all})} = \{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \ldots, \theta^{(n)}\}$, определенные на снимках, и области содержания трещин $\mathrm{Cr}^{(\mathrm{all})} = \{\mathrm{Cr}^{(1)}, \mathrm{Cr}^{(2)}, \ldots, \mathrm{Cr}^{(n)}\}$, где n — число снимков в исходной последовательности.

3.1. Проводится поиск границ слоев в последовательности снимков на основе вычисленных углов укладки на изображениях и известных углах укладки слоев. Результатом становится множество $\mathrm{BD} = \{\mathrm{bd}_1, \mathrm{bd}_2, \ldots, \mathrm{bd}_{\mathrm{sl}}\}$, $\mathrm{sl} \in \mathbb{N}$, где sl — число слоев в композите; bd_m — число снимков, соответствующих m-му слою. Снимки из множества $\{1, 2, \ldots, \mathrm{bd}_1\}$ будут соответствовать первому слою композита, из множества $\{\mathrm{bd}_1 + 1, \mathrm{bd}_1 + 2, \ldots, \mathrm{bd}_1 + \mathrm{bd}_2\}$ — второму слою и т. д.

3.2. Из множества областей содержания трещин формируются последовательности, описывающие трещины в каждом слое материала. Проводится сравнение координат областей, принадлежащих одному слою, друг с другом. Если координаты отличаются незначительно, то это указывает на то, что данные области описывают одну и ту же трещину. Такие области становятся частью одной последовательности:

$$\begin{gathered}
\mathrm{Seq}^{(\mathrm{all}_1)} = \{\mathrm{Seq}_1, \mathrm{Seq}_2, \ldots, \mathrm{Seq}_{\mathrm{sl}}\}, \\
\mathrm{Seq}_m = \{\mathrm{seq}_1, \mathrm{seq}_2, \ldots, \mathrm{seq}_{r_s}\}, \quad r_s \in \mathbb{N}, \ m \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{sl}\}, \\
\mathrm{seq}_u = (\mathrm{coords}_1, \mathrm{coords}_2, \ldots, \mathrm{coords}_{\mathrm{bd}_u}), \quad u \in \{1, 2, \ldots, r_s\}, \\
\mathrm{coords}_z \in \left\{\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Cr}_i\right\} \bigcup \{\mathrm{None}\}, \quad z \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{bd}_u\},
\end{gathered}$$

где $\mathrm{Seq}^{(\mathrm{all})}$ — множество множеств всех последовательностей на снимках; Seq_m — множество последовательностей, найденных в m-м слое материала; seq_u — u-я

последовательность областей содержания трещин; coords_z — координаты области содержания трещины или значение None в случае, если область, соответствующая последовательности, не была найдена на снимке.

3.3. Проводится проверка всех сформированных последовательностей областей содержания трещин. Если в последовательности большинство элементов представляют собой координаты областей, а не значения None, то это указывает на то, что данная последовательность действительно описывает трещину. Значения None заменяются координатами области, вычисленными на основе координат других областей данной последовательности. В противном случае последовательность не соответствует трещине и удаляется из множества всех последовательностей. Так формируется множество

$$\mathrm{Seq}^{(\mathrm{all}_2)} = \{\mathrm{Seq}_1, \mathrm{Seq}_2, \ldots, \mathrm{Seq}_{\mathrm{sl}}\}\,.$$

Результатом третьего этапа становится множество $\mathrm{Seq}^{(\mathrm{all}_2)}$, в котором содержатся последовательности областей содержания трещин.

6 Результаты и обсуждение

Рассмотрим результат работы алгоритма обнаружения трещин на примере последовательности томографических сканов материала со следующими характеристиками:

- размер изображения: 1965×1629 пикселей;
- число изображений: 1093;
- глубина сканирования: от 0,366 до 6,542 мм;
- шаг сканирования: $\sim 0{,}0055$ мм;
- число слоев: 33.

На рис. 5, *а* показано одно из изображений исходной последовательности. На рис. 5, *б* представлено изображение с отмеченными областями трещин: с длинными рисками — трещина длинная, с короткими — короткая. Области трещин ограничены двумя прямыми линиями, угол наклона которых совпадает с углом укладки. Характеристики скана указаны в левом верхнем углу изображения: номер слоя, угол укладки и глубина сканирования.

Координаты областей содержания трещин представляют собой множество упорядоченных чисел $(\mathrm{kr}_c,\ \mathrm{br}_c,\ \mathrm{kl}_c,\ \mathrm{bl}_c)$, $c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где kr_c и br_c — параметры правой прямой, ограничивающей область содержания трещины; kl_c и bl_c — параметры левой прямой, ограничивающей область (kr_c и kl_c — угловые коэффициенты соответствующей прямой; br_c и bl_c — свободные члены).

Схема визуализации прямых, ограничивающих область содержания трещины, представлена на рис. 6.

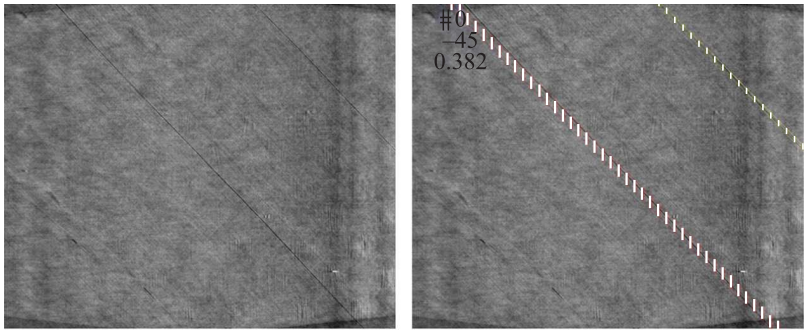


Рис. 5 Томографическое изображение в исходном виде (*а*) и с отмеченными трещинами в результате работы алгоритма (*б*)

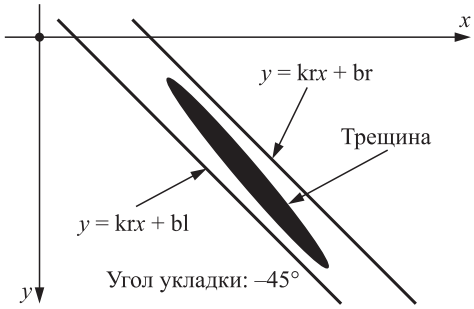


Рис. 6 Схема визуализации прямых, ограничивающих область содержания трещины

Информация, получаемая после обработки скана:

(1) общее число найденных трещин в каждом слое;

(2) число длинных и коротких трещин в каждом слое (рис. 7);

(3) средний интервал между трещинами в каждом слое (рис. 8).

Если угол укладки в слое составляет 0° или 90°, то используются следующие формулы:

$$l = \frac{1}{s(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} b_k^{(\mathrm{av})} - b_{k+1}^{(\mathrm{av})}, \quad b_k^{(\mathrm{av})} = \frac{\mathrm{bl}_k - \mathrm{br}_k}{2} + \mathrm{bl}_k, \tag{1}$$

где bl_k и br_k — свободные члены прямых, ограничивающих k-ю область содержания трещины (пикс.); s — число пикселей в миллиметре согласно масштабу снимка; n — число трещин в слое. Области содержания трещин отсортированы в порядке возрастания параметра bl, $s = 263$ пикс.

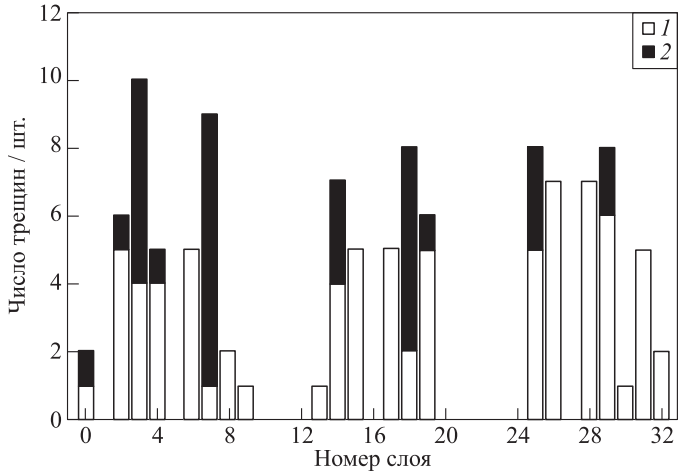


Рис. 7 Распределение трещин по слоям: *1* — короткие трещины; *2* — длинные трещины

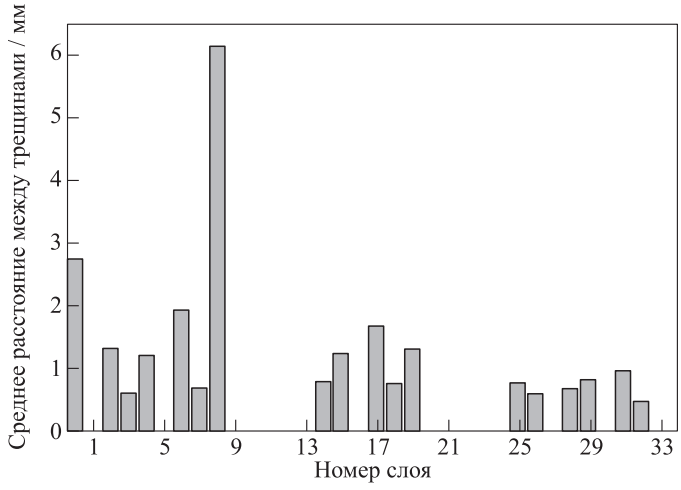


Рис. 8 Распределение среднего расстояния между трещинами

Для углов укладки $45°$ или $-45°$ средний интервал вычисляется по формуле:

$$l = \frac{1}{s(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} \left(b_k^{(\mathrm{av})} - b_{k+1}^{(\mathrm{av})} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} . \qquad (2)$$

В случае, если в слое менее двух областей, содержащих трещины, значение среднего интервала полагается равным нулю;

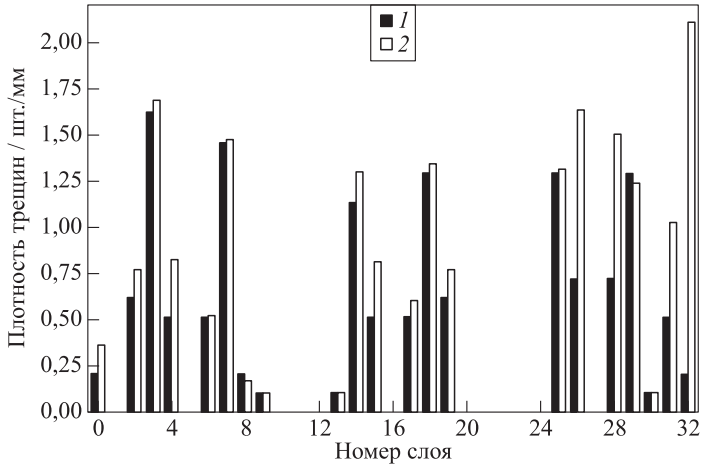


Рис. 9 Распределение плотности трещин по слоям: расчет по формулам (3) (*1*) и (4) (*2*)

(4) нормализованный средний интервал между трещинами в каждом слое (рис. 9):

$$|l| = \frac{l}{W},$$

где W — ширина скана, мм. Если угол укладки в слое составляет 90°, то $W = 6{,}19$ мм. Если угол укладки 0°, то $W = 7{,}47$ мм. Если угол укладки 45° или −45°, то $W = 9{,}71$ мм;

(5) оценка плотности трещин, рассчитанная по числу трещин (рис. 10, *а*):

$$l^{(1)} = \frac{n}{W}; \tag{3}$$

(6) оценка плотности трещин, рассчитанная по среднему интервалу между трещинами, определяемому по формулам (1) или (2) (рис. 10, *б*):

$$l^{(2)} = \frac{1}{l}. \tag{4}$$

В случаях, если оценку плотности по формуле (4) нельзя вычислить, значение заменяется на вычисленное по формуле (3).

Результаты вычисления представлены в виде графиков на рис. 7–10. На графике распределения трещин по слоям (см. рис. 7) видно, что большинство трещин короткие. Длинные трещины встречаются гораздо реже, причем значительное их число расположено в слоях №№ 3, 7, 14, 18, 25 и 27, угол укладки которых равен 90°. Распределение трещин практически симметрично относительно центрального слоя № 16, что обусловлено симметричной укладкой слоев композита.

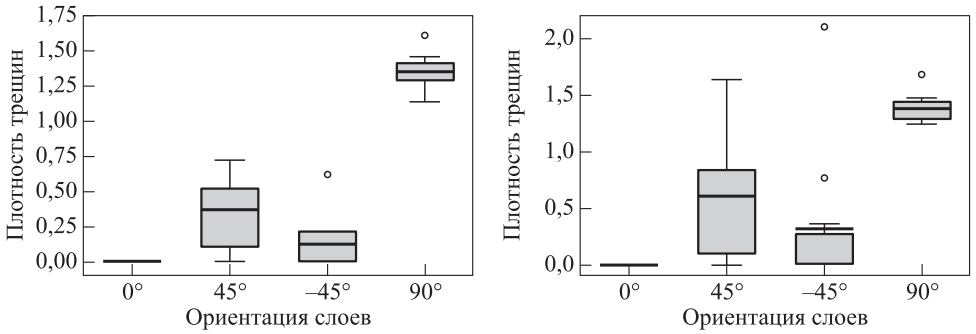


Рис. 10 Распределение плотности трещин по слоям по формулам (3) (*а*) и (4) (*б*)

Таблица 2 Характеристики распределений плотности трещин по слоям

Ориентация слоев	Распределение плотности трещин (3) по слоям		Распределение плотности трещин (4) по слоям	
	Среднее значение	Стандартное отклонение	Среднее значение	Стандартное отклонение
0°	0	0	0	0
45°	0,372	0,273	0,607	0,538
−45°	0,122	0,180	0,318	0,609
90°	1,346	0,153	1,388	0,149

Оценки плотностей, полученные по формулам (3) и (4) и представленные на рис. 9, практически совпадают на большинстве слоев. В слоях №№ 26, 28, 31 и 32 оценки значительно расходятся. Это связано с неравномерным распределением трещин, на что указывает среднее расстояние между трещинами (см. рис. 8): в данных слоях оно достигает минимальных ненулевых значений.

На рис. 10 представлены распределения плотности трещин по слоям в виде графиков «ящик с усиками». Границами «ящиков» служат первый и третий квартили, а «усы» охватывают значения, лежащие в пределах 1,5 межквартильного размаха от первого и третьего квартилей. Линия на «ящике» соответствует медианному значению распределения.

В табл. 2 даны характеристики распределений плотности трещин, относящихся к рис. 10.

Наибольшие значения плотности трещин достигаются в слоях с ориентацией 90°, что обусловлено возникновением значительных напряжений в слое ПКМ в направлении поперек армирующих волокон. Наибольший разброс и наибольшее число выбросов значений плотности трещин наблюдается в слоях с ориентацией 45° и −45°, что обусловлено сложностью механизмов развития трещин в слоях с данной ориентацией при одноосной растягивающей нагрузке. В слоях

с ориентацией 0° трещины отсутствуют, поэтому оценки плотности оказываются нулевыми.

Обнаружено существенное расхождение между значениями плотности трещин, полученными по формулам (3) и (4) для слоев с углами укладки $+45°$ и $-45°$. Как отмечалось ранее, в этих слоях трещины образуются редко и неравномерно, что снижает точность расчетов по формуле (4). Таким образом, при оценке плотности трещин в данных слоях предпочтительно использование формулы (3), обеспечивающей более корректные результаты. В то же время в слоях с укладкой 90° оценки плотностей по обеим формулам практически идентичны. Однако стоит учитывать, что в них концентрация трещин достаточно высока, а следовательно, вероятность ошибки алгоритма при их обнаружении выше по сравнению с другими слоями. Большое число близко расположенных дефектов различить гораздо сложнее, нежели единичные трещины. Поэтому, допуская равномерность распределения трещин в слоях с укладкой 90°, для оценки их плотности целесообразно использовать формулу (4). Поскольку она основана на среднем расстоянии между трещинами, эффект от ошибки алгоритма будет частично нивелироваться за счет непосредственного усреднения расстояния между трещинами. Таким образом, для оценки плотности трещин в слоях с углами укладки $\pm 45°$ рекомендуется использовать формулу (3), а для слоев 90° — формулу (4).

7 Заключение

Предложен новый метод обнаружения и количественной оценки степени растрескивания в многослойном углепластике ПКМ на примере образцов с 33-слойной схемой укладки. В ходе исследования подтверждена применимость рентгеновской КТ высокого разрешения в качестве инструмента неразрушающего контроля для точной визуализации внутренних сетей трещин на всей глубине сканирования от 0,366 до 6,542 мм, соответствующей типовой толщине образцов ПКМ для общей и специальной квалификации материала.

Выявлено, что разработанный алгоритм успешно автоматизирует процесс идентификации границ слоев и углов укладки с использованием морфологических преобразований и анализа шумовых искажений, исключая необходимость ручного контроля. Так как растрескивание матрицы ПКМ — это типовая форма внутреннего разрушения под нагрузкой волокнистых композиционных материалов на основе полимерного связующего, в класс которых входят разнородные материалы с непрерывным армированием, разработанный метод оценки степени растрескивания применим для углепластиков, стеклопластиков, органопластиков и других распространенных конструкционных материалов. Доступная для обработки по представленному методу толщина объектов контроля ограничена исключительно возможностями томографического оборудования.

В результате исследования ПКМ разработанным методом получена комплексная количественная оценка повреждений для каждого отдельного слоя,

включая общее число длинных и коротких трещин, средний интервал между трещинами и два различных варианта оценки плотности трещин. Полученные характеристики имеют практическую значимость в решении задач контроля ПКМ в промышленных и лабораторных условиях. К выявленным особенностям функционирования разработанного метода относится возможность определения угла укладки с помощью анализа шумовых искажений даже на изображениях, где трещины отсутствуют, а также использование координатных данных с соседних срезов для восполнения недостающей информации о трещинах.

Литература

1. *Shen H., Yao W., Qi W., Zong J.* Experimental investigation on damage evolution in cross-ply laminates subjected to quasi-static and fatigue loading // Compos. Part B — Eng., 2017. Vol. 120. P. 10–26. doi: 10.1016/j.compositesb.2017.02.033.
2. *Li X., Kupski J., Teixeira De Freitas S., Benedictus R., Zarouchas D.* Unfolding the early fatigue damage process for CFRP cross-ply laminates // Int. J. Fatigue, 2020. Vol. 140. Art. 105820. 11 p. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2020.105820.
3. *Kötter B., Endres J., Körbelin J., et al.* Fatigue and fatigue after impact behaviour of thin-and thick-ply composites observed by computed tomography // Composites Part C Open Access, 2021. Vol. 5. Art. 100139. 12 p. doi: 10.1016/j.jcomc.2021.100139.
4. *Абгарян К. К., Журавлев А. А.* Методы многомасштабного моделирования в задачах цифрового материаловедения. — М.: МАКС Пресс, 2022. 120 с. doi: 10.29003/m3138.978-5-317-06870-7. EDN: ASHFBK.
5. *Li X., Benedictus R., Zarouchas D.* Early fatigue damage accumulation of CFRP Cross-Ply laminates considering size and stress level effects // Int. J. Fatigue, 2022. Vol. 159. Art. 106811. 14 p. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2022.106811.
6. *Абгарян К. К., Загордан Н. Л., Мочалова Ю. Д.* Метод компьютерного моделирования упругих характеристик многослойных композиционных материалов // Системы и средства информатики, 2023. Т. 33. № 4. С. 92–101. doi: 10.14357/08696527230409. EDN: DPZJSX.
7. *Пантелеев А. В., Турбин Н. В., Надоров И. С., Кононов Н. О.* Метаэвристические алгоритмы для идентификации параметров трехмерной модели снижения усталостной жесткости композиционных материалов // Системы и средства информатики, 2025. Т. 35. № 4. С. 73–91. doi: 10.14357/08696527250406. EDN: PTPHPN.
8. *Ямаев А. В., Чукалина М. В., Николаев Д. П., Шешкус А. В., Чуличков А. И.* Нейронная сеть для предварительной обработки данных в компьютерной томографии // Автоматика и телемеханика, 2021. № 10. С. 152–164. doi: 10.31857/S0005231021100123.
9. *Чукалина М. В.* Измерительно-вычислительные методы рентгеновской диагностики для определения атомной и морфологической (пространственной) структуры материалов и изделий микро- и наноэлектроники: Дис. . . . докт. физ.-мат. наук. — Черноголовка, 2025. 327 с.
10. *Wagner P., Schwarzhaupt O., May M.* In-situ X-ray computed tomography of composites subjected to fatigue loading // Mater. Lett., 2019. Vol. 236. P. 128–130. doi: 10.1016/j.matlet.2018.10.078.

11. *Lizarralde I., Sapountzi E., Bénéthuilière T., Sket F., González C.* An X-ray computed tomography analysis of damage induced by thermal cycling in non-crimp fabric composites // Compos. Part A — Appl. S., 2022. Vol. 152. Art. 106699. 10 p. doi: 10.1016/j.compositesa.2021.106699.
12. *Li L., Guo X., Liu Y.* Characterization of cyclic loading/unloading damage behavior in fiber-reinforced ceramic-matrix composites using inverse tangent modulus // J. Eur. Ceram. Soc., 2022. Vol. 42. No. 5. P. 1912–1927. doi: 10.1016/j.jeurceramsoc.2021.12.060.
13. *Takahashi K., Shoya R., Matsuo T., et al.* X-ray nanoimaging of a transversely embedded carbon fiber in epoxy matrix under static and cyclic loads // Sci. Rep. — U.K., 2022. Vol. 12. No. 1. Art. 8843. 12 p. doi: 10.1038/s41598-022-12724-1.
14. *Ma P. H., Hu D.-Y., Liu Y., et al.* In-situ study on fatigue failure of plain woven SiC_f/SiC composites based on X-ray computed tomography // J. Phys. Conf. Ser., 2025. Vol. 2947. No. 1. Art. 012002. 8 p. doi: 10.1088/1742-6596/2947/1/012002.
15. *Li L.* Microscale model for crack opening/closure behavior in C/SiC composite under in-situ multi-step cyclic-fatigue loading // Compos. Part B — Eng., 2025. Vol. 925. Art. 113268. 23 p. doi: 10.1016/j.compositesb.2025.113268.
16. *Schilling P. J., Karedla B. R., Tatiparthi A. K., et al.* X-ray computed microtomography of internal damage in fiber reinforced polymer matrix composites // Compos. Sci. Technol., 2005. Vol. 65. No. 14. P. 2071–2078. doi: 10.1016/j.compscitech.2005.05.014.
17. *Rose M., Niverty S., Schmidt B., et al.* X-ray computer tomography (XCT) of fatigue damage in laser-machined versus milled carbon fiber reinforced polymer matrix composites // Eng. Fract. Mech., 2021. Vol. 252. Art. 107820. 21 p. doi: 10.1016/j.engfracmech.2021.107820.
18. *Takahashi K., Matsuo T., Wakabayashi K., et al.* Influence of irradiation with synchrotron radiation X-ray on nano-scale CT for carbon fibers and epoxy matrix // Compos. Part A — Appl. S., 2025. Vol. 198. Art. 109060. 8 p. doi: 10.1016/j.compositesa.2025.109060.
19. *Пантелеев А. В., Турбин Н. В., Тучков Н. А., Талья Р. Л., Ахмедов И. А.* Методика количественной оценки степени растрескивания слоистого композита по данным компьютерной томографии // Труды МАИ, 2025. № 143. Ст. 16. 60 с. EDN: YPLTJX. https://trudymai.ru/published.php?ID=185657.
20. *Пантелеев А. В., Турбин Н. В., Тучков Н. А., Талья Р. Л., Ахмедов И. А.* Алгоритм определения границ монослоев композиционного материала на основе данных компьютерной томографии // Труды МАИ, 2025. № 144. Ст. 13. 52 с. EDN: OUPNNE. https://trudymai.ru/published.php?ID=186313.
21. *Suzuki S., Abe K.* Topological structural analysis of digitized binary images by border following // Comput. Vision Graph., 1985. Vol. 30. No. 1. P. 32–46. doi: 10.1016/0734-189X(85)90016-7.
22. *Гонсалес Р., Вудс Р.* Цифровая обработка изображений / Пер. с англ. — 3-е изд. — М.: Техносфера, 2024. 1104 с. (*Gonzalez R. C., Woods R. E.* Digital image processing. — Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2002. 793 p.)
23. *Шапиро Л., Стокман Дж.* Компьютерное зрение / Пер. с англ. — 3-е изд. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 763 с. (*Shapiro L. G., Stockman G. C.* Computer vision. — Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 2001. 580 p.)

24. *Wang J., Kosinka J., Telea A.* Spline-based medial axis transform representation of binary images // Comput. Graph., 2021. Vol. 98. P. 165–176. doi: 10.1016/j.cag.2021.05.012.

25. *Chen C. C., Peng C. H.* Topology-preserving downsampling of binary images // Computer vision / Eds. A. Leonardis, E. Ricci, S. Roth, *et al*. — Lecture notes in computer science ser. — Cham, Switzerland: Springer, 2024. Vol. 15078. P. 416–431. doi: 10.1007/978-3-031-72661-3_24.

Поступила в редакцию 15.06.2026
Принята к публикации 15.09.2026

QUANTITATIVE ANALYSIS OF CRACKING IN POLYMER COMPOSITE MATERIALS BY COMPUTED TOMOGRAPHY

A. V. Panteleev, N. V. Turbin, N. A. Tuchkov, R. L. Talya, K. V. Akchupanov, and K. K. Ibrishev

Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation

Abstract: The article presents the results of a polymer composite material (PCM) matrix cracking analysis performed using a newly developed method for crack density detection based on computed tomography data. This method allows for the automatic detection and tracking of microcracks across successive tomographic sections. The underlying algorithm is based on modern computer vision concepts. An aircraft-grade carbon fiber with a 33-layer stacking sequence representative of key aircraft wing structural components such as load-bearing panels and spars, was investigated. Matrix cracking in the PCM samples occurred as a result of the application of cyclic tensile loads. Prior to cyclic loading, quasi-static tensile tests were performed to determine the tensile strength of the samples. The number of applied load cycles was selected experimentally from the conditions for maintaining the integrity of the sample, on the one hand, and the significant development of matrix cracking in the layers on the other. The tomographic image crack search algorithm consists of several stages, including determination of the orientation and thickness boundaries of layers, detecting areas with cracks, and correcting identified cracks based on data obtained in adjacent layers. Scharr and Sobel filters, morphological operations, and binarization were used to process the tomographic images. As a result of the application of the method for the studied PCM, crack density distributions in layers, ratios of long and short cracks, as well as statistical characteristics of the distributions obtained — representing the basis for analyzing PCM crack resistance necessary for the high-quality processing of PCM characterization tests — were obtained.

Keywords: composite materials; matrix cracking; computed tomography; filtration; binarization; morphological transformations

DOI: 10.14357/08696527260306 **EDN:** BNHSKA

Acknowledgments

The study was carried out under the Agreement for the provision of grant funding from the federal budget for large scientific projects in priority areas of scientific and technological development of the Russian Ministry of Science and Higher Education No. 075-15-2024-552.

References

1. Shen, H., W. Yao, W. Qi, and J. Zong. 2017. Experimental investigation on damage evolution in cross-ply laminates subjected to quasi-static and fatigue loading. *Compos. Part B — Eng.* 120:10–26. doi: 10.1016/j.compositesb.2017.02.033.
2. Li, X., J. Kupski, S. Teixeira De Freitas, R. Benedictus, and D. Zarouchas. 2020. Unfolding the early fatigue damage process for CFRP cross-ply laminates. *Int. J. Fatigue* 140:105820. 11 p. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2020.105820.
3. Kötter, B., J. Endres, J. Körbelin, *et al.* 2021. Fatigue and fatigue after impact behaviour of thin-and thick-ply composites observed by computed tomography. *Composites Part C Open Access* 5:100139. 12 p. doi: 10.1016/j.jcomc.2021.100139.
4. Abgaryan, K. K., and A. A. Zhuravlev. 2022. *Metody mnogomasshtabnogo modelirovaniya v zadachakh tsifrovogo materialovedeniya* [Methods of multiscale modeling in the problems of digital materials science]. Moscow: MAX Press. 120 p. doi: 10.29003/m3138.978-5-317-06870-7. EDN: ASHFBK.
5. Li, X., R. Benedictus, and D. Zarouchas. 2022. Early fatigue damage accumulation of CFRP Cross-Ply laminates considering size and stress level effects. *Int. J. Fatigue* 159:106811. 14 p. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2022.106811.
6. Abgaryan, K. K., N. L. Zagordan, and Y. D. Mochalova. 2023. Metod komp'yuternogo modelirovaniya uprugikh kharakteristik mnogosloynykh kompozitsionnykh materialov [Method for computer modeling of elastic characteristics of multilayer composite materials]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 33(4):92–101. doi: 10.14357/08696527230409. EDN: DPZJSX.
7. Panteleev, A. V., N. V. Turbin, I. S. Nadorov, and N. O. Kononov. 2025. Metaevristicheskie algoritmy dlya identifikatsii parametrov trekhmernoy modeli snizheniya ustalostnoy zhestkosti kompozitsionnykh materialov [Metaheuristic optimization algorithms of parametric identification of a three-dimensional model for reducing the fatigue stiffness of composite materials]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 35(4):73–91. doi: 10.14357/08696527250406. EDN: PTPHPN.
8. Yamaev, A. V., M. V. Chukalina, D. P. Nikolaev, A. V. Sheshkus, and A. I. Chulichkov. 2021. Neural network for data preprocessing in computed tomography. *Automat. Rem. Contr.* 82(10):1752–1762. doi: 10.1134/S000511792110012X. EDN: EWVEOZ.
9. Chukalina, M. V. 2025. Izmeritel'no-vychislitelnye metody rentgenovskoy diagnostiki dlya opredeleniya atomnoy i morfologicheskoy (prostranstvennoy) struktury materialov i izdeliy mikro- i nanoelektroniki [Measuring and computing methods of X-ray diagnostics for determining the atomic and morphological (spatial) structure of materials and products of micro- and nanoelectronics]. Chernogolovka. D.Sc. Diss. 327 p.

10. Wagner, P., O. Schwarzhaupt, and M. May. 2019. In-situ X-ray computed tomography of composites subjected to fatigue loading. *Mater. Lett.* 236:128–130. doi: 10.1016/j.matlet.2018.10.078.
11. Lizarralde, I., E. Sapountzi, T. Bénéthuilière, F. Sket, and C. González. 2022. An X-ray computed tomography analysis of damage induced by thermal cycling in non-crimp fabric composites. *Compos. Part A — Appl. S.* 152:106699. 10 p. doi: 10.1016/j.compositesa.2021.106699.
12. Li, L., X. Guo, and Y. Liu. 2022. Characterization of cyclic loading/unloading damage behavior in fiber-reinforced ceramic-matrix composites using inverse tangent modulus. *J. Eur. Ceram. Soc.* 42(5):1912–1927. doi: 10.1016/j.jeurceramsoc.2021.12.060.
13. Takahashi, K., R. Shoya, T. Matsuo, *et al.* 2022. X-ray nanoimaging of a transversely embedded carbon fiber in epoxy matrix under static and cyclic loads. *Sci. Rep. — U.K.* 12(1):8843. 12 p. doi: 10.1038/s41598-022-12724-1.
14. Ma, P. H., D.-Y. Hu, Y. Liu, *et al.* 2025. In-situ study on fatigue failure of plain woven SiC_f/SiC composites based on X-ray computed tomography. *J. Phys. Conf. Ser.* 2947(1):012002. 8 p. doi: 10.1088/1742-6596/2947/1/012002.
15. Li, L. 2025. Microscale model for crack opening/closure behavior in C/SiC composite under in-situ multi-step cyclic-fatigue loading. *Compos. Part B — Eng.* 925:113268. 23 p. doi: 10.1016/j.compositesb.2025.113268.
16. Schilling, P. J., B. R. Karedla, A. K. Tatiparthi, *et al.* 2005. X-ray computed microtomography of internal damage in fiber reinforced polymer matrix composites. *Compos. Sci. Technol.* 65(14):2071–2078. doi: 10.1016/j.compscitech.2005.05.014.
17. Rose, M., Niverty S., Schmidt B., *et al.* 2021. X-ray computer tomography (XCT) of fatigue damage in laser-machined versus milled carbon fiber reinforced polymer matrix composites. *Eng. Fract. Mech.* 252:107820. 21 p. doi: 10.1016/j.engfracmech.2021.107820.
18. Takahashi, K., T. Matsuo, K. Wakabayashi, *et al.* 2025. Influence of irradiation with synchrotron radiation X-ray on nano-scale CT for carbon fibers and epoxy matrix. *Compos. Part A — Appl. S.* 198:109060. 8 p. doi: 10.1016/j.compositesa.2025.109060.
19. Panteleev, A. V., N. V. Turbin, N. A. Tuchkov, R. L. Talya, and I. A. Akhmedov. 2025. Metodika kolichestvennoy otsenki stepeni rastreskivaniya sloistogo kompozita po dannym komp'yuternoy tomografii [Method for tomographic images processing for matrix cracking quantification in composite material]. *Trudy MAI* [Proceedings of MAI] 143:16. 60 p. EDN: YPLTJX. Available at: https://trudymai.ru/published.php?ID=185657 (accessed October 20, 2026).
20. Panteleev, A. V., N. V. Turbin, N. A. Tuchkov, R. L. Talya, and I. A. Akhmedov. 2025. Algoritm opredeleniya granits monosloev kompozitsionnogo materiala na osnove dannykh kompyuternoy tomografii [Algorithm for monolayer boundaries identification in composite material from computer tomography images]. *Trudy MAI* [Proceedings of MAI] 144:13. 52 p. EDN: OUPNNE. Available at: https://trudymai.ru/published.php?ID=186313 (accessed October 20, 2026).
21. Suzuki, S., and K. Abe. 1985. Topological structural analysis of digitized binary images by border following. *Comput. Vision Graph.* 30(1):32–46. doi: 10.1016/0734-189X(85)90016-7.
22. Gonzalez, R. C., and R. E. Woods. 2002. *Digital image processing*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall. 793 p.

23. Shapiro, L. G., and G. C. Stockman. 2001. *Computer vision*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall. 580 p.
24. Wang, J., J. Kosinka, and A. Telea. 2021. Spline-based medial axis transform representation of binary images. *Comput. Graph.* 98:165–176. doi: 10.1016/j.cag.2021.05.012.
25. Chen, C. C., and C. H. Peng. 2024. Topology-preserving downsampling of binary images. *Computer vision*. Eds. A. Leonardis, E. Ricci, S. Roth, *et al*. Lecture notes in computer science ser. Cham: Springer. 15078:416–431. doi: 10.1007/978-3-031-72661-3_24.

Received June 15, 2026
Accepted September 15, 2026

Contributors

Panteleev Andrei V. (b. 1955) — Doctor of Science in Physics and Mathematics, professor, Educational Center, Institute of Computer Sciences, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; avpanteleev@inbox.ru

Turbin Nikolay V. (b. 1989) — leading engineer, Advanced Engineering School, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; turbinnv@mai.ru

Tuchkov Nikolay A. (b. 2002) — assistant, Educational Center, Institute of Computer Sciences, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; tuchkov.nik@bk.ru

Talya Roman L. (b. 2003) — engineer, Scientific Center, Institute of Computer Sciences, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; r.talya@list.ru

Akchupanov Konstantin V. (b. 2002) — engineer, Department of Design and Certification of Aviation Equipment, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; akchupanovkv@mai.ru

Ibrishev Kirill K. (b. 2000) — engineer, Department of Design and Certification of Aviation Equipment, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125933, Russian Federation; ibrishevkk@mai.ru

ВЕЙВЛЕТ-НЕЙРОСЕТЕВОЙ СИНТЕЗ БИЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ*

***И. Н. Синицын*[1], *В. И. Синицын*[2], *Э. Р. Корепанов*[3], *Т. Д. Конашенкова*[4]**

Аннотация: Разработано методическое и алгоритмическое обеспечение вейвлет-нейросетевого синтеза оптимальной по критерию минимума среднеквадратичной ошибки (СКО) наблюдаемой многомерной билинейной стохастической системы (БЛСтС). Данная БЛСтС описывается уравнениями В. С. Пугачёва для входного и требуемого выходного стохастических процессов (СтП), зависящих от случайных параметров. В состав входного СтП входит нормальная случайная помеха, не зависящая от случайных параметров. Вектор случайных параметров задан плотностью распределения. Линейный оператор СКО-оптимальной системы находится при аналитическом решении операторного уравнения, связывающего начальный второй момент входного СтП и смешанный начальный второй момент входного и требуемого выходного СтП. Разработан алгоритм приближенного решения операторного уравнения с применением теории кратномасштабного анализа (КМА) и вейвлет-нейронной сети (ВНС). Случайная помеха аппроксимируется вейвлет-каноническим разложением (ВЛКР), построенным на основе ортонормированного базиса вейвлетов с компактными носителями. Названное ВЛКР случайной помехи строится на основе ВНС и обозначается как каноническое разложение (КР) ВНС (КРВНС). Входной СтП аппроксимируется приближенным СтП в виде линейной комбинации базисных вейвлетов со случайными коэффициентами. Оценка СКО-оптимального выходного СтП строится также в виде линейной комбинации базисных вейвлетов со случайными коэффициентами. Получены формулы для оценки точности метода в виде математического ожидания, второго начального момента и ковариационной матрицы ошибки СКО-оптимальной оценки выходного СтП.

Ключевые слова: билинейная стохастическая система; вейвлет; вейвлет-каноническое разложение; вейвлет-нейронная сеть; моделирование; оптимальная оценка; среднеквадратичный критерий; стохастический процесс; стохастическая система

DOI: 10.14357/08696527260307 **EDN:** BUJSNS

*Работа выполнена с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

[1]Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, sinitsin@dol.ru

[2]Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), vsinitsin@ipiran.ru

[3]Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, ekorepanov@ipiran.ru

[4]Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, tkonashenkova64@mail.ru

1 Введение

Билинейная стохастическая система представляет собой важный частный случай СтС со случайными параметрами. Билинейные СтС применяются для изучения функционирования различных прикладных динамических систем. Исследованиям в области анализа и синтеза БЛСтС посвящено множество работ (см., например [1–9]).

Авторы занимаются разработкой методов анализа и синтеза СтС на основе теории КР СтП [2]. В настоящей работе дано решение задачи синтеза оптимальной по критерию минимума СКО многомерной наблюдаемой БЛСтС, описываемой уравнениями В.Ċ. Пугачёва для входного СтП и требуемого выходного СтП, зависящих от случайных параметров. В состав входного СтП входит случайная помеха, независимая от случайных параметров. Данный СКО-оптимальный линейный оператор БЛСтС находится при решении операторного уравнения, связывающего второй начальный момент входного СтП и смешанный второй начальный момент входного и требуемого выходного СтП. Приближенный аналитический метод решения операторного уравнения разработан на основе общих принципов приближенного решения операторных уравнений [10] с применением теории КМА [11], нейросетевых технологий [12] и ВЛКР СтП [2]. Для построения ВЛКР СтП выбраны ортонормированные базисы вейвлетов с компактными носителями [11], одно из преимуществ которых заключается в возможности применить быстрые алгоритмы Малла [13] при вычислении коэффициентов вейвлет-разложений (ВЛР) по этим базисам. Предлагаемый приближенный метод решения операторного уравнения для многомерной СКО-оптимальной системы является обобщением на многомерный случай аналогичного приближенного аналитического метода решения операторного уравнения для одномерной СКО-оптимальной СтС [14, 15].

Преимущество базиса вейвлетов с компактными носителями заключается в существовании для этих базисов алгоритма Малла, позволяющего вычислять коэффициенты ВЛР функций, принадлежащих пространству $\mathcal{L}^2[t_0, t_k]$, без вычисления интегралов.

Для построения ВЛКР векторной случайной помехи на основе ортонормированного базиса вейвлетов с компактными носителями [11] разработан нейросетевой алгоритм с применением ВНС [16, 17], поэтому введено обозначение КРВНС [18]. Входной СтП аппроксимируется приближенным СтП, компоненты которого представлены в виде линейной комбинации базисных вейвлетов ортонормированного базиса с компактными носителями, выбранного при построении КРВНС случайной помехи. Названная СКО-оптимальная оценка требуемого выходного СтП определяется как результат воздействия СКО-оптимального линейного оператора БЛСтС на приближенный входной СтП.

В разд. 2 дана постановка задачи. В разд. 3 описан процесс построения приближенного операторного уравнения для нахождения СКО-оптимального оператора БЛСтС. В разд. 4 приведен нейросетевой алгоритм решения при-

ближенного операторного уравнения. В разд. 5 описан процесс построения СКО-оптимальной оценки требуемого выходного СтП. Приведен алгоритм компьютерного моделирования СКО-оценки выходного СтП БЛСтС. Для оценки точности метода получены формулы математического ожидания, второго начального момента и ковариационной матрицы ошибки СКО-оценки требуемого выходного СтП.

2 Постановка задачи

Рассмотрим БЛСтС, описываемую уравнениями В. С. Пугачёва для входного и требуемого выходного СтП. На вход БЛСтС поступает векторный СтП

$$Z(t) = [Z_1(t)\, Z_2(t) \cdots Z_{N_Z}(t)]^{\mathrm{T}},\ t \in [t_0, t_k].$$

Требуемый выходной СтП системы — вектор

$$W(t) = [W_1(t)\, W_2(t)\ \cdots\ W_{N_W}(t)]^{\mathrm{T}},\ t \in [t_0, t_k]\,.$$

Будем считать, что СтП $Z(t)$ и $W(t)$ заданы соответственно на вероятностных пространствах $(\mathsf{H}_Z, \mathcal{A}_Z, \mathcal{P}_Z)$ и $(\mathsf{H}_W, \mathcal{A}_W, \mathcal{P}_W)$. Здесь

$$\mathsf{H}_Z = \underbrace{\mathcal{L}^2[t_0, t_k] \times \mathcal{L}^2[t_0, t_k] \times \cdots \times \mathcal{L}^2[t_0, t_k]}_{N_Z};$$

$$\mathsf{H}_W = \underbrace{\mathcal{L}^2[t_0, t_k] \times \mathcal{L}^2[t_0, t_k] \times \cdots \times \mathcal{L}^2[t_0, t_k]}_{N_W},$$

где $\mathcal{L}^2[t_0, t_k]$ — гильбертово пространство функций $f(t)$ $(t \in [t_0, t_k])$ с нормой

$$\|f\| = \left[\int\limits_{t_0}^{t_k} |f(t)|^2\, dt\right]^{1/2};$$

$\mathcal{A}_Z$ — σ-алгебра в H_Z; $\mathcal{A}_W$ — σ-алгебра в H_W; $\mathcal{P}_Z(Z(t) = [z_1(t)\, z_2(t) \cdots \cdots z_{N_Z}(t)]^{\mathrm{T}})$ — вероятность события $Z(t) = [z_1(t)\, z_2(t) \cdots z_{N_Z}(t)]^{\mathrm{T}}$, $z_h(t) \in \in \mathcal{L}^2[t_0, t_k]$, $h = \overline{1, N_Z}$; $\mathcal{P}_W(W(t) = [w_1(t)\, w_2(t) \cdots w_{N_W}(t)]^{\mathrm{T}}$ — вероятность события

$$W(t) = [w_1(t)\, w_2(t)\ \cdots\ w_{N_W}(t)]^{\mathrm{T}},\ w_p(t) \in \mathcal{L}^2[t_0, t_k],\ p = \overline{1, N_W}\,.$$

Входной и требуемый выходной СтП зависят от векторной случайной величины (СВ) $U = [U_1\, U_2 \ldots U_{N_U}]^{\mathrm{T}}$ с заданной плотностью $f_U(u)$ и конечными

математическим ожиданием $m^U = [m_1^U\, m_2^U\, \cdots\, m_{N_U}^U]^{\mathrm{T}}$ и ковариационной матрицей $K^U = \|K_{pq}^U\|_{p,q=1}^{N_U}$. В состав входного СтП входит нормальная случайная помеха $X(t) = [X_1(t)\, X_2(t)\, \cdots\, X_{N_Z}(t)]^{\mathrm{T}}$ с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $K^X(t_1, t_2) = \|K_{hl}^X(t_1, t_2)\|_{h,l=1}^{N_Z}$.

Входной СтП $Z(t)$ описывается билинейным уравнением относительно СВ U и случайной помехи $X(t)$:

$$Z(t) = \xi(t)U + (B_0 + BU)\, X(t), \tag{1}$$

где $\xi(t) = \|\xi_{hr}(t)\|_{h,r=1}^{N_Z,N_U}$, $\xi_{hr}(t) \in \mathcal{L}^2[t_0, t_k]$ — заданные структурные функции; $B_0 = [b_{01}\, b_{02}\, \cdots\, b_{0N_Z}]^{\mathrm{T}}$; $B = \|b_{hr}\|_{h,r=1}^{N_Z,N_U}$, $b_{h0} = const$, $b_{hr} = const$. Отсюда уравнения для компонентов СтП $Z(t)$ имеют вид:

$$Z_h(t) = \sum_{r=1}^{N_U} \xi_{hr}(t)U_r + \left(b_{h0} + \sum_{r=1}^{N_U} b_{hr}U_r\right) X_h(t)\,, \quad h = \overline{1, N_Z}\,. \tag{2}$$

Требуемый выходной СтП $W(t)$ не должен содержать помеху и задан уравнением

$$W(t) = \zeta(t)U\,, \tag{3}$$

где $\zeta(t) = \|\eta_{pr}(t)\|_{p,r=1}^{N_W,N_U}$, $\zeta_{pr}(t) \in \mathcal{L}^2[t_0, t_k]$, — заданные структурные функции. Уравнения для компонентов СтП $W(t)$ имеют вид:

$$W_p(t) = \sum_{r=1}^{N_U} \zeta_{pr}(t)U_r\,, \quad p = \overline{1, N_W}\,. \tag{4}$$

Для БЛСтС (1)–(4) требуется найти оптимальную СтС, удовлетворяющую следующим условиям:

– выходной СтП $W^*(t) = [W_1^*(t)\, W_2^*(t)\, \cdots\, W_{N_W}^*(t)]^{\mathrm{T}}$ оптимальной СтС удовлетворяет уравнению с оператором $A_t = \|A_t^{ph}\|_{p,h=1}^{N_W,N_U}$:

$$W^*(t) = A_t Z(t)\,; \tag{5}$$

– выходной СтП $W^* = W^*(t)$ обеспечивает минимум математического ожидания СКО $l(\Delta) = \mathrm{tr}\,[\Delta \cdot \Delta^{\mathrm{T}}]$, $\Delta t = W(t) - W^*(t)$:

$$\mathsf{M}\left[\mathrm{tr}\left\{(W(t) - W^*(t))\,(W(t) - W^*(t))^{\mathrm{T}}\right\}\right] = \min\,.$$

Стохастический процесс $W^*(t)$ далее будем называть СКО-оценкой требуемого СтП $W(t)$.

3 Аппроксимация операторного уравнения синтеза по критерию среднеквадратичной ошибки

Пусть A_t принадлежит классу линейных операторов, тогда известно уравнение, определяющее оператор СтС, оптимальной по среднеквадратичному критерию [2]:

$$A_t\left[\mathsf{M}\left[Z(t)Z(\tau)^{\mathrm{T}}\right]\right] = \mathsf{M}\left[W(t)Z(\tau)^{\mathrm{T}}\right],\ \ t,\tau\in[t_0,t_k]. \tag{6}$$

Введем обозначения:

$$\mathsf{M}\left[Z(t)Z(\tau)^{\mathrm{T}}\right] = \Gamma^{ZZ}(t,\tau);\ \ \mathsf{M}\left[W(t)Z(\tau)^{\mathrm{T}}\right] = \Gamma^{WZ}(t,\tau).$$

Тогда уравнение (6) можно переписать в виде:

$$A_t\left[\Gamma^{ZZ}(t,\tau)\right] = \Gamma^{WZ}(t,\tau),\ \ t,\tau\in[t_0,t_k]. \tag{7}$$

Учитывая, что $\Gamma^{ZZ}(t,\tau) = \|\Gamma^{ZZ}_{hl}(t,\tau)\|_{h,l=1}^{N_Z}$ и $\Gamma^{WZ}(t,\tau) = \|\Gamma^{WZ}_{ph}(t,\tau)\|_{p,h=1}^{N_W,N_Z}$, а элементами матричного оператора A_t служат операторы $A_t^{ph} : \mathcal{L}^2[t_0,t_k] \to \to \mathcal{L}^2[t_0,t_k]$, представим операторное уравнение (7) в виде системы операторных уравнений:

$$\sum_{h=1}^{N_Z} A_t^{ph}\left[\Gamma^{ZZ}_{hl}(t,\tau)\right] = \Gamma^{WZ}_{pl}(t,\tau),\ \ t,\tau\in[t_0,t_k],\ p=\overline{1,N_W},\ l=\overline{1,N_Z}\,. \tag{8}$$

Случайные величины U и СтП $X(t)$ независимы, поэтому согласно (2) начальные моменты второго порядка компонентов СтП $Z(t)$ для $t,\tau\in[t_0,t_k]$ вычисляются по формулам:

$$\Gamma^{ZZ}_{hl}(t,\tau) = \mathsf{M}\left[Z_h(t)Z_l(\tau)\right] = \sum_{r_1=1}^{N_U}\sum_{r_2=1}^{N_U}\xi_{hr_1}(t)\xi^2_{lr_2}(\tau)\gamma^U_{r_1r_2} +$$

$$+\left(b_{0h}b_{0l} + \sum_{r=1}^{N_U}\left(b_{0h}b_{lr}+b_{0l}b_{hr}\right)m^U_r + \sum_{r_1=1}^{N_U}\sum_{r_2=1}^{N_U}b_{hp}b_{lq}\gamma^U_{r_1r_2}\right)K^X_{hl}(t,\tau),$$

$$h,l=\overline{1,N_Z},\ \gamma^U_{r_1r_2} = \mathsf{M}\left[U_{r_1}U_{r_2}\right].$$

Согласно (2) и (4) и учитывая независимость СВ U и СтП $X(t)$, имеем следующие формулы для вычисления смешанных начальных моментов второго порядка компонентов СтП $Z(t)$ и $W(t)$ для $t,\tau\in[t_0,t_k]$:

$$\Gamma^{WZ}_{ph}(t,\tau) = \mathsf{M}[W_p(t)Z_h(\tau)] = \sum_{r_1=1}^{N_U}\sum_{r_2=1}^{N_U}\zeta_p(t)\xi_h(\tau)\gamma^U_{r_1r_2},\ \ p=\overline{1,N_W},\ h=\overline{1,N_Z}\,.$$

В пространстве $\mathcal{L}^2[t_0, t_k]$ зададим ортонормированный базис вейвлетов с компактными носителями $\{g_\nu(t)\}_{\nu=1}^{\infty}$ [11]. В пространстве $\mathcal{L}^2([t_0, t_k] \times [t_0, t_k])$ определим ортонормированный базис путем тензорного произведения двух вейвлет-базисов $\{g_\nu(t)\}_{\nu=1}^{\infty}$ в виде $\{g_\nu(t)g_\mu(\tau)\}_{\nu,\mu=1}^{\infty}$. Функции $\Gamma_{hl}^{ZZ}(t,\tau)$, $\Gamma_{pl}^{WZ}(t,\tau) \in \mathcal{L}^2([t_0, t_k] \times [t_0, t_k])$ можно представить как суммы вейвлет-рядов

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_{hl}^{ZZL}(t,\tau) &= \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} \gamma_{hl\nu\mu}^{ZZ} g_\nu(t)g_\mu(\tau)\,; \\ \Gamma_{ph}^{WZL}(t,\tau) &= \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} \gamma_{ph\nu\mu}^{WZ} g_\nu(t)g_\mu(\tau) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

с коэффициентами

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{hl\nu\mu}^{ZZ} &= \int_{t_0}^{t_k}\int_{t_0}^{t_k} \Gamma_{hl}^{ZZL}(t,\tau)g_\nu(t)g_\mu(\tau)\,dtd\tau\,; \\ \gamma_{pl\nu\mu}^{WZ} &= \int_{t_0}^{t_k}\int_{t_0}^{t_k} \Gamma_{pl}^{WZL}(t,\tau)g_\nu(t)g_\mu(\tau)\,dtd\tau\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

После подстановки (9) в (8) получим систему операторных уравнений

$$\sum_{h=1}^{N_Z}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} \gamma_{hl\nu\mu}^{ZZ} A_t^{ph}[g_\nu(t)]g_\mu(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} \gamma_{ph\nu\mu}^{WZ} g_\nu(t)g_\mu(\tau),$$
$$t,\tau \in [t_0, t_k];\ p = \overline{1, N_W};\ l = \overline{1, N_Z}\,. \tag{11}$$

Определим элементарные операторы $A_t^{ph} : \mathcal{L}^2[t_0, t_k] \to \mathcal{L}^2[t_0, t_k]$ следующим образом:

$$A_t^{ph}\,[g_\nu(t)] = f_\nu^{ph}(t). \tag{12}$$

После подстановки (12) в (11) имеем:

$$\sum_{h=1}^{N_Z}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} \gamma_{hl\nu\mu}^{ZZ} f_\nu^{ph}(t)g_\mu(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} \gamma_{ph\nu\mu}^{WZ} g_\nu(t)g_\mu(\tau),$$
$$t,\tau \in [t_0, t_k];\ p = \overline{1, N_W}\,;\ l = \overline{1, N_Z}\,. \tag{13}$$

Представим функции $f_{\mu}^{phL}(t)$ в виде линейной комбинации базисных вейвлетов пространства $\mathcal{L}^2[t_0, t_k]$:

$$f_{\nu}^{ph}(t) = \sum_{\theta=1}^{\infty} \alpha_{\nu\theta}^{ph} g_{\theta}(t)\,, \quad \alpha_{\nu\theta}^{ph} = \int_{t_0}^{t_k} f_{\nu}^{ph}(t) g_{\nu}(t)\, dt\,. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13), получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\alpha_{\nu\theta}^{ph}$:

$$\sum_{h=1}^{N_Z} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \gamma_{hl\nu\mu}^{ZZ} g_{\mu}(\tau) \sum_{\theta=1}^{\infty} \alpha_{\nu\theta}^{ph} g_{\theta}(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \gamma_{ph\nu\mu}^{WZ} g_{\nu}(t) g_{\mu}(\tau),$$
$$t, \tau \in [t_0, t_k],\ p = \overline{1, N_W},\ l = \overline{1, N_Z}\,. \tag{15}$$

Для приближенного решения уравнений (15) относительно бесконечного числа неизвестных параметров $\alpha_{\nu\theta}^{ph}$ необходимо заменить их уравнениями, зависящими от конечного числа неизвестных параметров [10].

Кратномасштабный анализ [11] позволяет определить последовательность вложенных подпространств $\mathcal{L}_J^2[t_0, t_k]$ пространства $\mathcal{L}^2[t_0, t_k]$ с максимальным уровнем вейвлет-разрешения $J = 1, 2, 3, \ldots$, в каждом из которых можно построить ортонормированный базис вейвлетов с компактными носителями $\{g_{\nu}(t)\}_{\nu=1}^{L}$ с конечным числом базисных вейвлетов $L = 2^{J+1}$. Определим операторы проектирования $Q_J : \mathcal{L}^2[t_0, t_k] \to \mathcal{L}_J^2[t_0, t_k]$, которые ставят в соответствие каждой функции, принадлежащей $\mathcal{L}^2[t_0, t_k]$, ее проекцию в виде конечной линейной комбинации базисных вейвлетов $g_{\nu}(t)$, $\nu = \overline{1, L}$.

Согласно свойствам КМА зададим последовательность вложенных подпространств $\mathcal{L}_J^2([t_0, t_k] \times [t_0, t_k])$, $J = 0, 1, 2, \ldots$, пространства $\mathcal{L}^2([t_0, t_k] \times [t_0, t_k])$. В каждом подпространстве $\mathcal{L}_J^2([t_0, t_k] \times [t_0, t_k])$ определим соответствующий вейвлет-базис $\{g_{\nu}(t) g_{\mu}(\tau)\}_{\nu,\mu=1}^{L}$ с конечным числом базисных вейвлетов, равным L^2. Определим операторы проектирования

$$\mathcal{P}_J : \mathcal{L}^2([t_0, t_k] \times [t_0, t_k]) \to \mathcal{L}_J^2([t_0, t_k] \times [t_0, t_k]),$$

которые ставят в соответствие каждой функции, принадлежащей пространству $\mathcal{L}^2([t_0, t_k] \times [t_0, t_k])$, ее проекцию в виде конечной линейной комбинации базисных вейвлетов $g_{\nu}(t) g_{\mu}(\tau)$, $\nu, \mu = \overline{1, L}$.

Далее, во-первых, в уравнениях (8) аппроксимируем операторы

$$A_t^{ph} : \mathcal{L}^2[t_0, t_k] \to \mathcal{L}^2[t_0, t_k]$$

линейными операторами

$$A_t^{phL} = Q_J A_t^{ph},\ \ A_t^{phL} : \mathcal{L}_J^2[t_0,t_k] \to \mathcal{L}_J^2[t_0,t_k],\ \ A_t^{phL}[g_\nu(t)] = f_v^{phL}(t),$$
$$\nu = \overline{1,L},\ \ f_v^{phL}(t) = Q_J\left(f_\nu^{ph}(t)\right) = \sum_{\theta=1}^{L} \alpha_{\nu\theta}^{phL} g_\theta(t); \quad (16)$$

во-вторых, в уравнениях (8) аппроксимируем функции $\Gamma_{hl}^{ZZ}(t,\tau), \Gamma_{pl}^{WZ}(t,\tau) \in \in \mathcal{L}^2([t_0,t_k]\times[t_0,t_k])$ их проекциями $\Gamma_{hl}^{ZZL}(t,\tau), \Gamma_{pl}^{WZL}(t,\tau) \in \mathcal{L}_J^2([t_0,t_k]\times \times [t_0,t_k])$; в-третьих, учтем, что из определения КМА [11] следуют предельные соотношения для $t,\tau \in [t_0,t_k]$:

$$\lim_{L\to\infty} \Gamma_{hl}^{ZZL}(t,\tau) = \Gamma_{hl}^{ZZ}(t,\tau);\ \ \lim_{L\to\infty} \Gamma_{pl}^{WZL}(t,\tau) = \Gamma_{pl}^{WZ}(t,\tau).$$

Тогда уравнения (15) заменятся приближенными уравнениями относительно конечного числа неизвестных параметров $\alpha_{\nu\theta}^{phL}$:

$$\sum_{h=1}^{N_Z}\sum_{\nu=1}^{L}\sum_{\mu=1}^{L} \gamma_{hl\nu\mu}^{ZZ} g_\mu(\tau) \sum_{\theta=1}^{L} \alpha_{\nu\theta}^{ph} g_\theta(t) = \sum_{\nu=1}^{L}\sum_{\mu=1}^{L} \gamma_{ph\nu\mu}^{WZ} g_\nu(t) g_\mu(\tau),$$
$$t,\tau \in [t_0,t_k],\ p = \overline{1,N_W}\,,\ l = \overline{1,N_Z}\,. \quad (17)$$

Наконец, как известно [10], по определению последовательность операторов $\{A_t^{phL}\},\ A_t^{phL} : \mathcal{L}_J^2[t_0,t_k] \to \mathcal{L}_J^2[t_0,t_k]$, называется сходящейся к оператору $A_t^{ph} : \mathcal{L}^2[t_0,t_k] \to \mathcal{L}^2[t_0,t_k]$ при $L\to\infty$ для $g_\nu(t) \in \mathcal{L}_J^2[t_0,t_k]$, $\nu = \overline{1,L}$, если выполнены условия:

(1) для $\nu = \overline{1,L}$ последовательность $\{f_\nu^{phL}(t)\}$ сходится к $f_\nu^{ph}(t)$ при $L\to\infty$;

(2) для $\nu = \overline{1,L}$

$$\left\| A_t^{phL}\left[g_\nu(t)\right] - Q_J A_t^{ph}\left[g_\nu(t)\right] \right\| \to 0 \text{ при } L\to\infty\,. \quad (18)$$

Первое условие выполняется согласно свойствам КМА [11]. Второе условие выполняется в силу (16), поскольку

$$A_t^{phL}[g_\nu(t)] - Q_J A_t^{ph}[g_\nu(t)] = Q_J A_t^{ph}[g_\nu(t)] - Q_J A_t^{ph}[g_\nu(t)] = 0\,. \quad (19)$$

В итоге доказано

Утверждение 1. *Для БЛСтС* (1)–(4) *уравнения ковариационного СКО-синтеза определяются уравнениями* (8), (15), (17). *Последовательность операторов* $\{A_t^{phL}\},\ A_t^{phL} : \mathcal{L}_J^2[t_0,t_k] \to \mathcal{L}_J^2[t_0,t_k]$, *в силу* (18), (19) *сходится к оператору* $A_t^{ph} : \mathcal{L}^2[t_0,t_k] \to \mathcal{L}^2[t_0,t_k]$ *приL* $\to\infty$ *для* $g_\nu(t) \in \mathcal{L}_J^2[t_0,t_k]$, $\nu = \overline{1,L}$.

4 Нейросетевой алгоритм решения приближенного операторного уравнения синтеза по критерию среднеквадратичной ошибки

Для решения системы линейных операторных уравнений (17) применим нейросетевые технологии. Для этого рассмотрим задачу аппроксимации известных функций $\Gamma_{pl}^{WZ}(t,\tau)$, $p=\overline{1,N_W}$, $l=\overline{1,N_Z}$, $t,\tau\in[t_0,t_k]$, линейной зависимостью двумерных заданных вейвлет-функций

$$\rho_{hl\nu\theta}^{ZZ}(t,\tau)=g_\theta(t)\sum_{\mu=1}^{L}\gamma_{hl\nu\mu}^{ZZ}g_\mu(\tau)$$

с неизвестными коэффициентами $\alpha_{\nu\theta}^{ph}$, $p=\overline{1,N_W}$, $h=\overline{1,N_Z}$, $\nu,\theta=\overline{1,L}$:

$$\Gamma_{pl}^{WZL}(t,\tau)=\sum_{\nu=1}^{L}\sum_{\theta=1}^{L}\sum_{h=1}^{N_Z}\alpha_{\nu\theta}^{ph}\rho_{hl\nu\theta}^{ZZ}(t,\tau).$$

Вычислим значения функций $\Gamma_{pl}^{WZ}(t,\tau)$ и $\rho_{hl\nu\theta}^{ZZ}(t,\tau)$ в точках

$$t_i=t_0+i\frac{\delta t}{2}\,,\ \ \tau_j=t_0+j\frac{\delta\tau}{2}\,,\ \ \delta t=\frac{t_k-t_0}{L}\,,\ i,j=\overline{1,L}\,, \tag{20}$$

введем обозначения $\Gamma_{plij}^{WZ}=\Gamma_{pl}^{WZ}(t_i,t_j)$, $\rho_{hl\nu\theta ij}^{ZZ}=\rho_{hl\nu\theta}^{ZZ}(t_i,t_j)$ и построим функцию стоимости

$$E^{\Gamma}(\alpha)=\frac{1}{2N_WN_ZL^2}\sum_{p=1}^{N_W}\sum_{l=1}^{N_Z}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\left(\Gamma_{plij}^{WZ}-\sum_{\nu=1}^{L}\sum_{\theta=1}^{L}\sum_{h=1}^{N_Z}\alpha_{\nu\theta}^{ph}\rho_{hl\nu\theta}^{ZZ}(t,\tau)\right)^2, \tag{21}$$

или

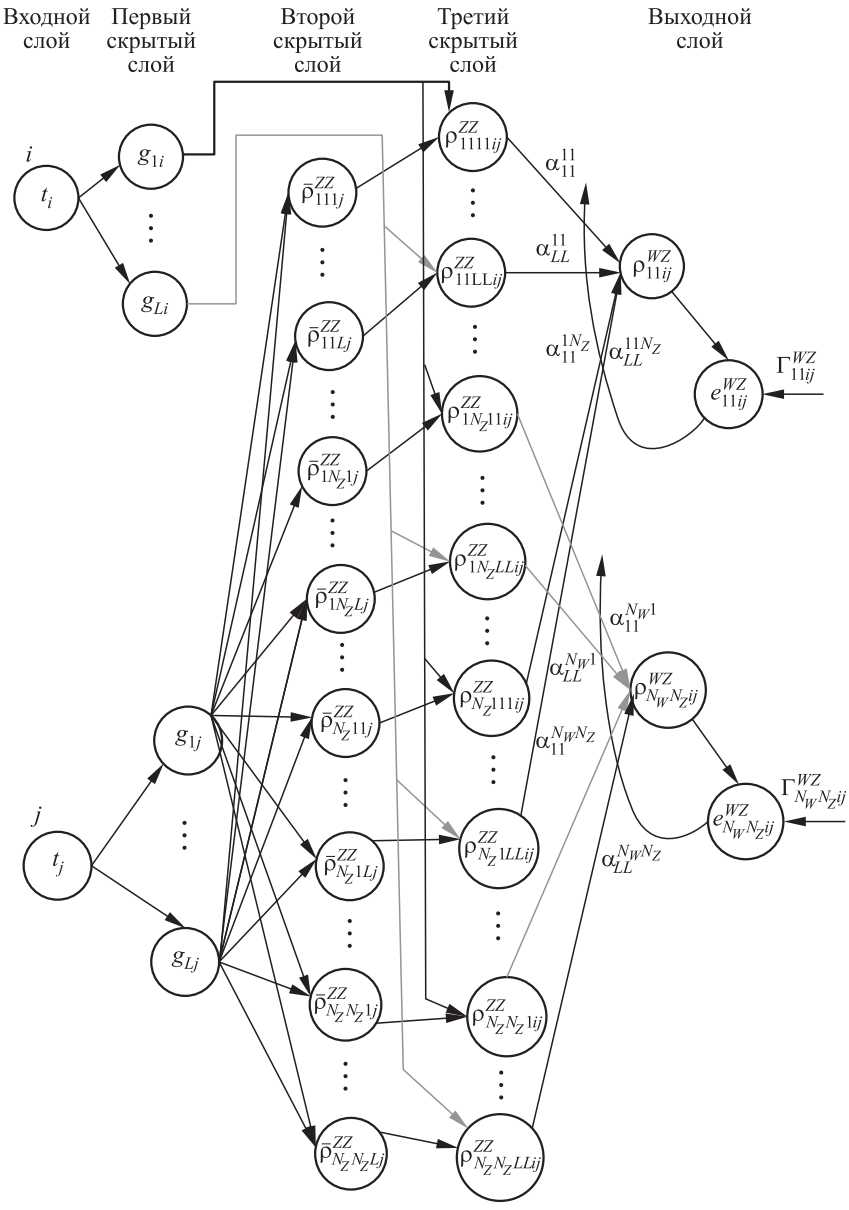
$$E^{\Gamma}(\alpha)=\frac{1}{2N_WN_ZL^2}\sum_{p=1}^{N_W}\sum_{l=1}^{N_Z}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\left(e_{plij}^{WZ}\right)^2,$$

где

$$e_{plij}^{WZ}=\Gamma_{plij}^{WZ}-\sum_{\nu=1}^{L}\sum_{\theta=1}^{L}\sum_{h=1}^{N_Z}\alpha_{\nu\theta}^{ph}\rho_{hl\nu\theta}^{ZZ}(t,\tau).$$

В результате задача построения линейного оператора $A_t=\|A_t^{phL}\|_{p,h=1}^{N_W,N_Z}$ сведена к нахождению оптимальных значений коэффициентов $\alpha_{\nu\theta}^{ph}$, $p=\overline{1,N_W}$, $h=\overline{1,N_Z}$, $\nu,\theta=\overline{1,L}$, при которых функция стоимости (21) принимает минимальное значение.

Для решения поставленной задачи построим многослойную ВНС (см. рисунок) со следующей структурой:



Архитектура ВНС

– входной слой: t_i, t_j, $i, j = \overline{1, L}$, вычисляемые по формулам (20);
– первый скрытый слой вычисляет значения базисных функций $g_{\theta i} = g_\theta(t_i)$ и $g_{\mu j} = g_\mu(t_j)$, $\theta, \mu = \overline{1, L}$;
– второй скрытый слой вычисляет значения функций

$$\overline{\rho}^{ZZ}_{hl\nu j} = \overline{\rho}^{ZZ}_{hl\nu}(t_j) = \sum_{\mu=1}^{L} \gamma^{ZZ}_{hl\nu\mu} g_\mu(t_j), \;\; h, l = \overline{1, N_Z}\,, \; \nu = \overline{1, L}\,;$$

– третий скрытый слой вычисляет значения функций

$$\rho^{ZZ}_{hl\nu\theta ij} = \rho^{ZZ}_{hl\nu\theta}(t_i, t_j) = g_\theta(t_i)\overline{\rho}^{ZZ}_{hl\nu}(t_j), \;\; h, l = \overline{1, N_Z}, \; \nu, \theta = \overline{1, L}\,;$$

– выходной слой вычисляет значения фактического отклика сети

$$\rho^{WZ}_{plij} = \rho^{WZ}_{pl}(t_i, t_j) = \sum_{\nu=1}^{L}\sum_{\theta=1}^{L}\sum_{h=1}^{N_Z} \alpha^{ph}_{\nu\theta}\rho^{ZZ}_{hl\nu\theta}(t_i, t_j), \;\; p = \overline{1, N_W}, \; l = \overline{1, N_Z}\,.$$

Сеть содержит пять слоев, в том числе три скрытых. Обучаемыми параметрами служат синаптические веса $\alpha^{ph}_{\nu\theta}$, $p = \overline{1, N_W}$, $h = \overline{1, N_Z}$, $\nu, \theta = \overline{1, L}$. Для обучения ВНС применяется пакетный режим обучения с учителем методом обратного распространения ошибки [12]. Начиная с исходных значений весов $\alpha^{ph}_{\nu\theta}(0) = \alpha^{ph}_{\nu\theta 0}$, $p = \overline{1, N_W}$, $h = \overline{1, N_Z}$, $\nu, \theta = \overline{1, L}$, генерируется последовательность весовых коэффициентов $\alpha^{ph}_{\nu\theta}(1), \alpha^{ph}_{\nu\theta}(2), \ldots$, $p = \overline{1, N_W}$, $h = \overline{1, N_Z}$, $\nu, \theta = \overline{1, L}$, таких что при переходе от n-й итерации алгоритма к $(n+1)$-й выполняется условие $E^\Gamma(\alpha(n+1)) \le E^\Gamma(\alpha(n))$, а значения весовых коэффициентов стабилизируются около оптимальных значений $\alpha^{ph^*}_{\nu\theta}$, $p = \overline{1, N_W}$, $h = \overline{1, N_Z}$, $\nu, \theta = \overline{1, L}$. Корректировка весов осуществляется по формуле:

$$\alpha^{ph}_{\nu\theta}(n+1) = \alpha^{ph}_{\nu\theta}(n) - \eta q^{ph}_{\nu\theta}(n), \tag{22}$$

где

$$q^{ph}_{\nu\theta}(n) = \frac{\partial E^\Gamma(\alpha)}{\partial \alpha^{ph}_{\nu\theta}} =$$
$$= -\frac{1}{N_W N_Z L^2}\sum_{r=1}^{N_W}\sum_{l=1}^{N_Z}\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\left(\Gamma^{WZ}_{plij} - \sum_{\nu=1}^{L}\sum_{\theta=1}^{L}\sum_{h=1}^{N_Z}\alpha^{ph}_{\nu\theta}\rho^{ZZ}_{hl\nu\theta ij}\right)\rho^{ZZ}_{hl\nu\theta ij};$$

$\eta = const$ — параметр скорости обучения, $0 < \eta < 1$.

В итоге в условиях утверждения 1 имеем следующий алгоритм определения параметров линейного оператора $A_t^L = \|A_t^{phL}\|_{p,h=1}^{N_W,N_Z}$.

Алгоритм 1. Нейросетевой алгоритм решения приближенного операторного уравнения СКО-синтеза.

1. Генерация множества обучающих примеров в виде совокупности значений параметра времени t_i, t_j, $i,j = \overline{1,L}$, согласно (20) и соответствующих значений смешанных вторых начальных моментов входного и выходного СтП $\Gamma^{WZ}(t_i,t_j) = \|\Gamma_{phij}^{WZ}\|_{p,h=1}^{N_W,N_Z}$. Задание значений вторых начальных моментов входного СтП $\Gamma^{ZZ}(t_i,t_j) = \|\Gamma_{hlij}^{ZZ}\|_{h,l=1}^{N_Z,N_Z}$.
2. Определение коэффициентов $\gamma_{hl\nu\mu}^{ZZ}$, $h,l = \overline{1,N_Z}$, $\nu,\mu = \overline{1,L}$, согласно (10) с помощью алгоритма Малла [13].
3. Задание параметра скорости обучения $0 < \eta < 1$ и параметра $0 < \delta^E < 1$.
4. Инициализация весов. При $n = 0$ $\alpha_{\nu\theta}^{ph}(0) = \alpha_{\nu\theta 0}^{ph}$, $p = \overline{1,N_W}$, $h = \overline{1,N_Z}$, $\nu,\theta = \overline{1,L}$.
5. Вычисление функций первого скрытого слоя $g_{\theta i} = g_\theta(t_i)$ и $g_{\mu j} = g_\mu(t_j)$, $\theta,\mu = \overline{1,L}$, $i,j = \overline{1,L}$.
6. Вычисление функций второго скрытого слоя $\overline{\rho}_{hl\nu j}^{ZZ}$, $h,l = \overline{1,N_Z}$, $\nu,j = \overline{1,L}$.
7. Вычисление функций третьего скрытого слоя $\rho_{hl\nu\theta ij}^{ZZ}$, $h,l = \overline{1,N_Z}$, $\nu,\theta,i,j = \overline{1,L}$.
8. Вычисление функций выходного слоя ρ_{plij}^{WZ}, $p = \overline{1,N_W}$, $l = \overline{1,N_Z}$, $\nu,\theta = \overline{1,L}$.
9. Вычисление значения функции стоимости по формуле (21). Начиная с третьего шага при $h = 3$ проверка условия окончания адаптации весов: $|E^\Gamma(\alpha(n+1)) - E^\Gamma(\alpha(n))| \le \delta^E$.
   Если условие выполняется, выход из алгоритма, в противном случае переход к п. 10.
10. Адаптация весов. Изменение весов по формуле (22).
11. Увеличение номера итерации n на 1 и возвращение к п. 8.

5 Синтез оценки выходного стохастического процесса по критерию среднеквадратичной ошибки

Для построения СКО-оценки выходного СтП представим входной СтП в виде вейвлет-ряда. Для этого вначале построим КРВНС случайной помехи $X(t)$ [18] в виде

$$X^L(t) = \sum_{\nu=1}^{L} V_\nu^X \kappa_\nu^L(t)\,, \quad X_h^L(t) = \sum_{\nu=1}^{L} V_\nu^X \kappa_{\nu h}^L(t)\,, \quad h = \overline{1, N_Z}\,, \tag{23}$$

где V_ν^X — некоррелированные СВ с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\mathsf{D}_\nu^X = 1$; $\kappa_\nu^L(t) = [\kappa_{\nu 1}^L(t)\, \kappa_{\nu 2}^L(t) \cdots \kappa_{\nu N_Z}^L(t)]^{\mathrm{T}}$ — векторные координатные функции. Скалярные координатные функции $\kappa_{\nu h}^L(t) \in \mathcal{L}^2[t_0, t_k]$, $\nu = \overline{1, L}$, $h = \overline{1, N_Z}$, представляют собой линейные комбинации базисных вейвлет-функций

$$\kappa_{\nu h}^L(t) = \sum_{\mu=1}^{L} c_\mu^{\nu h} g_\mu(t), \quad h = \overline{1, N_Z}\,. \tag{24}$$

В уравнениях (2) функции $\xi_{hr}(t) \in \mathcal{L}^2[t_0, t_k]$, $h = \overline{1, N_Z}$, $r = \overline{1, N_U}$, аппроксимируем конечными суммами (бесконечных в пространстве $\mathcal{L}^2[t_0, t_k]$) вейвлет-рядов

$$\xi_{hr}^L(t) = \sum_{\nu=1}^{L} \beta_\nu^{hr} g_\nu(t)\,, \quad \beta_\nu^{hr} = \int_{t_0}^{t_k} \xi_{hr}(t) g_\nu(t)\, dt. \tag{25}$$

Для входного СтП $Z(t)$ построим последовательность СтП $Z^L(t) = [Z_1^L(t)\, Z_2^L(t) \cdots Z_{N_Z}^L(t)]^{\mathrm{T}}$, компоненты которого имеют вид:

$$Z_h^L(t) = \sum_{r=1}^{N_U} U_r \xi_{hr}^L(t) + \left(b_{h0} + \sum_{r=1}^{N_U} b_{hr} U_r \right) X_h^L(t), \quad h = \overline{1, N_Z}\,.$$

Как известно [2], $X^L(t)$ сходится в среднем квадратичном к $X(t)$ при $L \to \infty$. Согласно свойствам КМА, $\xi_{hr}^L(t) \to \xi_{hr}(t)$, $h = \overline{1, N_z}$, $r = \overline{1, N_U}$, при $L \to \infty$ для $t \in [t_0, t_k]$. По условию задачи СВ U и помеха $X(t)$ независимы, СВ U имеет конечные вероятностные моменты. Следовательно, для любых $t \in [t_0, t_k]$ справедливы соотношения:

$$\mathsf{M}\left[Z_h(t) - Z_h^L(t)\right]^2 =$$
$$= \mathsf{M}\left[\sum_{r=1}^{N_U} U_r \left(\xi_{hr}(t) - \xi_{hr}^L(t) \right) + \left(b_{h0} + \sum_{r=1}^{N_U} b_{hr} U_r \right) \left(X_h(t) - X_h^L(t) \right) \right]^2 =$$

$$= \mathsf{M}\left[\sum_{r=1}^{N_U} U_r\left(\xi_{hr}(t) - \xi_{hr}^L(t)\right)\right]^2 +$$

$$+ \mathsf{M}\left[b_{h0} + \sum_{r=1}^{N_U} b_{hr}U_r\right]^2 \mathsf{M}\left[X_h(t) - X_h^L(t)\right]^2 \to 0 \text{ при } L \to 0 \text{ для } h = \overline{1, N_Z}\,.$$

Доказано следующее

Утверждение 2. *Последовательность СтП $Z^L(t)$ сходится в среднем квадратичном к СтП $Z(t)$ при $L \to \infty$ для каждого фиксированного $t \in [t_0, t_k]$.*

Учитывая (23)–(25), представим компоненты СтП $Z^L(t)$ в виде ВЛР:

$$Z_h(t) = \sum_{r=1}^{N_U} U_r \sum_{\nu=1}^{L} \beta_\nu^{hr} g_\nu(t) + \left(b_{h0} + \sum_{r=1}^{N_U} b_{hr}U_r\right) \sum_{\nu=1}^{L} V_\nu^X \sum_{\mu=1}^{L} c_\mu^{\nu h} g_\mu(t) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{L}\left(\sum_{\nu=1}^{L} c_\mu^{\nu h}\left(b_{h0} + \sum_{r=1}^{N_U} b_{hr}U_r\right) V_\nu^X + \beta_\mu^{hr}\sum_{r=1}^{N_U} U_r\right) g_\mu(t), \quad h = \overline{1, N_Z}\,. \quad (26)$$

Согласно уравнению (5) приближенную СКО-оценку $W^{L^*}(t)$ требуемого выходного СтП $W(t)$ можно записать в виде:

$$W^{L^*}(t) = A_t^L Z^L(t)\,,$$

или

$$W_p^{L^*}(t) = \sum_{h=1}^{N_Z} A_t^{phL}\left[Z_h^L(t)\right]\,, \quad p = \overline{1, N_W}\,. \quad (27)$$

Подставляя (26) в (27), имеем:

$$W_p^{L^*}(t) = \sum_{h=1}^{N_Z}\sum_{\mu=1}^{L}\left(\sum_{\nu=1}^{L} c_\mu^{\nu h}\left(b_{h0} + \sum_{r=1}^{N_U} b_{hr}U_r\right) V_\nu^X + \beta_\mu^{hr}\sum_{r=1}^{N_U} U_r\right) A_t^{phL}[g_\mu(t)],$$

$$p = \overline{1, N_W}\,. \quad (28)$$

Из (28) в силу (16) следует:

$$W_p^{L^*}(t) = \sum_{h=1}^{N_Z}\sum_{\mu=1}^{L}\left(\sum_{\nu=1}^{L} c_\mu^{\nu h}\left(b_{h0} + \sum_{r=1}^{N_U} b_{hr}U_r\right)V_\nu^X + \beta_\mu^{hr}\sum_{r=1}^{N_U} U_r\right) f_\mu^{phL}(t) =$$

$$= \sum_{h=1}^{N_Z}\sum_{\mu=1}^{L}\left(\sum_{\nu=1}^{L} c_\mu^{\nu h}\left(b_{h0} + \sum_{r=1}^{N_U} b_{hr}U_r\right)V_\nu^X + \beta_\mu^{hr}\sum_{r=1}^{N_U} U_r\right)\sum_{\theta=1}^{L}\alpha_{\mu\theta}^{phL} g_\theta(t),$$

$$p = \overline{1, N_W}\,. \quad (29)$$

В итоге имеем следующее

Утверждение 3. *В условиях утверждений* 1 *и* 2 *приближенная СКО-оценка выходного СтП билинейной СтС, описываемой уравнениями В. С. Пугачёва* (1)–(4), *определяется соотношениями* (29).

Для компьютерного моделирования СКО-оценки $W^{L^*}(t)$ выходного СтП $W(t)$ необходимо с помощью датчиков случайных чисел получить значения $u = [u_1\, u_2\, \cdots\, u_N]^{\mathrm{T}}$ векторной СВ U с заданной плотностью вероятности $f_u(u)$ и значения v_ν^X, $\nu = \overline{1, L}$, нормальных СВ V_ν^X, $\nu = \overline{1, L}$, с нулевым математическим ожиданием и единичными дисперсиями.

Алгоритм 2. Компьютерное моделирование СКО-оценки выходного СтП

1. Выбор базиса вейвлетов с компактными носителями, задание максимального уровня вейвлет-разрешения J.
2. Выполнение алгоритма 1 для определения параметров $\alpha_{\nu\theta}^{ph}$, $p = \overline{1, N_W}$, $h = \overline{1, N_Z}$, $\nu, \theta = \overline{1, L}$.
3. Выполнение алгоритма «Построение КРВНС матрицы ковариационных функций векторного СтП» [18] для нахождения коэффициентов $c^{\nu h}$, $\nu = \overline{1, L}$, $h = \overline{1, N_Z}$.
4. Вычисление коэффициентов β_ν^{hr}, $h = \overline{1, N_Z}$, $r = \overline{1, N_U}$, $\nu = \overline{1, L}$, ВЛР функций $\xi_{hr}(t)$, $h = \overline{1, N_Z}$, $r = \overline{1, N_U}$, согласно (25) с помощью алгоритма Малла [13].
5. Генерация значений $u = [u_1\, u_2\, \cdots\, u_N]^{\mathrm{T}}$ векторной СВ U с заданной плотностью вероятности $f_u(u)$ и v_ν^X, $\nu = \overline{1, L}$, нормальных СВ V_ν^X, $\nu = \overline{1, L}$, с нулевым математическим ожиданием и единичными дисперсиями с помощью соответствующих датчиков случайных чисел.
6. Вычисление СКО-оценки $W^{L^*}(t)$ выходного СтП $W(t)$ для $t \in [t_0, t_k]$ по формулам (29).

В рамках корреляционной теории [1, 2] точность СКО-оценки оценивается математическим ожиданием, вторым начальным моментом и ковариационной матрицей ошибки

$$\Delta(t) = [\Delta_1(t)\,\Delta_2(t)\,\cdots\,\Delta_{N_W}(t)]^{\mathrm{T}},$$

где

$$\Delta_p(t) = \sum_{r=1}^{N_U} U_r \zeta_{pr}(t) -$$

$$-\sum_{h=1}^{N_Z^2}\sum_{\mu=1}^{L}\left(\sum_{\nu=1}^{L} c_\mu^{\nu h}\left(b_{h0} + \sum_{r=1}^{N_U} b_{hr}U_r\right)V_\nu^X + \beta_\mu^{hr}\sum_{r=1}^{N_U} U_r\right) f_\mu^{phL}(t),\ p = \overline{1, N_W}\,.$$

Если ввести обозначения

$$\varepsilon_{pr}^L(t) = \zeta_{pr}(t) - \sum_{h=1}^{N_Z^2}\sum_{\mu=1}^{L}\beta_\mu^{hr} f_\mu^{phL}(t)\,;$$

$$\chi_{ph\nu}^L(t) = \sum_{\mu=1}^{L} c_\mu^{\nu h} f_\mu^{phL}(t),$$

где $p = \overline{1, N_W}$, $h = \overline{1, N_Z}$, $r = \overline{1, N_U}$, $\nu = \overline{1, L}$, то

$$\Delta_p(t) = \sum_{r=1}^{N_U} U_r \varepsilon_{pr}^L(t) - \sum_{h=1}^{N_Z}\left(b_{h0} + \sum_{r=1}^{N_U} b_{hr}U_r\right)\sum_{\nu=1}^{L} V_\nu^X \chi_{ph\nu}^L(t),\ \ p = \overline{1, N_W}\,.$$

Известно, что

$$\mathsf{M}\left[V_\nu^X\right] = 0,\ \ \mathsf{M}[U] = m^U = \left[m_1^U\, m_2^U\,\cdots\, m_{N_U}^U\right]^{\mathrm{T}},$$

поэтому компоненты математического ожидания ошибки

$$\mathsf{M}[\Delta(t)] = \left[m_1^\Delta(t)\, m_2^\Delta(t)\,\cdots\, m_{N_W}^\Delta(t)\right]^{\mathrm{T}}$$

вычисляются по формулам:

$$m_p^\Delta(t) = \sum_{r=1}^{N_U} m_r^U \varepsilon_{pr}^L(t)\,,\ \ p = \overline{1, N_W}\,. \tag{30}$$

Для вычисления второго начального момента

$$\Gamma^\Delta(t) = \mathsf{M}\left[\Delta(t)\Delta^{\mathrm{T}}(t)\right] = \|\Gamma_{pq}^\Delta(t)\|_{p,q=1}^{N_W}$$

ошибки Δt с учетом независимости СВ U и СтП $X(t)$, $\mathsf{M}[V_\nu^2(t)] = 1$, $\nu = \overline{1, L}$, $\mathsf{M}[U_{r_1} U_{r_2}] = \gamma^U_{r_1 r_2}$, $r_1, r_2 = \overline{1, N_U}$, получены формулы:

$$\Gamma^{\Delta}_{pq}(t) = M\left[\Delta_p(t)\Delta_q(t)\right] = \sum_{r_1=1}^{N_U}\sum_{r_2=1}^{N_U}\gamma^U_{r_1 r_2}\varepsilon^L_{pr_1}(t)\varepsilon^L_{qr_2}(t) + \\ + \sum_{h=1}^{N_Z}\left(b^2_{h0} + 2\sum_{r=1}^{N_U} b_{h0}b_{hr}m^U_r + \sum_{r_1=1}^{N_U}\sum_{r_2=1}^{N_U} b_{hr_1}b_{hr_2}\gamma^U_{r_1 r_2}\right)\sum_{\nu=1}^{L}\chi^L_{ph\nu}(t)\chi^L_{qh\nu}(t), \\ p, q = \overline{1, N_W}\,. \quad (31)$$

Элементы ковариационной матрицы ошибки

$$K^{\Delta}(t) = \mathsf{M}\left[(\Delta(t) - m_\Delta(t))(\Delta(t) - m_\Delta(t))^{\mathrm{T}}\right] = \left\| K^{\Delta}_{pq}(t)\right\|_{p,q=1}^{N_W}$$

вычисляются по известным формулам:

$$K^{\Delta}_{pq}(t) = \Gamma^{\Delta}_{pq}(t) - m^{\Delta}_p(t)m^{\Delta}_q(t)\,, \quad p, q = \overline{1, N_W}\,. \quad (32)$$

В итоге имеем следующее

Утверждение 4. *В условиях утверждений* 1–3 *точность СКО-оценки* $W^{L^*}(t)$ *выходного СтП* $W(t)$ *БЛСтС* (1)–(4) *оценивается математическим ожиданием, вторым начальным моментом и ковариационной матрицей ошибки* $\Delta(t) = W(t) - W^{L^*}(t)$, *компоненты которых соответственно вычисляются по формулам* (30), (31) и (32).

6 Заключение

Для многомерной БЛСтС, описываемой уравнениями В. С. Пугачёва для входного и требуемого выходного СтП, разработано методологическое и алгоритмическое обеспечение синтеза СКО-оптимальной оценки выходного СтП. В основе методологии лежит аналитическое решение приближенного операторного уравнения, связывающего начальный второй момент входного СтП и смешанный второй начальный момент входного и требуемого выходного СтП. При разработке метода применялись теория КМА, теория ВЛКР СтП и ВНС.

Данная работа стала обобщением результатов, полученных при разработке методов синтеза оптимальных СтС на основе ВНС и показавших преимущества ВНС-синтеза по сравнению с рекуррентными методами синтеза [14, 15, 18, 19]. В настоящее время на основе методологического и алгоритмического обеспечения, изложенного в данной статье, разрабатывается инструментальное программное обеспечение «БЛСтС-Синтез-ВНС».

В дальнейшем предполагается применить разработанное методологическое и алгоритмическое обеспечение для решения задачи синтеза БЛСтС, оптимальных по другим вероятностным критериям.

Литература

1. *Пугачёв В. С.* Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления. — М.: Физматгиз, 1962. 884 с.
2. *Синицын И. Н.* Канонические представления случайных функций. Теория и применения. — 2-е изд. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2023. 816 с.
3. *Xu H., Liu S., Zhao S., Wang J.* Distributed control for a class of nonlinear systems based on distributed high-gain observer // ISA T., 2023. Vol. 138. P. 329–340. doi: 10.1016/j.isatra.2023.03.002. EDN: OQULQW.
4. *Venkateswaran S., Kravaris C.* Linear unknown input observers for sensor fault estimation in nonlinear systems // IFAC PapersOnLine, 2023. Vol. 56. Iss. 1. P. 61–66. doi: 10.1016/j.ifacol.2023.02.011. EDN: RFPITX.
5. *Musavi N., Sun D., Mitra S., Dullerud G. E., Shakkottai S.* HyHooVer: Verification and parameter synthesis in stochastic systems with hybrid state space using optimistic optimization // IEEE Open J. Control Systems, 2023. Vol. 2. P. 263–276. doi: 10.1109/ojcsys.2023.3299152. EDN: NXBJJR.
6. *Chen Z., Ma W.* A Bayesian approach to data-driven multi-stage stochastic optimization // J. Global Optim., 2024. Vol. 90. P. 401–428. doi: 10.1007/s10898-024-01410-3. EDN: WPGMYA.
7. *Цыганов А. В., Цыганова Ю. В.* Общий подход к построению градиентных методов параметрической идентификации на основе модифицированной взвешенной ортогонализации Грама–Шмидта и алгоритмов дискретной фильтрации информационного типа // Компьютерные исследования и моделирование, 2025. Т. 17. № 5. С. 761–782. doi: 10.20537/2076-7633-2025-17-5-761-782. EDN: LWPVIJ.
8. *Козачёк О. А., Бобцов А. А.* Синтез адаптивного наблюдателя состояния для класса нестационарных билинейных систем в условиях частичной параметрической неопределенности // Изв. вузов. Приборостроение, 2025. Т. 68. № 5. С. 397–405. doi: 10.17586/0021-3454-2025-68-5-397-405. EDN: RPVOZM.
9. *Zhu B., Karimi H. R., Zhang L., Zhao X.* Neural network-based adaptive reinforcement learning for optimized backstepping tracking control of nonlinear systems with input delay // Appl. Intell., 2025. Vol. 55. Art. 129. 16 p. doi: 10.1007/s10489-024-05932-x. EDN: NFOEVA.
10. *Пугачёв В. С.* Лекции по функциональному анализу. — М.: МАИ, 1996. 744 с.
11. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам / Пер. с англ. — М.: Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 464 с. (*Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. — Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. 352 p.).
12. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс / Пер. с англ. — 2-е изд. — СПб.: Диалектика, 2020. 1104 с. (*Haykin S.* Neural networks. A comprehensive foundation. — 2nd ed. — Prentice-Hall of India Pvt. Ltd., 1999. 842 p.).
13. *Малла С.* Вейвлеты и обработка сигналов / Пер. с англ. — М.: Мир, 2005. 617 с. (*Mallat S. G.* A wavelet tour of signal processing. — 2nd ed. — Academic Press, 1999. 637 p.)

14. *Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д.* Приближенный аналитический вейвлет-нейросетевой синтез нелинейной стохастической системы высокой доступности // Системы высокой доступности, 2026. Т. 22. № 2. С. 18–32. doi: 10.18127/j20729472-202602-02. EDN: UDXTEZ.
15. *Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д.* Вейвлет-нейросетевой синтез оптимальной наблюдаемой стохастической линейной системы Пугачёва с параметрическими шумами по среднеквадратичному критерию // Системы и средства информатики, 2026. Т. 36. № 2. С. 18–39. doi: 10.14357/08696527260202. EDN: FADQTM.
16. *Терехов С. А.* Вейвлеты и нейронные сети // Лекции по нейроинформатике. — М.: МИФИ, 2001. С. 142–181.
17. *Veitch D.* Wavelet neural networks and their application in the study of dynamical system // Networks, 2005. Vol. 1. No. 8. P. 313–320.
18. *Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д.* Алгоритм моделирования векторного стохастического процесса посредством его канонического разложения на основе многослойной вейвлет-нейронной сети // Системы и средства информатики, 2025. Т. 35. № 2. С. 17–30. doi: 10.14357/08696527250202. EDN: TFDTXJ.
19. *Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д.* Нейросетевой байесовский синтез многомерной линейной стохастической системы // Системы и средства информатики, 2025. Т. 35. № 3. С. 33–53. doi: 10.14357/08696527240307. EDN: SUNQAL.

Поступила в редакцию 07.05.2026
Принята к публикации 15.09.2026

WAVELET NEURAL NETWORK SYNTHESIS OF BILINEAR STOCHASTIC SYSTEM

***I. N. Sinitsyn*[1], *V. I. Sinitsyn*[1,2], *E. R. Korepanov*[1], *and T. D. Konashenkova*[1]**

[1]Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation
[2]Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125993, Russian Federation

Abstract: The paper is devoted to methodological and algorithmical support of wavelet neural network (WNN) mean square estimation (MSE) synthesis for an observable bilinear stochastic system (BLStS). The BLStS is described by the Pugachev equations for the input and output stochastic processes (StP). The output StP is dependent on the random parameters vector. The input StP contains random noise independent of random parameters. The random parameters vector is defined by a probability density function. The linear operator for MSE optimal StS is the approximate solution of the operator equation connecting probability second-order moments. The approximate solution is based on the theory of

multiscale analysis and a WNN. The random noise is approximated by a wavelet canonical expansion (WLCE) built upon an orthonormal basis of wavelets with compact carrier. This WLCE is constructed on a WNN and is denoted as CEWNN. Input is approximated by linear combination of basic wavelets with random coefficients. The optimal MSE is composed as a linear combination of basic wavelets with random coefficients. Accuracy estimates for the output StP are provided in terms of probability moments of the first and second order. Experimental software tools "BLStS-Synthesis-WNN" and test examples are developed.

Keywords: bilinear stochastic system; mean square criterion; modeling; optimal estimate; stochastic process; stochastic system; wavelet; wavelet canonical expansion; wavelet neural network

DOI: 10.14357/08696527260307 **EDN:** BUJSNS

Acknowledgments

The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities "High Performance Computing and Big Data" (CKP "Informatics") of FRC CSC RAS (Moscow).

References

1. Pugachev, V. S. 1965. *Theory of random functions and its application to control problems*. Oxford: Pergamon Press. 884 p.
2. Sinitsyn, I. N. 2023. *Kanonicheskie predstavleniya sluchaynykh funktsiy. Teoriya i primeneniya* [Canonical expansions of random functions. Theory and applications]. 2nd ed. Moscow: TORUS PRESS. 816 p.
3. Xu, H., Sh. Liu, Sh. Zhao, and J. Wang. 2023. Distributed control for a class of nonlinear systems based on distributed high-gain observer. *ISA T.* 138:329–340. doi: 10.1016/j.isatra.2023.03.002. EDN: OQULQW.
4. Venkateswaran, S., and C. Kravaris. 2023. Linear unknown input observers for sensor fault estimation in nonlinear systems. *IFAC PapersOnLine* 56(1):61–66. doi: 10.1016/j.ifacol.2023.02.011. EDN: RFPITX.
5. Musavi, N., D. Sun, S. Mitra, G. E. Dullerud, and S. Shakkottai. 2023. HyHooVer: Verification and parameter synthesis in stochastic systems with hybrid state space using optimistic optimization. *IEEE Open J. Control Systems* 2:263–276. doi: 10.1109/ojcsys.2023.3299152. EDN: NXBJJR.
6. Chen, Z., and W. Ma. 2024. A Bayesian approach to data-driven multi-stage stochastic optimization. *J. Global Optim.* 90:401–428. doi: 10.1007/s10898-024-01410-3. EDN: WPGMYA.
7. Tsyganov, A. V., and Yu. V. Tsyganova. 2025. Obshchiy podkhod k postroeniyu gradientnykh metodov parametricheskoy identifikatsii na osnove modifitsirovannoy vzveshennoy ortogonalizatsii Grama–Shmidta i algoritmov diskretnoy filtratsii informatsionnogo tipa [A general approach to constructing gradient methods for parameter identification based on modified weighted Gram–Schmidt orthogonalization and information-type discrete filtering algorithms]. *Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie* [Computer

Research and Modeling] 17(5):761–782. doi: 10.20537/2076-7633-2025-17-5-761-782. EDN: LWPVIJ.

8. Kozachek, O. A., and A. A. Bobtsov. 2025. Sintez adaptivnogo nablyudatelya sostoyaniya dlya klassa nestatsionarnykh bilineynykh sistem v usloviyakh chastichnoy parametricheskoy neopredelennosti [Adaptive state observer synthesis for a class of nonstationary bilinear systems under conditions of partial parametric uncertainty]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie* [J. Instrument Engineering] 68(5):397–405. doi: 10.17586/0021-3454-2025-68-5-397-405. EDN: RPVOZM.
9. Zhu, B., H. R. Karimi, L. Zhang, and X. Zhao. 2025. Neural network-based adaptive reinforcement learning for optimized backstepping tracking control of nonlinear systems with input delay. *Appl. Intell*. 55(2):129. 16 p. doi: 10.1007/s10489-024-05932-x. EDN: NFOEVA.
10. Pugachev, V.,S., and I. N. Sinitsyn. 1999. *Lectures on functional analysis and applications*. Singapore: World Scientific. 752 p.
11. Daubechies, I. 1992. *Ten lectures on wavelets*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics. 352 p.
12. Haykin, S. 1999. *Neural networks. A comprehensive foundation.* 2nd ed. Prentice-Hall of India Pvt. Ltd. 842 p.
13. Mallat, S. G. 1999. *A wavelet tour of signal processing*. 2nd ed. Academic Press. 637 p.
14. Sinitsyn, I. N., V. I. Sinitsyn, E. R. Korepanov, and T. D. Konashenkova. 2026. Priblizhennyy analiticheskiy veyvlet-neyrosetevoy sintez nelineynoy stokhasticheskoy sistemy vysokoy dostupnosti [Approximate analytical synthesis of nonlinear stochastic systems with high availability by mean square criterion]. *Sistemy vysokoy dostupnosti* [Highly Available Systems] 22(2):18–32. doi: 10.18127/j20729472-202602-02. EDN: UDXTEZ.
15. Sinitsyn, I. N., V. I. Sinitsyn, E. R. Korepanov, and T. D. Konashenkova. 2026. Veyvlet-neyrosetevoy sintez optimalnoy nablyudayemoy stokhasticheskoy lineynoy sistemy Pugachyova s parametricheskimi shumami po srednekvadratichnomu kriteriyu [Wavelet-neural network synthesis of the optimal observed linear stochastic Pugachev system with parametric noises using the mean-square criterion]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 36(2):18–39. doi: 10.14357/08696527260202. EDN: FADQTM.
16. Terekhov, S. A. 2001. Veyvlety i neyronnye seti [Wavelets and neural networks]. *Lektsii po neyroinformatike* [Lectures on neuroinformatics]. Moscow: MIFI. 142–181.
17. Veitch, D. 2005. Wavelet neural networks and their application in the study of dynamical system. *Networks* 1(8):313–320.
18. Sinitsyn, I. N., V. I. Sinitsyn, E. R. Korepanov, and T. D. Konashenkova. 2025. Algoritm modelirovaniya vektornogo stokhasticheskogo protsessa posredstvom ego kanonicheskogo razlozheniya na osnove mnogosloynoy veyvlet-neyronnoy seti [Modeling algorithms for vector stochastic process by canonical expansions based on multilayer wavelet neural network]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 35(2):17–30. doi: 10.14357/08696527250202. EDN: TFDTXJ.
19. Sinitsyn, I. N., V. I. Sinitsyn, E. R. Korepanov, and T. D. Konashenkova. 2025. Neyrosetevoy bayesovskiy sintez mnogomernoy lineynoy stokhasticheskoy sistemy [Neu-

ral networks Bayes synthesis of multidimensional linear stochastic system]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 35(3):33–53. doi: 10.14357/08696527250303. EDN: SUNQAL.

Received May 7, 2026
Accepted September 15, 2026

Contributors

Sinitsyn Igor N. (b. 1940) — Doctor of Science in technology, professor, Honored scientist of RF, principal scientist, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; sinitsin@dol.ru

Sinitsyn Vladimir I. (b. 1968) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; professor, Educational Center, Institute of Computer Sciences, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow 125993, Russian Federation; vsinitsin@ipiran.ru

Korepanov Eduard R. (b. 1966) — Candidate of Science (PhD) in technology, leading scientist, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; ekorepanov@ipiran.ru

Konashenkova Tatiana D. (b. 1964) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, scientist, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; tkonashenkova64@mail.ru

ИНТЕРПРЕТИРУЕМОЕ СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КАЧЕСТВА ДОКУМЕНТАЦИИ И ЕГО ВРЕМЕННОЙ ДИНАМИКИ

***А. А. Сачко*[1], *А. М. Сачко*[2], *В. Ю. Поздышев*[3]**

Аннотация: Качество документации на специализированных отраслевых предприятиях остается одним из факторов, влияющих на сроки выполнения заказов, устойчивость производственных процессов, себестоимость и эксплуатационные характеристики продукции. При этом существующие подходы к контролю документации преимущественно ориентированы на выявление уже возникших несоответствий и в ограниченной степени используют методы статистического анализа для поддержки управленческих решений, особенно в сфере выявления закономерностей и прогнозирования рисков. Цель настоящего исследования — разработка и апробация методики статистического анализа качества документации для совершенствования систем поддержки принятия решений специализированных отраслевых предприятий. Исследование выполнено на основе анализа сплошной выборки из 6739 документов, прошедших процедуру нормоконтроля на отдельном специализированном отраслевом предприятии за 12 кварталов в период с первого квартала 2023 г. по четвертый квартал 2025 г. Документы были распределены по четырем типам (конструкторская, программная, графическая документация и извещения об изменении) и трем уровням качества («хорошее», «среднее», «плохое»). Использовались методы анализа таблиц сопряженности (критерий χ^2 Пирсона, коэффициент V Крамера, стандартизированные остатки) с бутстрап-оценкой устойчивости результатов; моделирование временного тренда логит-преобразованной доли качественных документов с диагностикой остатков (тесты Шапиро–Уилка, Бройша–Пагана, Дарбина–Уотсона) и прогнозированием; тест Чоу для выявления структурных сдвигов; ковариационный анализ (analysis of covariance, ANCOVA); анализ сезонности и корреляционный анализ.

Ключевые слова: статистический анализ; качество документации; система поддержки принятия решений; таблицы сопряженности; логит-модель; ковариационный анализ; корреляция; прогнозирование

DOI: 10.14357/08696527260308 **EDN:** XUQFCC

[1]Автономная некоммерческая организация дополнительного профессионального образования «Научно-образовательный центр ВКО «Алмаз–Антей» им. академика В. П. Ефремова», aasachko@almaz-antey.ru

[2]Автономная некоммерческая организация дополнительного профессионального образования «Научно-образовательный центр ВКО «Алмаз–Антей» им. академика В. П. Ефремова», nastja-9900@mail.ru

[3]Автономная некоммерческая организация дополнительного профессионального образования «Научно-образовательный центр ВКО «Алмаз–Антей» им. академика В. П. Ефремова», pozvalerij@yandex.ru

1 Введение

В эпоху цифровой трансформации и импортозамещения специализированным отраслевым предприятиям необходима оптимизация бизнес-процессов, включая автоматизацию документооборота на базе передовых информационных систем. Это позволит сократить сроки согласования, минимизировать ошибки и обеспечить соответствие нормативным требованиям. Закрепленная в документации и соответствующая нормативным требованиям прослеживаемость жизненного цикла выпускаемых изделий выступает системообразующим фактором для сроков реализации заказов, себестоимости и эксплуатационной надежности разработок. Современное предприятие представляет собой сложную организационно-техническую систему, предусматривающую встраивание процессов управления качеством документации в общую архитектуру системы менеджмента качества. Однако на практике существующие системы контроля в большинстве своем носят реактивный характер: они не используют накопленные данные и статистическое прогнозирование. В результате некачественная документация зачастую становится фактором снижения эффективности, когда время инженеров расходуется на ее доработку, а не на проектные задачи. Переход к проактивному управлению на основе математического аппарата анализа данных и современной информационной инфраструктуры позволит выявлять тренды и предотвращать проблемы до их возникновения, повышая качество документооборота как элемента единой системы предприятия.

Ранее вопросы обеспечения качества документации рассматривались в различных прикладных областях [1], включающих разработку авиационной техники, подготовку производств и управление инженерными данными [2]. Исследования показывают, что качество документированной информации связано со сроками выполнения проектов, объемом повторных согласований, числом корректировок и устойчивостью производственных процессов [3]. В современных системах менеджмента качества документированные процедуры рассматриваются как самостоятельный объект управления и контроля, а качество документации — как фактор воспроизводимости процессов и снижения операционных потерь [4, 5]. Одновременно развитие цифровизации и накопление исторических данных привели к расширению применения количественных методов анализа, включая прогнозирование, регрессионное моделирование и методы интеллектуального анализа данных [6–10]. Однако значительная часть существующих работ ориентирована либо на описание организационных механизмов обеспечения качества, либо на использование сложных предиктивных моделей, требующих крупных массивов данных и значительных вычислительных ресурсов. Для задач анализа документооборота специализированных отраслевых предприятий подобные подходы могут быть ограничены требованиями интерпретируемости результатов, режимными ограничениями и необходимостью внедрения в существующие контуры поддержки принятия решений.

Проведенный анализ литературы показал ограниченное число работ, объединяющих методы анализа категориальных данных, временны́х рядов и интерпретируемого статистического моделирования применительно к оценке качества документации. Комплексные исследования, объединяющие анализ таблиц сопряженности, временны́х рядов и предиктивное моделирование применительно к документации специализированных отраслевых предприятий, в доступной литературе отсутствуют. Это определило выбор статистического подхода, используемого в настоящем исследовании.

Цель настоящего исследования — разработка и апробация методики статистического анализа качества документации, обеспечивающей выявление устойчивых закономерностей, оценку динамики показателей и формирование аналитической основы для совершенствования систем поддержки принятия решений специализированных отраслевых предприятий.

Научная новизна работы состоит в адаптации комплекса интерпретируемых статистических методов к анализу процессов документооборота специализированных отраслевых предприятий. Практическая значимость результатов заключается в возможности использования предложенного подхода в аналитических модулях систем поддержки принятия решений.

В работе продемонстрирована принципиальная применимость формализованных статистических методов к анализу непроизводственных процессов в организационно-технических системах, что расширяет методологический аппарат системного анализа. Разработанный инструментарий позволяет перейти к проактивному управлению качеством на основе объективных данных: выявлять проблемные типы документации, обоснованно распределять трудовые ресурсы и использовать прогнозную модель для оперативного планирования. В отличие от подходов на базе машинного обучения, предложенная методология характеризуется высокой интерпретируемостью результатов и умеренными вычислительными требованиями. Это позволяет интегрировать ее в аналитические модули систем поддержки принятия решений, в том числе на режимных предприятиях с ограниченным доступом к облачным сервисам и внешним вычислительным мощностям.

2 Характеристика данных и общая методология

Исследование выполнено на основе данных нормоконтроля специализированного отраслевого предприятия за период с первого квартала 2023 г. по четвертый квартал 2025 г. В анализ включены 6739 документов. Для каждого документа фиксировались квартал регистрации, тип документа (конструкторская документация — КД, программная документация — ПД, графическая документация — ГД, извещения об изменении — ИИ) и итоговая категория качества.

Классификация качества проводилась по числу выявленных замечаний. Категория «хорошее» зафиксировано до 10 замечаний включительно, «среднее» — от 11 до 30 замечаний, «плохое» — более 30 замечаний. Такое представление

использовалось как операционное определение качества и позволяло применять методы анализа категориальных данных.

Распределение выборки по типам составило: КД — 2339 документов (34,7%), ПД — 1140 (16,9%), ГД — 906 (13,4%), ИИ — 2354 (34,9%). Общая доля документов категории «хорошее» составила 72,7% (95%-ный доверительный интервал (ДИ): 71,6%–73,8%), категории «среднее» — 15,4% (95%-ный ДИ: 14,5%–16,3%), категории «плохое» — 11,9% (95%-ный ДИ: 11,1%–12,7%). Таким образом, более четверти документов (27,3%) оказались проблемными («среднее» + «плохое»), что подтверждает необходимость усиления контроля качества документации.

Для проверки исследовательских предположений были сформулированы шесть гипотез. Для каждой гипотезы определены нулевая (H_0) и альтернативная (H_1) формулировки, выбран статистический критерий и задано правило принятия решения при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Во всех случаях использовались двусторонние критерии, за исключением гипотезы о положительном временно́м тренде, для которой применялась односторонняя проверка. Проверка гипотез направлена не на установление причинно-следственных связей, а на выявление статистических ассоциаций и устойчивых закономерностей в исследуемых данных. Способы проверки каждой гипотезы и соответствующие статистические критерии приведены в табл. 1.

Применяемый статистический инструментарий выбирался исходя из структуры данных и целей исследования. Для оценки связи между типом документа и качеством использовались методы анализа таблиц сопряженности (критерий χ^2 Пирсона, коэффициент V Крамера и анализ стандартизированных остатков) [11–13], устойчивость выборки оценена бутстрап-анализом [14]. Для исследования временно́й динамики применялось логит-моделирование [15] доли документов высокого качества с диагностикой остатков [16] и прогнозированием. Для выявления возможных изменений поведения процесса использовался тест Чоу [17, 18]. Сравнение траекторий изменения качества между типами документации выполнялось методом ковариационного анализа ANCOVA [19, 20]. Дополнительно оценивалось наличие сезонных эффектов [21] и проводились ковариационный анализ и корреляционный анализ Пирсона [22] для выявления связи между объемом документопотока и качеством. Исследование выполнено на языке Python 3.9.

Перед применением статистических моделей были проверены предпосылки их использования.

Во всех методах предполагалось, что единицей наблюдения служит отдельный документ, а агрегирование по кварталам используется исключительно для анализа динамики показателей. Для агрегированных по кварталам данных автокорреляция остатков проверялась тестом Дарбина–Уотсона (DW = 2,039, автокорреляция отсутствует). Поскольку исследование основано на сплошной выборке документов, прошедших нормоконтроль за рассматриваемый период, риск систематической ошибки отбора был минимизирован, однако возможность ор-

Таблица 1 Сводная таблица проверки гипотез

Гипотеза	Содержание	Нулевая гипотеза (H_0)	Альтернативная гипотеза (H_1)	Критерий проверки	Фактические показатели	Критерий принятия решения	Результат принятия решения
1	Качество зависит от типа документа	Тип документа и качество независимы	Существует связь между типом и качеством	χ^2-тест Пирсона, V Крамера ($\alpha = 0{,}05$)	$\chi^2 = 206{,}45$; $p < 0{,}001$; $V = 0{,}124$ [0,096; 0,313]	Отвергнуть H_0, если $p < 0{,}05$	H_0 отвергнута
2	Существует устойчивый временной тренд	$\beta_1 = 0$ (нет временного тренда)	$\beta_1 > 0$ (положительный тренд)	t-тест для коэффициента β_1 в логит-модели ($\alpha = 0{,}05$, односторонний)	$\beta_1 = 0{,}098$; $p < 0{,}001$; $R^2 = 0{,}83$	Отвергнуть H_0, если $p < 0{,}05$	H_0 отвергнута
3	Присутствуют структурные сдвиги	Отсутствие структурного сдвига (коэффициенты постоянны)	Существует точка разлома (структурный сдвиг)	Тест Чоу (F-статистика, $\alpha = 0{,}05$)	$F(2, 8) = 7{,}32$; $p = 0{,}0156$	Отвергнуть H_0, если $p < 0{,}05$	H_0 отвергнута
4	Тренды различаются по типам документов	Тренды параллельны (взаимодействие тип×время $= 0$)	Тренды непараллельны (взаимодействие тип×время $\neq 0$)	ANCOVA (F-тест взаимодействия тип× × время)	$F(3, 32) = 4{,}747$; $p = 0{,}0063$	Отвергнуть H_0, если $p < 0{,}05$	H_0 отвергнута
5	Качество подвержено сезонности	Все квартальные дамми равны нулю (сезонность отсутствует)	Хотя бы один квартальный эффект $\neq 0$	F-тест для совместной значимости квартальных дамми	$F(3, 7) = 1{,}817$; $p = 0{,}232$	Отвергнуть H_0, если $p < 0{,}05$	H_0 не отвергнута
6	Объем документов коррелирует с качеством	$\rho = 0$ (корреляция отсутствует)	$\rho \neq 0$ (корреляция присутствует)	Корреляция Пирсона (t-тест, $\alpha = 0{,}05$)	$r = -0{,}083$; $t(46) = -0{,}565$; $p = 0{,}575$	Отвергнуть H_0, если $p < 0{,}05$	H_0 не отвергнута

ганизационных особенностей конкретного предприятия как источника внешнего ограничения исследования сохранялась.

Для критерия χ^2 Пирсона дополнительно проверялось условие применимости: ожидаемые частоты в ячейках не должны быть слишком малы (не более 20% ячеек с ожидаемой частотой менее 5). В данном исследовании доля таких

ячеек равна 0%, минимальная ожидаемая частота составляет 103,5. Для дополнительной проверки был использован G-критерий (отношение правдоподобия) как более устойчивый к малым частотам — его результаты совпали с χ^2.

Для логит-модели временно́го ряда проверялись линейность связи между логит-преобразованной долей $\mathrm{logit}\,(\pi_t)$ и временем (верифицирована визуально по диаграмме рассеяния), нормальность распределения остатков, гомоскедастичность и отсутствие автокорреляции. Диагностика выполнялась с использованием тестов Шапиро–Уилка ($W = 0{,}953$; $p = 0{,}683$), Бройша–Пагана ($\mathrm{LM} = 0{,}031$; $p = 0{,}860$) и Дарбина–Уотсона ($\mathrm{DW} = 2{,}039$). Учитывая малое число наблюдений ($n = 12$), результаты теста Шапиро–Уилка интерпретировались совместно с визуальной оценкой диагностического QQ-графика, а показатели всех тестов рассматривались как дополнительный критерий, но не как единственное основание принятия решения.

Для теста Чоу предполагается, что остатки в подвыборках независимы, нормально распределены и гомоскедастичны, а дисперсия ошибок постоянна во времени. Эти условия были проверены для каждой подвыборки (тесты Шапиро–Уилка и Бройша–Пагана). Диагностика не выявила критических нарушений.

Для ANCOVA проверялись: линейность связи зависимой переменной с ковариатой (временем), отсутствие выраженной мультиколлинеарности между фиктивными переменными и ковариатой подтверждено значениями фактора инфляции дисперсии ($\mathrm{VIF} < 2$ для всех предикторов), а также нормальность распределения остатков (QQ-график и тест Шапиро–Уилка). Но, учитывая робастность ANCOVA к нарушениям нормальности при данном объеме выборки, визуальная оценка QQ-графика вполне достаточна. Нарушений не обнаружено.

Для корреляционного анализа предполагается двумерное нормальное распределение пар переменных (объем, доля проблемных документов), что верифицировано с помощью диаграмм рассеяния. Выбросы в данных отсутствуют. Для учета возможной нелинейности связей дополнительно построена кривая сглаживания LOWESS — значимой зависимости не обнаружено.

Для проверки статистических гитопез во всех тестах использовался базовый уровень значимости $\alpha = 0{,}05$ (двусторонние альтернативы, если не оговорено иное) [23]. В частности, при проверке гипотезы о наличии положительного временно́го тренда применялся односторонний критерий, для остальных процедур — двусторонние. Полученные результаты интерпретировались совместно с размерами эффектов и ДИ, что позволило избежать опоры исключительно на p-значения [22, 23]. В условиях реального предприятия, где цена ошибки может быть высокой, допустимо применение более строгого уровня $\alpha = 0{,}01$. Однако во всех случаях, где нулевая гипотеза отвергается, p-значения меньше 0,001, поэтому выводы остаются неизменными.

3 Анализ связи типа документа и качества

Для проверки нулевой гипотезы об отсутствии связи между типом и его качеством была построена таблица сопряженности 4×3 (тип документа $\times$ уро-

Таблица 2 Распределение качества по типам документов

Тип	Категория			Всего
	Плохое	Среднее	Хорошее	
КД	363 (15,5%)	393 (16,8%)	1583 (67,7%)	2339
ПД	143 (12,5%)	141 (12,4%)	856 (75,1%)	1140
ГД	162 (17,9%)	186 (20,5%)	558 (61,6%)	906
ИИ	134 (5,7%)	317 (13,5%)	1903 (80,8%)	2354
Всего	802 (11,9%)	1037 (15,4%)	4900 (72,7%)	6739

вень качества) (табл. 2) и выполнен анализ независимости с использованием критерия χ^2 Пирсона [12]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}},$$

где O_{ij} — наблюдаемая частота; E_{ij} — ожидаемая частота; r и c — число строк и столбцов таблицы сопряженности соответственно.

Полученные результаты вычисления критерия χ^2 Пирсона показали наличие статистически значимой зависимости между рассматриваемыми признаками: $\chi^2(6) = 206{,}45$; $p < 0{,}001$. Следовательно, нулевая гипотеза о независимости типа документа и качества была отвергнута. Степени свободы были определены по формуле $df = (r-1)(c-1)$. Для оценки силы выявленной зависимости дополнительно рассчитывался коэффициент V Крамера:

$$V = \sqrt{\frac{x^2}{N(\min(r,c)-1)}},$$

где N — общий объем выборки.

Интерпретация силы связи проводилась по шкале Коэна и составила $V = 0{,}124$, что согласно распространенным рекомендациям по интерпретации размеров эффекта соответствует слабой степени ассоциации ($< 0{,}2$) [11], но практически значимому ($p < 0{,}001$) [13] эффекту.

Отметим, что базовая $\varphi = \sqrt{x^2/N} = 0{,}175$ также попадает в диапазон слабого эффекта, чем подтверждает согласованность оценок. При этом статистическая значимость результата обусловлена не только величиной эффекта, но и объемом выборки. При стандартном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ мощность критерия χ^2 Пирсона превышает 99%, означая, что вероятность ошибки второго рода (пропустить существующий эффект) составляет менее 1%. Таким образом, даже при наличии слабого эффекта он был бы обнаружен с высокой вероятностью. Как следствие, выводы надежны, а выявленная связь признана устойчивой, однако ее практическая значимость требует интерпретации совместно с особенностями организационного контекста предприятия.

Для оценки устойчивости полученной оценки силы связи был выполнен непараметрический бутстрап-анализ [14], где из исходной выборки N с возвращением генерировалось $B = 1000$ псевдовыборок, для каждой вычислялось V^*. Стандартная ошибка оценки определялась как выборочное стандартное отклонение бутстрап-распределения

$$\mathrm{SE}\,(V) = \sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{b=1}^{B}\left(V_b^* - \overline{V}^*\right)^2},$$

а 95%-ный ДИ — процентильным методом: $[V^*_{(0{,}025)}, V^*_{(0{,}975)}]$, расчетный интервал $V = [0{,}096; 0{,}313]$ подтверждает стабильность оценки. Полученное значение оценки $V = 0{,}124$, хотя и попадает в диапазон слабых эффектов по шкале Коэна, оказывается статистически значимым ($p < 0{,}001$), остается стабильным при многократной перевыборке (95%-ный ДИ: $[0{,}096; 0{,}313]$) и не содержит нуля. То, что данный ДИ не включает нулевое значение, свидетельствует о воспроизводимости оценки в пределах исследуемой выборки и о том, что даже при небольшой величине эффекта он не случаен и не обусловлен выборочными флуктуациями. Это дополнительно подтверждает его статистическую значимость и надежность.

Для определения вкладов отдельных категорий в наблюдаемую зависимость (χ^2) анализировались стандартизированные остатки таблицы сопряженности [12]

$$r_{ij} = \frac{O_{ij} - E_{ij}}{\sqrt{E_{ij}}}\,.$$

Значения стандартизированных остатков по модулю более двух ($|r_{ij}| > 2$) интерпретировались как индикатор значимого отклонения наблюдаемых частот от ожидаемых при условии их независимости. В результате были выявлены ячейки, вносящие наибольший вклад в χ^2 (табл. 3) [23].

Таблица 3 Стандартизованные остатки таблицы сопряженности

Тип	Категория		
	Хорошее	Среднее	Плохое
КД	−2,85	−1,74	+5,07
ПД	+0,94	−2,60	+0,63
ГД	−3,93	+3,95	+5,22
ИИ	+4,63	−2,38	−8,73

Значения стандартизированных остатков, превышающие по модулю 2, свидетельствуют о систематических, а не случайных отклонениях от ожидаемых частот. Так, графическая документация демонстрирует значимо меньше хороших документов (−3,93) и больше неудовлетворительных (+5,22); аналогичная тенденция для конструкторской документации (−2,85 и +5,07 соответственно). Для извещений об изменении наблюдается избыток хороших (+4,63) и недостаток плохих (−8,73) документов. Программная документация значимого отклонения не показывает, за исключением недостатка средних документов (−2,6). Наибольшие отклонения наблюдаются для ИИ (−8,73 для плохих документов) и ГД (+5,22 для плохих

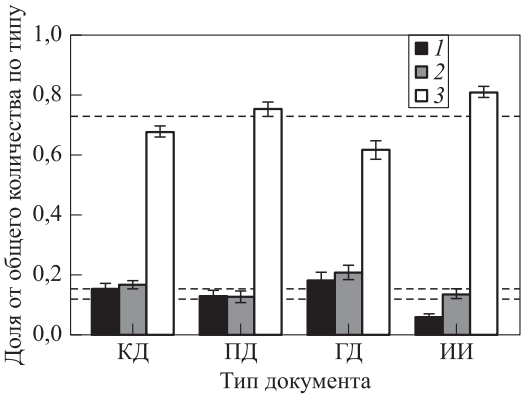


Рис. 1 Распределение качества по типам документов и категориям: *1* — плохое качество; *2* — среднее; *3* — хорошее качество

документов). При этом стандартизированные остатки использовались как инструмент описания структуры зависимости и не рассматривались как самостоятельное доказательство причин возникновения различий.

Полученные результаты свидетельствуют о неоднородности распределения качества между типами документации и позволяют рассматривать тип документа как один из факторов, связанных с вероятностью появления различных категорий качества. Это указывает на устойчивые паттерны, которые не могут быть объяснены выборочной вариацией и служат основой для адресных управленческих воздействий, а именно: наиболее выраженные отклонения характерны для графической документации и извещений об изменении. Для графической документации наблюдалась повышенная представленность документов категорий более низкого качества по сравнению с ожидаемым распределением, тогда как для извещений об изменении наблюдалась обратная картина — доля документов высокой категории качества превышала ожидаемые значения (рис. 1).

Из вышепредставленного можно сделать вывод о том, что качество документации существенно дифференцировано по типам, что подтверждает гипотезу 1. Вместе с тем обнаруженная ассоциация не означает прямой причинно-следственной зависимости и требует дальнейшей проверки на расширенных данных.

Вклад каждого типа в общую χ^2 распределился следующим образом: ИИ — 50,0%; ГД — 28,2%; КД — 17,9%; ПД — 3,9%. Таким образом, именно отклонения в качестве ИИ вносят наибольший вклад в статистическую зависимость.

4 Анализ временной динамики и прогнозирование

Для исследования изменения качества документации во времени за 12 кварталов использовалась модель линейного тренда для логит-преобразованной доли

документов категории «хорошее» (π). Выбор логит-преобразования обусловлен ограниченностью исходной переменной интервалом $(0;\ 1)$, что позволяет снизить влияние эффекта насыщения при приближении долей к границам диапазона [17, 19–21].

Для каждого квартала рассчитывалась доля документов категории «хорошее», после чего применялось преобразование

$$\operatorname{logit}(\pi_t) = \ln\left(\frac{\pi_t}{1-\pi_t}\right),$$

где π_t — наблюдаемая доля хороших в квартале.

Для стабилизации расчетов у периодов с предельными значениями π_t (0 или 1) использовалась численная коррекция с добавлением малой константы $\varepsilon = 10^{-6}$.

Оценивание временно́го тренда выполнялось с помощью линейной регрессии. Линейная регрессия логит-преобразованной доли от номера квартала t ($t = \overline{1, 12}$):

$$\operatorname{logit}(\pi_t) = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t\,.$$

По результатам оценки получена модель

$$\operatorname{logit}(\pi_t) = 0{,}583 + 0{,}098t\,.$$

Коэффициент времени оказался статистически значимым ($p < 0{,}001$), что свидетельствует о наличии устойчивой положительной динамики доли документов высокого качества в пределах исследуемого периода. Оценка параметров выполнялась методом наименьших квадратов (МНК). Значимость тренда оценивалась по t-критерию для β_1. Следует отметить, что коэффициент β_1 характеризует изменение логарифма отношения шансов, а не прямой прирост доли документов, в связи с чем интерпретация изменения качества в процентных пунктах выполнялась только после обратного преобразования модели.

Обратное преобразование позволяет интерпретировать результат в исходных единицах:

$$\hat{\pi}_t = \frac{\exp\left(\widehat{\operatorname{logit}}(\pi_t)\right)}{1 + \exp\left(\widehat{\operatorname{logit}}(\pi_t)\right)}\,.$$

Для оценки качества описания использовался коэффициент детерминации, рассчитанный для прогнозируемых значений модели. Коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}83 (p_t(\beta_1)) < 0{,}001$ рассчитывался как квадрат коэффициента корреляции Пирсона между наблюденными долями и предсказанными по модели значениями после обратного преобразования. Полученное значение указывает на высокую согласованность модели с наблюдаемыми данными, однако не рассматривается как самостоятельное подтверждение прогностической пригодности.

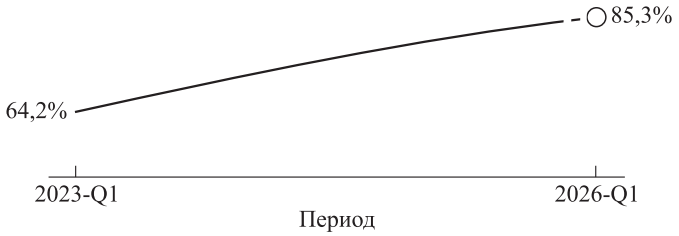


Рис. 2 Динамика доли хороших документов с прогнозом

Диагностика остатков подтвердила выполнение предпосылок МНК: нормальное распределение остатков (тест Шапиро–Уилка: $W = 0{,}953$; $p = 0{,}683$); гомоскедастичность — постоянство дисперсии (тест Бройша–Пагана: LM $=$ $= 0{,}031$; $p = 0{,}860$); отсутствие автокорреляции (статистика Дарбина–Уотсона: DW $= 2{,}039$) [15].

На основе построенной модели выполнено прогнозирование значения показателя на первый квартал 2026 г., полученное подстановкой в уравнение регрессии с последующим обратным преобразованием: 85,3% [81,7%; 88,3%] (95%-ный прогнозный интервал). Полученный прогнозный интервал полностью лежит в области допустимых значений (между 0 и 1 при переводе процента в десятичную дробь), что подтверждает устойчивость модели и отсутствие экстраполяционных выбросов. Нижняя граница интервала (81,7%) существенно превышает текущее среднее значение (72,7%), что говорит о продолжении положительного тренда. Высокий R^2 (0,83) и низкое значение средней абсолютной процентной ошибки (MAPE) (14,0%) на этапе верификации говорят о приемлемой прогностической способности модели и дополнительно подтверждают адекватность модели для оперативного планирования (рис. 2). Но следует помнить, что полученный прогноз отражает ожидаемое продолжение ранее наблюдаемой тенденции при условии сохранения характеристик исследуемого процесса и отсутствия существенных организационных изменений. Следовательно, результаты следует интерпретировать как аналитический сценарий продолжения выявленного тренда, а не как детерминированный прогноз фактических значений. Таким образом, гипотеза 2 о наличии положительного временно́го тренда подтверждена.

5 Проверка структурных изменений

Для оценки устойчивости временно́й динамики качества документации и выявления возможных изменений характера процесса применялся тест Чоу [17, 18]. Метод позволяет проверить гипотезу о неизменности параметров регрессионной модели на различных временны́х интервалах и используется для обнаружения потенциальных статистически значимых структурных изменений, что особенно важно для обнаружения точек бифуркации в динамике показателей качества.

Пусть временной ряд разделяется на два подпериода в момент времени $t = t_0$. Для исходной выборки и двух полученных подпериодов оценивались отдельные регрессионные модели, после чего рассчитывалась статистика Чоу на основе сравнения сумм квадратов остатков.

В исследовании точка разделения определялась путем последовательной проверки допустимых моментов времени внутри ряда с последующей оценкой статистической значимости результата. Такой подход использовался как исследовательская процедура поиска потенциальных изменений структуры процесса. Были построены три регрессионные модели: по всему ряду (сумма квадратов остатков, RSS), по первому подпериоду (RSS_1, n_1 наблюдений) и по второму подпериоду (RSS_2, n_2 наблюдений). Статистика теста имеет вид:

$$F = \frac{(\mathrm{RSS} - \mathrm{RSS}_1 - \mathrm{RSS}_2)/k}{(\mathrm{RSS}_1 + \mathrm{RSS}_2)/(n_1 + n_2 - 2k)},$$

где k — число оцениваемых параметров (в рассматриваемом случае $k = 2$: константа и коэффициент времени).

При справедливости нулевой гипотезы об отсутствии структурного сдвига статистика подчиняется распределению Фишера $F(k, n_1 + n_2 - 2k)$. Точка разлома выбиралась минимизацией суммы квадратов остатков при разделении выборки на два подпериода. Последовательный перебор возможных точек разлома выявил значимый сдвиг в четвертом квартале 2024 г. ($t_0 = 8$): $F(2, 8) = 7{,}32$; $p = 0{,}0156$.

Полученное значение позволяет отвергнуть нулевую гипотезу о постоянстве параметров модели на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ и указывает на наличие статистических признаков изменения характера временно́й динамики.

Следует учитывать, что тест Чоу фиксирует наличие структурного изменения модели, однако сам по себе не позволяет установить причины его возникновения, в связи с чем выявленный момент изменения следует рассматривать как основание для последующего анализа организационных, технологических или регламентных факторов, а не как доказательство влияния конкретного события.

С практической точки зрения полученный результат показывает, что использование единой модели качества для всего периода наблюдения может приводить к потере информации о внутренней динамике процесса. Это подтверждает целесообразность регулярного обновления параметров аналитических моделей в системах поддержки принятия решений.

Таким образом, гипотеза 3 о наличии структурных изменений получила статистическое подтверждение.

6 Проверка различий по типам документов

Для проверки различий временно́й динамики качества между типами документов был применен ковариационный анализ (ANCOVA) [19, 20]. Этот метод

позволил оценить, изменяется ли характер временно́го тренда в зависимости от категории документа при контроле общего влияния времени, т. е. сравнить наклоны линий регрессии для нескольких групп, контролируя влияние непрерывной ковариаты (времени). Модель включала логит-преобразованную долю документов категории «хорошее» в качестве зависимой переменной, фиксированный фактор «тип документа», непрерывную ковариату «время», а также член взаимодействия «тип–время» и имела вид:

$$\text{logit}\,(\pi_{it}) = \mu + \alpha_i + \beta t + \gamma_i t + \varepsilon_{it}\,,$$

где μ — общая константа модели (уровень при $t = 0$); i — тип документа; t — время; α_i — фиксированный эффект типа документа; β — общий коэффициент времени; γ_i — коэффициент взаимодействия (поправка к наклону тренда для конкретного типа документа); ε_{it} — случайная ошибка модели.

Основной интерес представлял анализ взаимодействия между временем и типом документа, для чего сравнивались полная модель (с членом взаимодействия) и вложенная (без него). Сравнение полной модели и вложенной дало $F(3, 32) = 4{,}747$; $p = 0{,}0063$. Эти результаты показывают статистически значимое улучшение качества полной модели. Полученное значение $p = 0{,}0063$ существенно ниже порога $0{,}01$, что позволяет отвергнуть нулевую гипотезу о параллельности трендов с высокой степенью уверенности. Это означает, что динамика качества не является единообразной, а наклоны линий тренда, т. е. скорости изменения качества между типами документов, значимо различаются. Данный результат обосновывает необходимость разработки индивидуальных стратегий управления для каждого типа документации.

Для интерпретации характера различий были рассчитаны оценки коэффициентов временного тренда отдельно для каждой группы. Оценки логит-коэффициентов времени для каждого типа из модели с взаимодействием (в исходных единицах / квартал) составили:

- КД: $\beta = 0{,}0639$ ($p = 0{,}072$) — слабый положительный тренд (незначим);
- ПД: $\beta = -0{,}6004$ ($p = 0{,}102$) — отрицательный тренд (незначим из-за высокой вариации);
- ГД: $\beta = 0{,}2587$ ($p = 0{,}003$) — значимый положительный тренд;
- ИИ: $\beta = 0{,}0396$ ($p = 0{,}161$) — слабый положительный тренд (незначим).

Среди отдельных групп статистически значимый положительный тренд был выявлен только для графической документации, что, вероятно, указывает на эффективность мер, принятых в отношении этой категории. Для программной документации наблюдалась отрицательная оценка коэффициента тренда, однако статистически значимых доказательств ухудшения качества получено не было ($p = 0{,}102$), что требует дополнительного анализа. Для остальных типов документов направления изменений коэффициентов также не достигли статистической значимости, в связи с чем они не интерпретировались как подтвержденные тенденции улучшения или ухудшения качества.

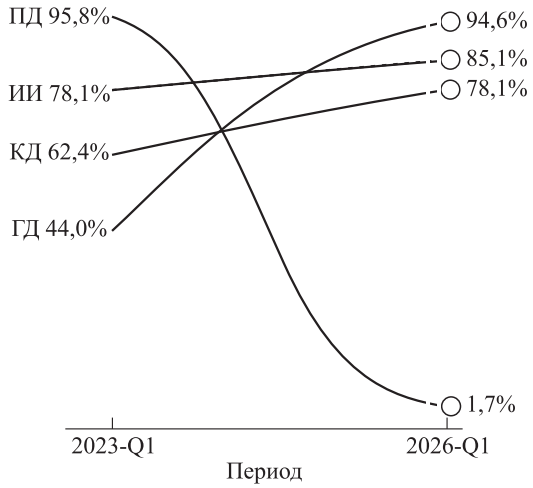


Рис. 3 Различия в динамике качества между типами документов

Полученные результаты свидетельствуют не о том, что отдельные типы документации обязательно улучшаются или ухудшаются, а о том, что характер изменений между группами различается и требует раздельного анализа (рис. 3). На практике это означает, что единые меры управления качеством могут иметь неодинаковую эффективность для различных типов документации, вследствие чего наиболее целесообразно применять дифференцированный подход к мониторингу и корректирующим мероприятиям. Таким образом, гипотеза 4 о различии временны́х траекторий качества между типами документации получила статистическое подтверждение.

7 Проверка качества на подверженность сезонности

Для оценки возможного влияния сезонных факторов на качество документации в модель регрессии (логит-доля от времени) были дополнительно включены фиктивные переменные кварталов Q_{kt} (первый квартал использовался в качестве базового уровня):

$$\operatorname{logit}(\pi_t) = \beta_0 + \beta_1 t + \sum_{k=2}^{4} \delta_k Q_{kt} + \varepsilon_t \,.$$

Такой подход позволял проверить наличие систематических внутригодовых колебаний показателя качества после учета общего временно́го тренда.

Совместная значимость сезонных компонентов оценивалась с использованием F-критерия путем сравнения расширенной модели с сезонными переменными Q_{kt} и модели, включающей только временной тренд: $F(3,7) = 1{,}817$; $p = 0{,}232$. Статистически незначимое значение $p = 0{,}232$ превышает установленный уровень

значимости $\alpha = 0{,}05$, свидетельствует об отсутствии регулярных внутригодовых колебаний качества и не дает статистических оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

Дополнительно выполнялась STL-декомпозиция временно́го ряда как описательный инструмент анализа структуры временно́й динамики. Она также не выявила выраженной сезонной компоненты, которая имела существенно меньшую амплитуду по сравнению с общей изменчивостью ряда (менее 5% от среднего уровня). Полученные результаты не позволяют сделать вывод о наличии регулярных сезонных колебаний качества документации в пределах исследуемого периода. Следует учитывать, что отсутствие статистически значимого эффекта не эквивалентно доказательству отсутствия сезонности вообще: найденный результат означает лишь то, что в имеющихся данных сезонный компонент не был обнаружен. С практической точки зрения это позволяет не включать сезонную корректировку в базовую аналитическую модель при текущем объеме наблюдений.

Для целей принятия управленческих решений накопленных данных достаточно, чтобы предположить, что процесс разработки документации остается стабильным и равномерным в течение года, а сезонные факторы (отпуска, отчетные периоды) существенно не влияют на качество. Отсутствие выраженных эффектов позволяет исключить сезонность из числа факторов, требующих обязательного учета при планировании ресурсов. Качество документов не подвержено регулярным внутригодовым колебаниям, что свидетельствует о стабильности процессов и опровергает гипотезу 5 о наличии сезонных колебаний.

8 Анализ корреляции объема с качеством

Для оценки возможной связи между объемом документопотока и качеством документации был выполнен корреляционный анализ [21, 23]. В качестве показателя объема использовалось количество документов за период наблюдения, а качество оценивалось через долю проблемных документов (категории «среднее» и «плохое»).

Для оценки линейной зависимости рассчитывался выборочный коэффициент корреляции Пирсона

$$r = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})\,(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \overline{x})^2 \sum_i (y_i - \overline{y})^2}},$$

где x_i — ежеквартальное общее число документов; y_i — доля проблемных (сумма «среднее» + «плохое») [18].

Анализ выполнялся по совокупности из 48 наблюдений (12 кварталов $\times$ 4 типа документов):

$$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}},$$

где $n = 48$ — число наблюдений, число степеней свободы $df = n - 2 = 46$. Следовательно, $r = -0{,}083$; $t(46) = -0{,}565$; $p = 0{,}575$.

В рассматриваемых гипотезах проверяется значение ρ (коэффициент корреляции в генеральной совокупности), но по имеющимся выборочным данным вычисляется только его оценка r, и с помощью t-критерия проверяется значимость отличия r от нуля, что эквивалентно проверке гипотезы $\rho = 0$. Если p-значение мало, то делается вывод о том, что корреляция в генеральной совокупности существует. Рассчитанное в данном случае значение коэффициента корреляции близко к нулю ($r = -0{,}083$) и указывает на отсутствие выраженной линейной зависимости между исследуемыми переменными. Это также подтверждается высоким p-значением ($p = 0{,}575$), которое свидетельствует об отсутствии какой-либо статистически значимой линейной связи между объемом документопотока и долей проблемных документов. Дополнительно был рассчитан ДИ для коэффициента корреляции (95%-ный ДИ: $[-0{,}36; 0{,}21]$). Поскольку интервал включает нулевое значение и допускает как слабую отрицательную, так и слабую положительную связь, собранные данные не позволяют установить устойчивую зависимость между объемом документопотока и качеством.

Для проверки возможных нелинейных зависимостей дополнительно выполнялся визуальный анализ диаграмм рассеяния и построение кривой сглаживания LOWESS (рис. 4). Явных признаков устойчивой нелинейной структуры обнаружено не было.

Следует отметить, что отсутствие статистически значимой корреляции не означает полного отсутствия влияния объема на качество. Полученный результат

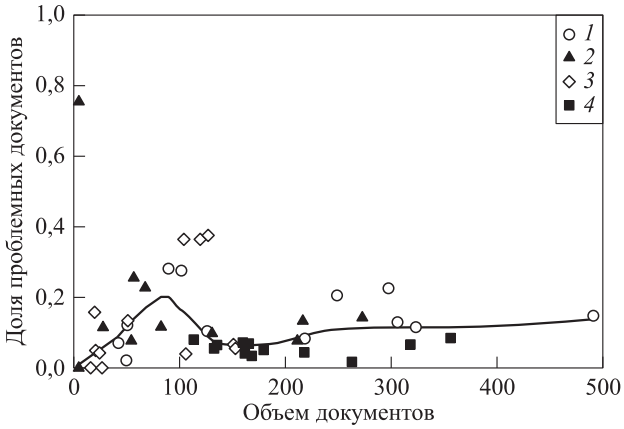


Рис. 4 Корреляция доли проблемных документов с объемом: *1* — КД; *2* — ПД; *3* — ГД; *4* — ИИ

свидетельствует лишь о том, что в пределах исследуемых данных и выбранной формы модели убедительных доказательств такой связи обнаружено не было. На практике это означает, что рост объема документопотока сам по себе не проявил устойчивой ассоциации с ухудшением качества документации в рассматриваемом периоде. Однако, хотя в исследуемом диапазоне объемов статистически значимой связи не обнаружено, данный результат создает предпосылки, которые позволяют предприятию наращивать объемы работ без серьезных опасений относительно ухудшения качества документации.

Таким образом, гипотеза 6 о наличии статистически значимой связи между объемом документопотока и качеством статистического подтверждения не получила.

9 Заключение

Проведенное исследование развивает статистический подход к анализу качества документации на специализированных отраслевых предприятиях. Для этого был разработан и апробирован подход к статистическому анализу качества документации отдельного специализированного отраслевого предприятия, ориентированный на использование в аналитических контурах систем поддержки принятия решений. На основе данных нормоконтроля о документах ($N = 6739$) за период с 2023 по 2025 гг. исследованы особенности распределения качества документации, временна́я динамика показателей и факторы, потенциально связанные с изменением уровня качества.

Были сформулированы и проверены шесть основных гипотез, касающихся гетерогенности качества по типам документов, его временно́й динамики, структурной устойчивости, связи с объемом, различий трендов по типам и сезонности. Четыре гипотезы получили статистическое подтверждение; две гипотезы: о наличии связи объема с качеством и наличии сезонности — не подтвердились.

Применение комплекса статистических методов (таблицы сопряженности, бутстрап, логит-моделирование, тест Чоу, ANCOVA, корреляционный анализ) позволило получить количественные характеристики исследуемого процесса и оценить устойчивость выявленных закономерностей. Показано наличие статистически значимой ассоциации между типом документа и категорией качества, при этом величина эффекта характеризовалась как слабая по размеру, но воспроизводимая в пределах исследуемой выборки. Анализ временно́й динамики выявил устойчивую положительную тенденцию изменения доли документов высокого качества и позволил построить прогнозный сценарий развития показателя при сохранении наблюдаемых условий. Дополнительно обнаружены статистические признаки структурного изменения процесса во второй половине исследуемого периода, а также различия траекторий изменения качества между типами документации.

Одновременно результаты не подтвердили наличие выраженных сезонных эффектов и не выявили статистически значимой линейной связи между объ-

емом документопотока и качеством. Эти выводы следует интерпретировать как отсутствие достаточных статистических оснований для подтверждения соответствующих эффектов в рамках исследуемых данных, а не как доказательство их полного отсутствия.

Научная значимость работы заключается в адаптации комплекса интерпретируемых статистических методов к анализу процессов документооборота в условиях специализированного отраслевого предприятия. В отличие от чисто описательных подходов, предложенная методика позволяет проводить формализованную оценку закономерностей, учитывать неопределенность результатов посредством ДИ и использовать единый аналитический контур для оценки состояния процесса.

Практическая значимость исследования состоит в возможности интеграции разработанного подхода в существующие процедуры мониторинга качества документации и поддержки управленческих решений. Полученные результаты могут использоваться для приоритизации направлений контроля, регулярного анализа динамики показателей и построения сценариев развития качества документационного обеспечения.

При интерпретации результатов необходимо учитывать ограничения исследования. Анализ выполнен на данных одного отдельного предприятия, временной интервал наблюдений ограничен тремя годами, а качество оценивалось на основе категориальной шкалы, не учитывающей различную критичность отдельных замечаний. Указанные ограничения не снижают применимость предложенного подхода, однако ограничивают возможность прямого переноса количественных оценок на другие организации без дополнительной проверки.

Перспективы дальнейших исследований связаны с расширением выборки за счет включения данных нескольких предприятий, с учетом структуры и критичности выявляемых замечаний, а также с разработкой предиктивных моделей оценки вероятности возврата документа еще до завершения процедуры нормоконтроля. Дополнительным направлением может стать анализ экономических последствий изменения качества документации и интеграция результатов в комплексные системы поддержки принятия решений.

Литература

1. *Гвоздарев Р. С.* Повышение качества проектирования и производства РЭС на основе разработки методических принципов снижения объемов корректировок конструкторской документации: Дис. . . . канд. техн. наук. — М.: МАТИ, 2012. 153 с.
2. *Юрин Д. С.* Совершенствование инструментов обеспечения качества процесса разработки рабочей конструкторской документации авиационной техники: Дис. . . . канд. техн. наук. — М.: МАИ, 2023. 152 с. EDN: ALZIUW.
3. *Ларин С. Н.* Повышение качества технологической документации в организационно-технических системах подготовки производств // Известия ТулГУ. Технические науки, 2024. Вып. 4. С. 14–18. doi: 10.24412/2071-6168-2024-4-14-15. EDN: ZSVQQY.

4. ГОСТ Р ИСО 9001-2015. Системы менеджмента качества. Требования. — М.: Стандартинформ, 2018. 32 с.
5. ГОСТ Р ИСО 10013-2024. Системы менеджмента качества. Руководство по документированной информации. — М.: Российский институт стандартизации, 2024. 20 с.
6. *Kerzner H.* Project management metrics, KPIs, and dashboards: A guide to measuring and monitoring project performance. — 3rd ed. — Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2017. 434 p. doi: 10.1002/9781119427599.
7. *James G., Witten D., Hastie T., Tibshirani R.* An introduction to statistical learning: With applications in *R*. — Springer texts in statistics ser. — New York, NY, USA: Springer, 2017. Vol. 103. 440 p.
8. *Montgomery D. C.* Introduction to statistical quality control. — 8th ed. — New York, NY, USA: Wiley, 2020. 768 p.
9. *Ma A., Liu Y., Xu X., Dong T.* A deep-learning based citation count prediction model with paper metadata semantic features // Scientometrics, 2021. Vol. 126. P. 6803–6823. doi: 10.1007/s11192-021-04033-7.
10. *Hyndman R., Athanasopoulos G.* Forecasting: Principles and practice. — 3rd ed. — Melbourne, Australia: OTexts, 2021. 442 p.
11. *Agresti A.* Categorical data analysis. — 3rd ed. — Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2013. 752 p.
12. *Montgomery D. C.* Design and analysis of experiments. — 9th ed. — Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2017. 734 p.
13. Frontiers in statistical quality control 14 / Eds. S. Knoth, W. Schmid. — Cham: Springer, 2026. 289 p. doi: 10.1007/978-3-032-02975-1.
14. *Efron B., Hastie T.* Computer age statistical inference. — 6th ed. — Cambridge: Cambridge University Press, 2021. 491 p.
15. *Hosmer D. W., Lemeshow S., Sturdivant R.* Applied logistic regression. — 3rd ed. — Wiley ser. in probability and statistics. — Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2013. 528 p. doi: 10.1002/9781118548387.
16. *Harrell F. E., Jr.* Regression modeling strategies: With applications to linear models, logistic and ordinal regression, and survival analysis. — 2nd ed. — Springer ser. in statistics. — Cham: Springer, 2015. 598 p. doi: 10.1007/978-3-319-19425-7.
17. *Zeileis A., Kleiber C., Krämer W., Hornik K.* Testing and dating structural changes in practice // Comput. Stat. Data An., 2003. Vol. 44. No. 1-2. P. 109–123. doi: 10.1016/S0167-9473(03)00030-6.
18. *Greene W. H.* Econometric analysis. — 7th ed. — Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson Education, Inc., 2012. 1228 p.
19. *Rutherford A.* ANOVA and ANCOVA: A GLM approach. — 2nd ed. — Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2011. 360 p.
20. *Field A.* Discovering statistics using IBM SPSS statistics. — 6th ed. — London: SAGE Publications, 2024. 1144 p.
21. *Chatfield C., Xing H.* The analysis of time series: An introduction. — 7th ed. — Texts in statistical science ser. — New York, NY, USA: Chapman and Hall/CRC, 2019. 414 p. doi: 10.1201/9781351259446.

22. *Schober P., Boer C., Schwarte L. A.* Correlation coefficients: Appropriate use and interpretation // Anesth. Analg., 2018. Vol. 125. Iss. 5. P. 1763–1768. doi: 10.1213/ANE.0000000000002864.

23. *Wasserstein R. L., Schirm A. L., Lazar N. A.* Moving to a world beyond $p < 0.05$ // Am. Stat., 2019. Vol. 73. Iss. S1. P. 1–19. doi: 10.1080/00031305.2019.1583913.

Поступила в редакцию 14.04.2026
Принята к публикации 15.09.2026

INTERPRETABLE STATISTICAL MODELING OF DOCUMENTATION QUALITY AND ITS TEMPORAL DYNAMICS

A. A. Sachko, A. M. Sachko, and V. Yu. Pozdyshev

Independent Non-Profit Organization of Further Vocational Education "Science and Education Center of Aerospace Defense "Almaz–Antey," 41, bld. 2 Vereyskaya Str., Moscow 121471, Russian Federation

Abstract: Documentation quality at specialized industrial enterprises is a critical factor influencing order lead times, manufacturing process stability, production costs, and product performance. However, existing documentation control approaches primarily focus on identifying already manifested nonconformities and underutilize statistical analysis methods for management decision support, particularly in pattern recognition and risk forecasting. This study aims to develop and validate a statistical analysis methodology for documentation quality to enhance decision support systems at specialized industrial enterprises. The study is based on a comprehensive census of 6,739 documents that underwent standard compliance control (normative control) at a defense industrial enterprise over 12 quarters from Q1 2023 to Q4 2025. These documents were categorized into four types (engineering, software, and graphical documentation, along with change notices) and three quality levels ("Good," "Average," and "Poor"). The research methods included contingency table analysis (Pearson's χ^2 test, Cramérs's V, and standardized residuals) with bootstrap estimation for result robustness; time-trend modeling of the logit-transformed proportion of high-quality documents with residual diagnostics (Shapiro–Wilk, Breusch–Pagan, and Durbin–Watson tests) and forecasting; the Chow test for structural break detection; analysis of covariance (ANCOVA); seasonality analysis; and correlation analysis.

Keywords: statistical analysis; documentation quality; decision support system; contingency tables; logit model; analysis of covariance (ANCOVA); correlation; forecasting

DOI: 10.14357/08696527260308 **EDN:** XUQFCC

References

1. Gvozdarev, R. S. 2012. Povyshenie kachestva proektirovaniya i proizvodstva RES na osnove razrabotki metodicheskikh printsipov snizheniya ob"emov korrektirovok konstruktorskoy dokumentatsii [Improving the quality of the design and manufacture of radio-electronic equipment through the development of methodological principles for reducing the volume of design documentation revisions]. Moscow: MATI. PhD Thesis. 153 p.
2. Yurin, D. S. 2023. Sovershenstvovanie instrumentov obespecheniya kachestva protsessa razrabotki rabochey konstruktorskoy dokumentatsii aviatsionnoy tekhniki [Improving quality assurance tools for the process of developing working design documentation for aircraft equipment]. Moscow: MAI. PhD Thesis. 152 p. EDN: ALZIUW.
3. Larin, S. N. 2024. Povyshenie kachestva tekhnologicheskoy dokumentatsii v organizatsionno-tekhnicheskikh sistemakh podgotovki proizvodstv [Improving the quality of technological documentation in organizational and technical systems of production preparation]. *Izvestiya TulGU. Tekhnicheskie nauki* [Tula State University Proceedings] 4:14–18. doi: 10.24412/2071-6168-2024-4-14-15. EDN: ZSVQQY.
4. GOST R ISO 9001-2015. 2018. Sistemy menedzhmenta kachestva. Trebovaniya [Quality management systems. Requirements]. Moscow: Standardinform Publs. 32 p.
5. GOST R ISO 10013-2024. 2024. Sistemy menedzhmenta kachestva. Rukovodstvo po dokumentirovannoy informatsii [Quality management systems. Guidance for documented information]. Moscow: Russian Institute for Standardization. 20 p.
6. Kerzner, H. 2017. *Project management metrics, KPIs, and dashboards: A guide to measuring and monitoring project performance*. 3rd ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. 434 p. doi: 10.1002/9781119427599.
7. James, G., D. Witten, T. Hastie, and R. Tibshirani. 2017. *An introduction to statistical learning: With applications in R.* Springer texts in statistics ser. New York, NY: Springer. Vol. 103. 440 p.
8. Montgomery, D. C. 2020. *Introduction to statistical quality control*. 8th ed. New York, NY: Wiley. 768 p.
9. Ma, A., Y. Liu, X. Xu, and T. Dong. 2021. A deep-learning based citation count prediction model with paper metadata semantic features. *Scientometrics* 126(8):6803–6823. doi: 10.1007/s11192-021-04033-7.
10. Hyndman, R., and G. Athanasopoulos. 2021. Forecasting: Principles and practice. 3rd ed. Melbourne, Australia: OTexts. 442 p.
11. Agresti, A. 2013. *Categorical data analysis*. 3rd ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. 752 p.
12. Montgomery, D. C. 2017. *Design and analysis of experiments*. 9th ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. 734 p.
13. Knoth, S., and W. Schmid, eds. 2026. *Frontiers in statistical quality control 14*. Cham: Springer. 289 p. doi: 10.1007/978-3-032-02975-1.
14. Efron, B., and T. Hastie. 2021. *Computer age statistical inference*. 6th ed. Cambridge: Cambridge University Press. 491 p.

15. Hosmer, D. W., S. Lemeshow, and R. Sturdivant. 2013. *Applied logistic regression*. 3rd ed. Wiley ser. in probability and statistics. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. 528 p. doi: 10.1002/9781118548387.
16. Harrell, F. E., Jr. 2015. Regression modeling strategies: With applications to linear models, logistic and ordinal regression, and survival analysis. 2nd ed. Springer ser. in statistics. Cham: Springer. 598 p. doi: 10.1007/978-3-319-19425-7.
17. Zeileis, A., C. Kleiber, W. Krämer, and K. Hornik. 2003. Testing and dating structural changes in practice. *Comput. Stat. Data An.* 44(1-2):109–123. doi: 10.1016/S0167-9473(03)00030-6.
18. Greene, W. H. 2012. *Econometric analysis*. 7th ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, Inc. 1228 p.
19. Rutherford, A. 2011. *ANOVA and ANCOVA: A GLM approach*. 2nd ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. 360 p.
20. Field, A. 2024. *Discovering statistics using IBM SPSS statistics*. 6th ed. London: SAGE Publications. 1144 p.
21. Chatfield, C., and H. Xing. 2019. *The analysis of time series: An introduction*. 7th ed. Texts in statistical science ser. New York, NY: Chapman and Hall/CRC. 414 p. doi: 10.1201/9781351259446.
22. Schober, P., C. Boer, and L. A. Schwarte. 2018. Correlation coefficients: Appropriate use and interpretation. *Anesth. Analg.* 125(5):1763–1768. doi: 10.1213/ANE.0000000000002864.
23. Wasserstein, R. L., A. L. Schirm, and N. A. Lazar. 2019. Moving to a world beyond $p < 0.05$. *Am. Stat.* 73(S1):1–19. doi: 10.1080/00031305.2019.1583913.

Received April 14, 2026
Accepted September 15, 2026

Contributors

Sachko Alexander A. (b. 1998) — PhD student, Independent Non-Profit Organization of Further Vocational Education "Science and Education Center of Aerospace Defense "Almaz–Antey," 41, bld. 2 Vereyskaya Str., Moscow 121471, Russian Federation; aasachko@almaz-antey.ru

Sachko Anastasia M. (b. 1999) — PhD student, Independent Non-Profit Organization of Further Vocational Education "Science and Education Center of Aerospace Defense "Almaz–Antey," 41, bld. 2 Vereyskaya Str., Moscow 121471, Russian Federation; nastja-9900@mail.ru

Pozdyshev Valery Yu. (b. 1960) — Doctor of Science in technology, senior lecturer, scientific supervisor, Independent Non-Profit Organization of Further Vocational Education "Science and Education Center of Aerospace Defense "Almaz–Antey," 41, bld. 2 Vereyskaya Str., Moscow 121471, Russian Federation; pozvalerij@yandex.ru

ИНТЕГРАЦИЯ МЕТОДОВ И РЕШЕНИЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В СЕТЕЦЕНТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

***А. А. Грушо*[1], *Н. А. Грушо*[2], *М. И. Забежайло*[3], *А. А. Зацаринный*[4], *В. О. Писковский*[5]**

Аннотация: Обсуждаются некоторые аспекты истории, а также современные возможности применения сетецентрических (СЦ) технологий в системах управления и поддержки принятия решений. Особое внимание уделено проблеме интеграции методов и решений искусственного интеллекта (ИИ) в СЦ системах управления (СЦСУ). Сформулирован ряд актуальных проблем, характеризующих использование методов и технологий на базе ситуационного управления (СУ) в современных СЦСУ для поддержки принятия решений в динамически меняющейся обстановке. Рассмотрен ряд особенностей современного подхода к созданию СЦ систем (СЦС) военного управления. С учетом современных достижений в развитии информационно-технологической (ИТ) инфраструктуры и широкого использования новых перспективных решений в области ИИ обсуждаются возможности использования СЦСУ как площадки для интеграции различных методов и средств представления и интеллектуального анализа данных, в том числе с целью поддержания ситуационной осведомленности (СО) лиц, принимающих решения (ЛПР).

Ключевые слова: сетецентрические системы управления; искусственный интеллект; анализ данных и принятие решений; ситуационная осведомленность; интеграция методов и решений

DOI: 10.14357/08696527260309 **EDN:** WWTWAA

1 Введение

В условиях современной геополитической обстановки в мире особую актуальность приобретает концепция СЦ-управления, прежде всего в сфере обороны, безопасности и правопорядка [1]. Наиболее убедительно развитие принципов

[1]Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, grusho@yandex.ru

[2]Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, info@itake.ru

[3]Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, m.zabezhailo@yandex.ru

[4]Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, AZatsarinny@frccsc.ru

[5]Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, vpvp80@yandex.ru

сетецентризма подтверждается опытом проведения специальной военной операции на Украине, в ходе войны на Ближнем Востоке и других вооруженных конфликтов [2, 3]. Одним из ключевых факторов при этом выступает резко возросшая роль информационного обеспечения при планировании и проведении операций различного уровня, основанного на применении широкого спектра информационных технологий, прежде всего технологий ИИ.

В статье рассматриваются системотехнические подходы к интеграции методов и решений, предлагаемых современными технологиями ИИ, применительно к задачам, реализуемым в рамках СЦСУ.

2 Некоторые исторические аспекты концепции сетецентрического управления

Актуальность рассмотрения этапов развития концепции СЦ-управления представляет интерес с учетом таких факторов, как интенсивное развитие информационных технологий во всех сферах, ускоренный переход к новой парадигме в научных исследованиях, основанных на обработке и анализе накопленных данных большого объема, активные высокотехнологичные военные разработки в разных странах, включая США, НАТО и Китай, а также их апробация в рамках ведущихся войн и вооруженных конфликтов.

Суть СЦ-управления состоит в объединении всех участников в единое информационное поле и реализации алгоритмов автоматического взаимодействия между ними, что принципиально, без централизованного управления.

Формально авторами концепции СЦ войны считаются американские специалисты: вице-адмирал Военно-морских сил США Артур Себровски и профессор Джон Гарстка, которые опубликовали основные положения этой концепции в конце 1990-х гг. [4].

Вместе с тем этот этап следует считать вторичным, так как концепция СЦ-управления на самом деле впервые была разработана в Советском Союзе еще в начале 1980-х гг. Так, начальник Генерального штаба Вооруженных Сил СССР маршал Н. В. Огарков в этот период не только предложил подходы, во многом предвосхитившие сетецентризм, но и успешно апробировал их в ходе руководимых им крупных учений «Запад-81» и «Щит-82», которые произвели большое впечатление на США и их союзников [5, 6].

Реализация СЦ-подходов была основана на применении в ходе упомянутых учений на полевых пунктах управления комплексов автоматизации новой автоматизированной системы управления (АСУ) войсками (АСУВ) «Маневр». В этой АСУВ впервые обеспечивался автоматизированный обмен данными между всеми пунктами управления с высокими показателями оперативности, надежности и защиты информации. По различным оценкам, данная система в несколько раз повышала эффективность управления войсками и оружием, прежде всего в тактическом звене [5]. В последующие годы АСУВ «Маневр» стала основой

управления войсками стран Варшавского договора. К сожалению, комплексы автоматизации так и не были широко внедрены в Вооруженных Силах СССР, а после его распада работы в этом направлении в России по целому ряду причин практически остановились.

Вместе с тем технологии этой системы по известным причинам стали доступны в США и после весьма высокой их оценки получили развитие на основе более современных аппаратно-программных средств и систем связи. Есть свидетельства, что американцы после прекращения существования Варшавского договора изучили оставшийся в ГДР комплекс «Маневр»: его использовали в штабных играх, и результат впечатлил — автоматизация позволила условной армии Варшавского договора разгромить НАТО без ядерного оружия за несколько дней. Алгоритмы «Маневра» впоследствии легли в основу американской концепции, которая, по существу, и представлена в известной статье [4]. Именно в ней авторы ввели широко применяемый впоследствии термин «сетецентрическая война».

Концепцию стали активно внедрять в США, в частности в войне в Ираке в 2003 г. Так, коалиционные силы использовали распределенную информационную систему боевого управления уровня «бригада–батальон–рота». Для ориентирования и передачи формализованных сообщений (приказов, донесений, подтверждений и т. п.) командиры и передовые наводчики американских подразделений были оснащены карманными компьютерами [7]. Это был пример практического применения СЦ подходов в действии, который позволил представить весь военный ресурс в Ираке в виде единой системы. Отметим, что при этом американцы признают приоритет и значимость идей Н. В. Огаркова [5, 7].

В России развитие системных замыслов АСУВ «Маневр» было продолжено в середине 1990-х гг. в рамках создания АСУ «Полет-К» в интересах Воздушно-десантных войск (ВДВ). Работы велись под руководством одного из создателей АСУВ «Маневр» Р. П. Николаева [5, 8]. В этой системе, представлявшей собой глубокое развитие СЦ идей, предполагалось довести управление до каждой единицы на поле боя: самолета, вертолета, орудия, бойца. К началу 2000-х гг. разработка данной АСУ была в целом завершена, а успешные полигонные испытания ее компонентов показали, что система может быть применена как для управления мобильными ВДВ, так и соединениями Сухопутных войск. Однако дальнейшие работы были приостановлены в связи с запуском комплексной программы по созданию единой системы управления тактического звена (ЕСУ ТЗ). В ней реализуются требования по объединению в единую сеть командных пунктов, разведки, ракетных войск и артиллерии, войсковой авиации и противовоздушной обороны (ПВО), бронетехники, беспилотных летательных аппаратов и даже экипировки личного состава с использованием систем навигации, связи и спутниковых средств наблюдения.

Отметим, что различные аспекты концепции СЦ-управления постоянно подвергались критическому анализу [9–12]. Так, в [11] представлен анализ этой концепции с позиций ее влияния на развитие инфокоммуникационных технологий.

3 Особенности современного подхода к созданию сетецентрических систем военного управления

Современные подходы к реализации СЦСУ в военной сфере предполагают объединение в единую информационную сеть абсолютно всех участников боевых действий, а это не только пункты, органы и средства управления, но также и огромное число средств исполнительных звеньев, включая авиацию, ракетное и артиллерийское оружие, средства ПВО, разведки, радиоэлектронной борьбы, безэкипажные средства различного базирования и многое другое. Для такого «квазиглобального» («квази» — в рамках района боевых действий) объединения применяется автоматизированная защищенная система связи с высокими показателями устойчивости и пропускной способности за счет комплексного использования каналов различной физической природы (радио, проводных, оптических, спутниковых, лазерных и др.). Управление функционированием системы связи также включается в контур СЦ-управления. При этом, в отличие от классических централизованных методов управления по иерархии подчиненности, в СЦСУ реализуется принципиальная возможность автоматизированного информационного взаимодействия «каждый с каждым». Предполагается, что единого центра управления в таких системах не существует.

Главная цель такого управления — формирование в кратчайшие сроки (минуты и даже секунды) и поддержание СО о состоянии конкретных участков боевого соприкосновения для должностных ЛПР. Очевидно, что реализация столь сложной СЦСУ огромным числом разнородных компонентов требует разработки сложных алгоритмов обработки, анализа, передачи, хранения, а также защиты информации.

Естественно, что такие алгоритмы должны создаваться на основе интеграции больших разнородных данных, платформенного подхода и, конечно же, применения технологий ИИ [13, 14].

Важнейшая область результативного применения ИИ сегодня — анализ больших данных (Big Data[1]) и поддержка принятия решений в ограниченное время. Действительно, ограниченность времени не позволяет провести исчерпывающий анализ Big Data традиционными методами. Тем не менее имеются возможности использовать в компьютерном анализе опыт человека-эксперта, изучающего Big

[1] Сегодня термин Big Data интегрирует сразу несколько эффектов — характеристик больших данных. Однако предпринятое здесь обсуждение фокусируется в первую очередь лишь на двух: (1) эффекте собственно Big — отсутствии возможностей обрабатывать уже имеющиеся огромные объемы данных, задействовав разумные ресурсы (вычислительные мощности, время...), и (2) эффекте Open — открытости обрабатываемых коллекций данных, допускающем возможности пополнять уже имеющиеся данные информацией принципиально новой «природы» (следствием чего становятся трудности в части адекватного использования ряда традиционных методов анализа данных и отсутствия в общем случае возможностей для надежного обоснования корректности получаемых заключений — см. далее по тексту).

Data в условиях, когда применение традиционных методов анализа данных[1] не ведет к успеху[2]. Обычно в таких ситуациях эксперт, используя те или иные цепочки рассуждений, приводит результирующее заключение к неоспариваемому[3] состоянию либо констатирует недостаточность имеющихся у него текущих данных для формирования неоспариваемого заключения[4]. Перенос на компьютер используемых экспертом эвристических приемов, в первую очередь результативной схемы его рассуждений, позволяет реализовать тот же — «прозрачно» интерпретируемый и объясняемый для ЛПР — способ анализа данных, однако с обработкой существенно больших объемов информации, причем с существенно более высокой скоростью.

Современный СЦ-подход по сути — именно такая область анализа информации и управления, где динамически меняющиеся большие объемы данных (Big Data) необходимо обрабатывать в ограниченные интервалы времени. Здесь приходится иметь дело одновременно с множеством текущих целей, а также сменяющих друг друга ситуаций, каждая из которых характеризуется множеством разнородных параметров. Достаточно широко известный сегодня пример технологического решения подобного типа — система Palantir [15, 16], представляющая собой глобальную цифровую платформу сбора и консолидации (через множество реализуемых интерфейсов, шлюзов), а также последующего оперативного анализа данных из всевозможных источников, ориентированного на поддержку ЛПР разных уровней в принятии решений. Возможности системы Palantir обеспечивать глубокий анализ огромных объемов данных в заданные интервалы времени, ограниченные требованиями применения в реальной обстановке, — важнейшая характерная особенность этого системотехнического СЦ-решения.

Приведем примерный перечень наиболее актуальных задач, которые могли бы решаться в сфере безопасности, обороны и правопорядка с использованием ИИ [14]:

- **формирование СО** для ЛПР на основе сбора и анализа огромного объема разведывательных данных из источников различной модальности и большой размерности, а также больших объемов неструктурированной информации из открытых источников о состоянии военно-политической обстановки в конкретных регионах;
- **планирование сценариев боевых действий** с применением современных средств поражения, разведки и навигации, включающее оценку и прогнози-

[1]Например, доказательств дедуктивного или же статистического характера для обоснования доверия к формируемым в процессе анализа данных заключениям.

[2]Например, из-за открытого (допускающего пополнения информацией, в том числе принципиально нового типа) характера Big Data.

[3]*Неопровергаемости* на имеющихся в его распоряжении данных.

[4]Иными словами, фиксируется необходимость пополнения текущего массива анализируемых данных новой информацией, которая будет использована для обеспечения достоверности итогового заключения.

рование возможных исходов операций с использованием больших мультимодальных моделей (подобных GPT (Generative Pretrained Transformer) [17], Anthropic Cloud [18] и др., а также платформ типа Palantir [15, 16]);

- **создание цифровых двойников** средств вооружения, военной и специальной техники (ВВСТ), а также цифровых полигонов для реализации новых подходов к проведению испытаний образцов ВВСТ с целью сокращения времени и стоимости испытаний, повышения качества проектирования;
- **создание и отработка технологий** роевого взаимодействия беспилотных аппаратов в различных средах: наземной, надводной, подводной и воздушной;
- **разработка комплекса моделей и алгоритмов** автономной работы объектов, функционирующих в скрытном режиме без постоянной связи с центрами управления, включая навигацию, поддержку принятия решений и др.;
- **разработка технологий анализа** медиаданных (фотографий, видеозаписей, голоса) с целью выявления искусственно сформированных подделок (дипфейков);
- **моделирование новых материалов** с заданными свойствами с учетом требований к современной боевой экипировке военнослужащих;
- **разработка комплекса организационно-технических мер** для обеспечения информационной безопасности, включая поиск уязвимостей, их распознавание, классификацию и нейтрализацию;
- **разработка комплекса моделей и алгоритмов**, обеспечивающих формирование и машинное обучение больших языковых моделей с использованием высокопроизводительной вычислительной инфраструктуры;
- **интеграция в единый сводный отчет** результатов покомпонентной обработки мультимодальных данных, характеризующих конкретный объект или ситуацию на поле боя (решение проблемы комплексирования данных, или *data fusion*).

В настоящее время лидирующие позиции в использовании ИИ в военных и оборонных целях занимают США [19]. Так, в 2018 г. был создан Объединенный центр искусственного интеллекта (Joint Artificial Intelligence Center, JAIC), который впоследствии трансформировался в централизованную структуру — Проектный офис по цифровой трансформации и искусственному интеллекту (Chief Digital and Artificial Intelligence Office, CDAO). Его задача — координация всех инициатив по внедрению ИИ в оборонную отрасль. Особое внимание уделяется трем направлениям [19]:

(1) предиктивная аналитика;

(2) развитие автономных систем;

(3) интеллектуальная обработка данных.

В основе — задача анализа массивов многомодальных данных (спутниковые снимки, данные радиолокационной разведки, телеметрии носимых и бортовых устройств и др.).

Ключевой тренд состоит в переориентации с крупных поставщиков-монополистов цифровых решений (Boeing, Northrop Grumman, Lockheed Martin, Raytheon) на небольшие, но «агрессивные» и инновационные компании, ранее не работавшие в военной сфере. Это прежде всего Palantir и Anduril [20].

Сегодня одним из технологических лидеров в сфере реализации СЦСУ стала аналитическая компания «Палантир» (Palantir). В основе — результаты многолетних исследований и разработок для применения технологий ИИ в военной сфере. Наряду с известными компаниями-гигантами (Boeing, Lockheed Martin, Northrop Grumman и др.) «Палантир» стала активно формировать нынешний технологический ландшафт в области национальной безопасности США [15, 19]. Так, в марте 2026 г. на конференции AIPCON компания продемонстрировала возможности новой военной системы Maven Smart System, которая обеспечивает существенное повышение эффективности управления ударами за счет сокращения цикла управления (время от распознавания целей до формирования задания на применение оружия по ним). Эта система внедряется во всех родах войск Пентагона [21].

4 Сетецентрические системы управления и задача поддержания ситуационной осведомленности лиц, принимающих решения

Результативность использования СЦ-подхода подразумевает надежность применяемых решений-компонентов, в первую очередь по следующим трем направлениям:

(a) анализ данных и формирование предложения для ЛПР по предпочтительным в текущей ситуации управленческим решениям (компоненты СЦС анализа данных и поддержки принятия решений (АДиППР);

(b) поддержание надежной связи между узлами задействованной СЦ-инфраструктуры;

(c) обеспечение надежной защиты как компонентов СЦС АДиППР, так и инфраструктуры обмена данными между узлами СЦСУ от внешних вредоносных воздействий (компьютерных атак).

При этом специфичный для направлений (b) и (c) комплекс задач — это особая область, где в фокусе внимания как вопросы устойчивости коммуникационной архитектуры СЦСУ к нарушениям штатного режима связи между узлами, так и стойкость инфраструктуры СЦСУ по отношению к компьютерным атакам противника. Это комплекс задач, включающий:

– обеспечение возможности самовосстановления в случае отказов отдельных узлов СЦСУ;

– использование инновационных подходов к обеспечению надежности коммуникаций[1] в условиях использования каналов связи пониженного качества (в том числе деградирующих или же временно недоступных);
– баланс ответственности Центра и конкретного узла СЦСУ при принятии решения в конкретной ситуации (проблема баланса сетецентричности и централизации в механизмах обеспечения оперативности и надежности принимаемых решений[2]);
– а также ряд других значимых аспектов заслуживают обсуждения в отдельной публикации.

Здесь же ограничимся рассмотрением возможностей инструментария тех компонентов СЦ-систем, которые обеспечивают анализ данных, генерацию и оценку альтернатив, а также выбор из этих альтернатив — собственно принятие решений.

Поддержание ситуационной осведомленности ЛПР может быть формализовано как задача анализа текущих данных с целью формирования и оценки альтернатив для принятия решений, выполняемых в режиме жестких ограничений по времени, обусловленных динамикой развития ситуаций [13]. Рассмотрим, какими «процедурными средствами», в том числе математическими моделями, методами и алгоритмами, обеспечивающими эффективную (в смысле сложности необходимых вычислений, а также массивности привлекаемых компьютерных ресурсов) реализацию в критически значимых приложениях, можно обеспечить поддержание СО.

Одним из результативных в реальных приложениях классов таких методов и решений оказалось предложенное Д. А. Поспеловым еще в середине 1980-х гг. СУ [22–24]. Уже в середине 1990-х гг. этот подход стал активно использоваться американскими специалистами в приложениях оборонного характера [25–30] как один из популярных вариантов процедурной реализации компонентов СЦС АДиППР.

В основе используемого в рамках СУ-подхода лежит кластеризация состояний объекта управления (ситуаций), описываемых в том числе на естественном языке. Далее каждому из построенных таким путем классов «однородных» ситуаций сопоставляется типовое (для данного кластера состояний объекта управления) решение. В результате формируется система правил-продукций вида: если ⟨*ситуация*⟩ ⇒ то ⟨соответствующее ей *решение*⟩. Сформированная таким

[1] См., в частности, возможности подхода semantic communication, в основе которого учет контекста и фоновых знаний участников коммуникации, позволяющих активно задействовать в информационном обмене также и смысл передаваемых сообщений. Общее представление о возможностях этого подхода можно найти, в частности, в обзорах: *Qin Zh., Tao X., Lu J., Li G. E.* Semantic communications: Principles and challenges. arXiv:2201.01389v1 [cs.IT], 30 Dec 2021; *Xin G., Fan P., Letaief K. B.* Semantic communication: A survey of its theoretical development // Entropy, 2024. Vol. 26. Art. 102. doi: 10.3390/e26020102.

[2] См., например, недавний обзор корпорации RAND: How Artificial Intelligence Could Reshape Four Essential Competitions in Future Warfare, RAND Corp. Available at: https://www.rand.org (accessed January 22, 2026).

образом система правил (rule-based system) реализует механизм управления, позволяя при необходимости выстраивать цепочки управляющих воздействий в динамически меняющихся ситуациях действия объекта управления. Актуальность СУ-подхода при использовании в приложениях военного характера не утрачена и в настоящий момент (см., например, [1] и др.).

Однако в таком «прямолинейном» использовании СУ-подхода в современных СЦСУ обозначились два «узких места».

Первое состоит в том, что выявилась критическая необходимость обеспечивать динамическую реорганизацию используемых в системе СУ-правил СИТУАЦИЯ $\Rightarrow$ РЕШЕНИЕ (быстрое, т. е. отвечающее скорости изменения анализируемой ситуации, порождение новых правил, которые необходимо включить в актуальную систему СУ-правил, а также оперативное удаление из системы СУ-правил тех компонентов, которые утратили свою актуальность).

Вторым узким местом стала необходимость быстро, т. е. соответствуя скорости изменения анализируемой ситуации, проводить проверку непротиворечивости вновь сформированной текущей (измененной — см. выше) системы СУ-правил.

При этом практика показала, что надежный ответ на каждый из этих вызовов требует в том числе и проведения дополнительных проблемно-ориентированных фундаментальных исследований.

Таким образом, разработка подходов, математических моделей и методов, а также реализующих их прикладных программно-аппаратных решений, способных обеспечить надежную защиту коммуникаций и узлов СЦСУ от внешних вредоносных воздействий, становится сегодня актуальной проблематикой, привлекающей все более пристальное внимание специалистов [31].

5 Сетецентрическая система управления как «площадка» интеграции множества методов и средств представления и анализа данных

Наряду с разработкой методов и моделей СЦСУ не менее серьезного внимания требуют и механизмы организации взаимосогласованной обработки в СЦСУ массивных мультимодальных данных.

Собственно принятие решения в СЦСУ в конкретной ситуации охватывает три аспекта:

(1) сбор значений параметров, характеризующих эту конкретную ситуацию;

(2) учет опыта решений (причем как успешных, так и признанных позднее ошибочными), ранее уже принимавшихся в похожих ситуациях;

(3) математический и программный «инструментарий» АДиППР, который позволял бы корректно обрабатывать имеющиеся данные различных видов однородными (взаимно согласованными) методами и алгоритмами.

Наиболее популярный класс «инструментов» анализа данных в рассматриваемом контексте — это математические модели интерполяционно-экстраполя-

ционного типа. Их средствами реализуется простая двухшаговая процедурная схема:

(1) первичное «обучение» на уже накопленных данных (интерполяция имеющегося набора ситуаций-прецедентов, подобных анализируемому, эмпирическими зависимостями того или иного конкретного вида — корреляционными, причинно-следственными и т. п.);

(2) оценка экстраполируемости построенных интерполяционных зависимостей на вновь анализируемую ситуацию (в том числе, в случае успеха, использование опыта ранее принятых в аналогичных ситуациях успешных решений и в текущей анализируемой ситуации).

Критически значимой особенностью использования интерполяционно-экстраполяционных методов в задачах обсуждаемого типа оказывается необходимость оперировать (причем взаимно согласованными средствами) разнородными и разнотипными данными (учитывать эффект мультимодальности данных). Здесь сегодня широко распространен подход, который средствами технологий тех или иных искусственных нейронных сетей реализует перевод анализируемых данных из исходного представления в числовые векторы (так называемая векторизация). К сожалению, он имеет принципиальный недостаток: в процессе векторизации может быть утрачена возможность неформально интерпретировать (описать в содержательных терминах анализируемой предметной области) и объяснить результаты прямых и обратных векторизационных преобразований (*объект* ⇒ *числовой вектор* и в обратном направлении: *числовой вектор* ⇒ *исходный объект*). Утрата здесь надежной интерпретируемости и объясняемости получаемых заключений может оказаться критичной для ЛПР (как лица, принимающего на себя ответственность за соответствующее решение). Одним из перспективных направлений, позволяющих найти пути обхода такого барьера, оказалось использование проблемно-ориентированных ИИ-агентов в анализе каждого конкретного вида обрабатываемых данных (см., например, [32]).

Наконец, критичной точкой все еще остается интеграция результатов обработки каждого характеризующего анализируемую ситуацию типа данных в единый сводный результат (так называемая проблема data fusion). Представляется очевидным, что каждый из задействованных в описании текущей ситуации типов данных — одна из ее значимых характеристик; следовательно, сведение этих отдельных характеристик в единое общее заключение — естественный итог многоаспектного анализа особенностей именно этой ситуации. Хорошо известно, что математическая техника обработки данных одного конкретного типа, как правило, не позволяет прямо перенести ее и на обработку данных принципиально иного типа[1]. Таким образом, разработка и развитие «инструментальных» сред,

[1]Например, при работе с кортежами вида ⟨*число*, *изображение*⟩ регрессионные модели интерполяции числовых датасетов не представляется возможным распространить (неоспариваемым образом) и на обработку изображений.

интегрирующих результаты анализа мультимодальных данных, — актуальная сегодня проблематика исследований и разработок.

В конечном итоге суть интеграции — создать надежные возможности для получения вариантов (альтернатив) принятия решения в ограниченное время с учетом имеющихся Big Data и необходимости надежной оценки каждой из формируемых в процессе их анализа альтернатив.

6 Заключение

В статье представлен взгляд авторов на проблематику интеграции методов и решений ИИ в СЦСУ, прежде всего в военной и специальной сфере.

Впечатляющие достижения последних примерно 30 лет в развитии ИТ-инфраструктуры (высокопроизводительные вычисления, распределенные и облачные архитектуры, высокоскоростные системы связи и навигации и др.) стали мощной технологической основой для развития СЦСУ-решения на принципиально новом уровне возможностей в интересах управления войсками, силами и оружием. Использование технологий быстрой обработки огромных массивов постоянно пополняемых оперативных данных позволяет сократить интервалы времени в цикле «обнаружение–реакция–воздействие (поражение)» до минимума[1]. Наряду с этим принципиально новые качества и возможности в развитие СЦСУ-подхода привнесли новые инфраструктурные возможности вместе с применением новейших ИИ-систем и решений — больших языковых моделей, систем генеративного ИИ[2].

В статье показано, что технологии СЦ-управления представляют собой перспективный инструмент повышения эффективности управления на различных стадиях управленческого цикла, прежде всего в военной сфере, за счет развития и комплексного применения методов и технологий ИИ.

В части компонентов собственно анализа данных и генерации альтернатив для принятия решений в СЦСУ актуальным вызовом времени стала необходимость разработки адекватных математических моделей, методов и технологий ИИ, позволяющих:

- оперировать малыми по числу элементов коллекциями ситуаций-прецедентов, каждая из которых характеризуется большим набором разнородных и разнотипных (мультимодальных) параметров;
- интегрировать частные заключения по всем таким мультимодальным параметрам в сводную оценку[3] соответствующей ситуации-прецедента;

[1] По сравнению с реалиями операций армии США в Ираке в начале 2000-х гг. эти интервалы времени сократились на порядок, при этом — в отличие от той военной компании — появилась возможность исчерпывающего анализа всех доступных ЛПР данных в процессе подготовки соответствующих решений (анализа данных, формирования системы целеуказаний, выбора предпочтительных средств поражения для конкретных целей и т. п.).

[2] В том числе проблемно-ориентированных библиотек ИИ-агентов, а также так называемых foundation models (базовых генеративных моделей для определенных предметных областей).

[3] В таких случаях часто говорят о проблеме data fusion (интеграции / слияния данных).

– обрабатывать при сравнении прецедентов-ситуаций средствами интерполяционно-экстраполяционного подхода и поиске соответствующих локальных закономерностей (эмпирических зависимостей, характеризующих именно эти анализируемые ситуации-прецеденты) мультимодальные данные взаимно согласованными «однородными» инструментальными средствами (математическими методами и алгоритмами).

Очевидно, что успешное применение СЦ-управления требует целенаправленной подготовки высококвалифицированных кадров, причем не только специалистов-исполнителей, но и прежде всего руководителей всех уровней.

Предлагаемые в статье подходы создают условия для решения сложных задач, ускорения инноваций, направлены на формирование ключевых факторов обеспечения конкурентоспособности России в военной и специальной сфере и в конечном счете способствуют обеспечению ее технологического лидерства.

Литература

1. *Лата В. Ф., Молоканов Г. Г., Глущенко А. И.* Перспективы применения ситуационного анализа в интеллектуальных автоматизированных системах военного назначения // Военная мысль, 2025. № 11. С. 81–87. EDN: SLNLZU.
2. *Макарчук И. Л., Троценко К. А.* Характер операций современных армий. Мультиразумные сетевые военные системы и тактика их действий // Военная мысль, 2022. № 11. С. 13–31. EDN: IYRMEF.
3. *Тонкошкуров В. П.* Новые тенденции «новых» войн и их влияние на программы вооружений технологически развитых государств мира // Проблемы военной безопасности России: взгляд в будущее: Мат-лы 11-й Междунар. межведомственной научно-практич. конф. РАРАН. — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2026. Т. 1. С. 59–78.
4. *Cebrowski A. K., Garstka J. H.* Network-centric warfare: Its origin and future // U.S. Naval Institute Proceedings, 1998. Vol. 124. Iss. 1. P. 28–35.
5. *Халин В. Г., Зацаринный А. А., Геков В. В. и др.* Об опыте создания и развития АСУ ВС СССР и РФ / Под ред. В. Г. Халина. — М.: АдамантЪ, 2019–2020. Т. 1. 647 с.
6. *Рощепий И.* Сетецентрическая война: чему научил советский маршал Огарков армию США // Русская семерка, 04.01.2025. https://russian7.ru/post/setecentricheskaya-voyna-chemu-nauchil-s/.
7. Сетецентрическая война: как советский маршал «помог» США захватить Ирак // Русская семерка, 06.07.2022. https://russian7.ru/post/ setecentricheskaya-voyna-kak-sovets/.
8. *Птичкин С.* Космическая «Ракушка»: систему управления войсками «Кассиопея-Д» отправили на испытания // Российская газета, 03.08.2023. https://rg.ru/2023/08/03/kosmicheskaia-rakushka-sistemu-upravleniia-vojskami-kassiopeia-d-otpravili-na-ispytaniia.html?utm_referrer=https%3A%2F%2Fwww.google.com%2F.
9. *Попов И.* Война будущего: взгляд из-за океана. Военные теории и концепции современных США. — М.: АСТ-Астрель, 2004. 444 с.

10. *Цыганок А. Д.* Заскорузлые концепции обрекают на поражение // Независимое военное обозрение, 04.06.2006. https://nvo.ng.ru/forces/2006-04-07/1_conception.html.
11. *Зацаринный А. А., Ионенков Ю. С.* Тенденции развития современных инфокоммуникационных технологий с учетом концепции сете-центрических войн // Системы и средства информатики, 2006. Т. 16. № 1. С. 46–64. EDN: JXFTZF.
12. *Щербаков В.* Черные дыры «сетецентрической войны» // Независимое военное обозрение, 06.08.2010. https://nvo.ng.ru/history/2010-08-06/14_iraq.html.
13. *Грушо А. А., Забежайло М. И., Зацаринный А. А.* О некоторых особенностях задач формирования ситуационной осведомленности в системах поддержки управленческих решений на основе технологий искусственного интеллекта // Искусственный интеллект и принятие решений, 2026. № 1. С. 3–14. doi: 10.14357/20718594260101. EDN: SQNERM.
14. *Зацаринный А. А.* Научно-практические аспекты внедрения технологий искусственного интеллекта в сфере безопасности // Информационные технологии, управление, безопасность в сложных системах, 2026. № 2. С. 39–48. EDN: HGIJBR.
15. Palantir: что делает компания и почему вокруг нее столько скандалов // SecurityLab.ru, 12.05.2026. Ст. 8602. https://www.securitylab.ru/blog/personal/Bitshield/360727.php.
16. Palantir Technologies. https://palantir.com.
17. Chat GPT. chatgpt.com, openai.com.
18. Anthropic Claude. https://www.anthropic.com/news.
19. Искусственный интеллект в армии США. https://clck.ru/3VAgJK.
20. *Лиханова Е.* Anduril industries: история компании. «Пламя Запада» на службе Пентагона // Russian Business, 10.06.2024. https://rb.ru/stories/anduril-industries/?ysclid=mr2d3gvdq5105735736.
21. Maven Smart System — военный ИИ для анализа данных и разведки // SecurityLab.ru, 08.02.2025. Ст. 6473. https://www.securitylab.ru/blog/personal/SimlpeHacker/354919.php.
22. *Поспелов Д. А.* Большие системы. Ситуационное управление. — М.: Знание, 1975. 64 с.
23. *Поспелов Д. А.* Логико-лингвистические модели в системах управления. — М.: Энергоиздат, 1981. 232 с.
24. *Поспелов Д. А.* Ситуационное управление: теория и практика. — М.: Наука, 1986. 288 с.
25. Architectures for semiotic modeling and situation analysis in large complex systems / Eds. J. Albus, A. Meystel, D. Pospelov, T. Reader. — Bana Cynwyd, PA, USA: AdRem, Inc., 1995. 441 p.
26. *Pospelov D. A.* Semiotic models in control systems // Architectures for semiotic modeling and situation analysis in large complex systems / Eds. J. Albus, A. Meystel, D. Pospelov, T. Reader. — Bana Cynwyd, PA, USA: AdRem, Inc., 1995. P. 6–12.
27. *Pospelov D. A., Ehrlich A. I., Osipov G. S.* Semiotic modeling and situation control // Architectures for semiotic modeling and situation analysis in large complex systems / Eds. J. Albus, A. Meystel, D. Pospelov, T. Reader. — Bana Cynwyd, PA, USA: AdRem, Inc., 1995. P. 127–129.

28. *Pospelov D. A.* Large semiotic models in control systems // Workshop (International) on Control Mechanisms for Complex Systems Proceedings / Eds. M. Coombs, M. Sulcoski. — Las Cruces, NM, USA, 1996. P. 287–292.
29. *Meystel A.* Intelligent control // Encyclopedia of physical science and technology / Ed. R. A. Meyers. — 3rd ed. — San Diego, CA, USA: Academic Press, 2001. Vol. 4. P. 1–24.
30. *Meystel A. M., Albus J. S.* Intelligent systems: Architecture, design, and control. — Wiley series on intelligent systems. — 1st ed. — New York, NY, USA: J. Wiley and Sons, 2001. 716 p.
31. *Грушо А. А., Грушо Н. А., Забежайло М. И., Зацаринный А. А., Писковский В. О.* Поиск аномалий в сетецентрических системах управления // Информатика и её применения, 2026. Т. 20. Вып. 2. С. 82–88. doi: 10.14357/19922264260207. EDN: PPXIOI.
32. *Достовалова А. М., Горшенин А. К.* Нейросетевые классификаторы изображений, информированные факторными анализаторами // Докл. Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, 2024. Т. 520. № 2. С. 41–48.

Поступила в редакцию 14.06.2026
Принята к публикации 15.09.2026

INTEGRATION OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE METHODS AND SOLUTIONS IN NETWORK-CENTRIC CONTROL SYSTEMS

A. A. Grusho, N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, A. A. Zatsarinny, and V. O. Piskovski

Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The article discusses historical aspects as well as current capabilities of using network-centric technologies in management and control systems and decision support. Special attention is paid to the problem of integrating artificial intelligence methods and solutions into network-centric control systems (NCCS). The authors formulate a number of current issues related to the application of situational control methods and technologies in modern NCCS to support decision-making in a dynamically changing environment. Furthermore, the paper outlines specific features of the contemporary approach to creating network-centric military management and control systems. Taking into account recent advancements in information technology infrastructure development and the widespread use of new promising solutions in the field of artificial intelligence, the possibilities of using the NCCS as a platform for integrating various methods and means of data representation and intelligent analysis, particularly to maintain the situational awareness of decision makers, are discussed.

Keywords: network-centric control systems; artificial intelligence; data analysis and decision making; situational awareness; methods and means integration

DOI: 10.14357/08696527260309 **EDN:** WWTWAA

References

1. Lata, V. F., G. G. Molokanov, and A. I. Glushchenko. 2025. Perspektivy primeneniya situatsionnogo analiza v intellektual'nykh avtomatizirovannykh sistemakh voyennogo naznacheniya [Prospects for the application of situational analysis in intelligent automated military systems]. *Voyennaya mysl'* [Military Thought] 11:81–87. EDN: SLNLZU.
2. Makarchuk, I. L., and K. A. Trotsenko. 2022. Kharakter operatsiy sovremennykh armiy. Mul'tirazumnye setevye voyennye sistemy i taktika ikh deystviy [The nature of operations by modern armies. Multi-intelligent network military systems and their action tactics]. *Voyennaya mysl'* [Military Thought] 11:13–31. EDN: IYRMEF.
3. Tonkoshkurov, V. P. 2026. Novyye tendentsii «novykh» voyn i ikh vliyaniye na programmy vooruzheniy tekhnologicheski razvitykh gosudarstv mira [New trends in "new" wars and their impact on the arms programs of technologically advanced countries]. *Problemy voyennoy bezopasnosti Rossii: vzglyad v budushcheye: Mat-ly 11-y Mezhdunarodnoy mezhvedomstvennoy nauchno-praktich. konf. RARAN* [Russia's military security issues: A look into the future. 11th Interdepartmental Scientific and Practical Conference (International) of the Russian Academy of Sciences Proceedings]. Moscow: MGTU im. N. E. Baumana. 1:59–78.
4. Cebrowski, A. K., and J. H. Garstka. 1998. Network-centric warfare: Its origin and future. *U.S. Naval Institute Proceedings* 124(1):28–35.
5. Khalin, V. G., A. A. Zatsarinny, V. V. Gekov, *et al.* 2019–2020. *Ob opyte sozdaniya i razvitiya ASU VS SSSR i RF* [On the experience of creating and developing automated control systems for the Armed Forces of the USSR and the Russian Federation]. Ed. V. G. Khalin. Moscow: Adamant. Vol. 1. 647 p.
6. Roshchepiy, I. 04.01.2025. Setetsentricheskaya voyna: chemu nauchil sovetskiy marshal Ogarkov armiyu SShA [Network-centric warfare: What Marshal of the Soviet Union Ogarkov taught the U.S. Army]. *Russkaya semerka* [Russian Seven]. Available at: https://russian7.ru/post/setecentricheskaya-voyna-chemu-nauchil-s/ (accessed September 17, 2026).
7. Setetsentricheskaya voyna: kak sovetskiy marshal "pomog" SShA zakhvatit' Irak [Network-centric warfare: How a Soviet marshal "helped" the US capture Iraq]. 06.07.2022. *Russkaya semerka* [Russian Seven]. Available at: https://russian7.ru/post/setecentricheskaya-voyna-kak-sovets/ (accessed September 17, 2026).
8. Ptichkin, S. 03.08.2023. Kosmicheskaya "Rakushka:" sistemu upravleniya voyskami "Kassiopeya-D" otpravili na ispytaniya [Space "Shell:" The "Cassiopea-D" troop command and control system has been sent for testing]. *Rossiyskaya gazeta* [Russian Gazette]. Available at: https://rg.ru/2023/08/03/kosmicheskaia-rakushka-sistemu-upravleniia-vojskami-kassiopeia-d-otpravili-na-ispytaniia.html?utm_referrer=https%3A%2F%2Fwww.google.com%2F (accessed September 17, 2026).
9. Popov, I. 2004. *Voyna budushchego: vzglyad iz-za okeana. Voennye teorii i kontseptsii sovremennykh SShA* [War of the future: A view from across the ocean. Military theories and concepts of the modern USA]. Moscow: AST-Astrel. 444 p.
10. Tsyganok, A. D. 04.06.2006. Zaskoruzlye kontseptsii obrekayut na porazhenie [Outdated concepts doom one to defeat]. *Nezavisimoe voennoe obozrenie* [Independent Military

Review]. Available at: https://nvo.ng.ru/forces/2006-04-07/1_conception.html (accessed September 17, 2026).

11. Zatsarinny, A. A., and Yu. S. Ionenkov. 2006. Tendentsii razvitiya sovremennykh infokommunikatsionnykh tekhnologiy s uchetom kontseptsii sete-tsentricheskikh voyn [Tendencies of modern infocommunication technologies development with a focus on network-centric warfare conception]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 16(1):46–64. EDN: JXFTZF.
12. Shcherbakov, V. 06.08.2010. Chernye dyry "setetsentricheskoy voyny" [Blind spots of network-centric warfare]. *Nezavisimoe voennoe obozrenie* [Independent Military Review]. Available at: https://nvo.ng.ru/history/2010-08-06/14_iraq.html (accessed September 17, 2026).
13. Grusho, A. A., M. I. Zabezhailo, and A. A. Zatsarinny. 2026. O nekotorykh osobennostyakh zadach formirovaniya situatsionnoy osvedomlennosti v sistemakh podderzhki upravlencheskikh resheniy na osnove tekhnologiy iskusstvennogo intellekta [Maintaining situational awareness in management decision support systems based on artificial intelligence technologies]. *Iskusstvennyy intellekt i prinyatie resheniy* [Artificial Intelligence and Decision Making] 1:3–14. doi: 10.14357/20718594260101. EDN: SQNERM.
14. Zatsarinny, A. A. 2026. Nauchno-prakticheskie aspekty vnedreniya tekhnologiy iskusstvennogo intellekta v sfere bezopasnosti [Scientific and practical aspects of artificial intelligence technology implementation in the field of security]. *Informatsionnye tekhnologii, upravlenie, bezopasnost' v slozhnykh sistemakh* [Information Technology, Management, Security in Complex Systems] 2:39–48. EDN: HGIJBR.
15. Palantir: chto delaet kompaniya i pochemu vokrug nee stol'ko skandalov [Palantir: What the company does and why is there so much controversy surrounding it?]. SecurityLab.ru. 12.05.2026. 8602. Available at: https://www.securitylab.ru/blog/personal/Bitshield/360727.php (accessed September 17, 2026).
16. Palantir Technologies. Available at: https://palantir.com (accessed September 17, 2026).
17. Chat GPT. Available at: chatgpt.com, openai.com (accessed September 17, 2026).
18. Anthropic Claude. Available at: https://www.anthropic.com/news (accessed September 17, 2026).
19. Iskusstvennyy intellekt v armii SShA [AI in U.S. Army]. Available at: https://clck.ru/3VAgJK (accessed September 17, 2026).
20. Likhanova, E. 10.06.2024. Anduril industries: istoriya kompanii. "Plamya Zapada" na sluzhbe Pentagona [Anduril industries: Company history. "Flame of the West" in the service of the Pentagon]. *Russian Business*. Available at: https://rb.ru/stories/anduril-industries/?ysclid=mr2d3gvdq5105735736 (accessed September 17, 2026).
21. Maven Smart System — voennyy II dlya analiza dannykh i razvedki [Maven Smart System — military AI for data analysis and intelligence]. 08.02.2025. SecurityLab.ru. Available at: https://www.securitylab.ru/blog/personal/SimlpeHacker/354919.php (accessed September 28, 2026).
22. Pospelov, D. A. 1975. *Bol'shie sistemy. Situatsionnoe upravlenie* [Large systems. Situational management and control]. Moscow: Znanie. 64 p.

23. Pospelov, D. A. 1981. *Logiko-lingvisticheskie modeli v sistemakh upravleniya* [Logical-linguistic models in control systems]. Moscow: Energoizdat. 232 p.
24. Pospelov, D. A. 1986. *Situatsionnoe upravlenie: teoriya i praktika* [Situational management and control: Theory and practice]. Moscow: Nauka. 288 p.
25. Albus, J., A. Meystel, D. Pospelov, and T. Reader, eds. 1995. *Architectures for semiotic modeling and situation analysis in large complex systems*. Bana Cynwyd, PA: AdRem, Inc. 441 p.
26. Pospelov, D. A. 1995. Semiotic models in control systems. *Architectures for semiotic modeling and situation analysis in large complex systems*. Eds. J. Albus, A. Meystel, D. Pospelov, and T. Reader. Bana Cynwyd, PA: AdRem, Inc. 6–12.
27. Pospelov, D. A., A. I. Ehrlich, and G. S. Osipov. 1995. Semiotic modeling and situation control. *Architectures for semiotic modeling and situation analysis in large complex systems*. Eds. J. Albus, A. Meystel, D. Pospelov, and T. Reader. Bana Cynwyd, PA: AdRem, Inc. 127–129.
28. Pospelov, D. A. 1996. Large semiotic models in control systems. *Workshop (International) on Control Mechanisms for Complex Systems Proceedings*. Eds. M. Coombs and M. Sulcoski. Las Cruces, NM. 287–292.
29. Meystel, A. 2001. Intelligent control. *Encyclopedia of physical science and technology.* Ed. R. A. Meyers. 3rd ed. San Diego, CA: Academic Press. 4:1–24.
30. Meystel, A. M., and J. S. Albus. 2001. Intelligent systems: Architecture, design, and control. Wiley series on intelligent systems. 1st ed. New York, NY: J. Wiley and Sons. 716 p.
31. Grusho, A. A., N. A. Grusho, M. I. Zabezhailo, A. A. Zatsarinny, and V. O. Piskovskii. 2026. Poisk anomaliy v setetsentricheskikh sistemakh upravleniya [Search for anomalies in network-centric control systems]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 20(2):82–88. doi: 10.14357/19922264260207. EDN: PPXIOI.
32. Dostovalova, A. M., and A. K. Gorshenin. 2024. Neural network image classifiers informed by factor analyzers. *Dokl. Math.* 110(S1):S35–S41. doi: 10.1134/S106456242460204X. EDN: LEFRBI.

Received June 14, 2026
Accepted September 15, 2026

Contributors

Grusho Alexander A. (b. 1946) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, principal scientist, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; grusho@yandex.ru

Grusho Nikolai A. (b. 1982) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior scientist, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; info@itake.ru

Zabezhailo Michael I. (b. 1956) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, principal scientist, Federal Research Center "Computer Science and

Control" of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; m.zabezhailo@yandex.ru

Zatsarinny Alexander A. (b. 1951) — Doctor of Science in technology, professor, principal scientist, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences; 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; AZatsarinny@frccsc.ru

Piskovski Viktor O. (b. 1963) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, senior scientist, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences; 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; vpvp80@yandex.ru

ИСТОРИЯ. ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ. СОБЫТИЯ

ПРЕДАННОСТЬ ЖИЗНИ, НАУКЕ И ДЕЛУ
(к 70-летию со дня рождения Ю. С. Ионенкова)



Юрий Сергеевич Ионенков (1956–2023) — старший научный сотрудник отдела «Информационные, управляющие и телекоммуникационные системы», кандидат технических наук, полковник. Родился 27 августа 1956 г. в глубинке Тверской области (в деревне Ивановское Западнодвинского района) в простой русской семье. С ранних лет он проявил тягу к знаниям и стремление многое делать своими руками (например, в 20-летнем возрасте он самостоятельно поставил деревенскую баню, срубив ее только одним топором). Прошел традиционный для советского человека путь: школа, институт (Ленинградский электротехнический институт связи имени проф. М. А. Бонч-Бруевича). Затем — военная служба в течение 12 лет: в 6-й отдельной армии ПВО (в Ленинградском военном округе) на должностях от инженера отделения узла связи зенитно-ракетной бригады до начальника связи зенитно-ракетного полка и на 10-м Государственном научно-исследовательском испытательном полигоне ПВО (Казахстан) в должности начальника связи испытательного центра.

В 1990 г. поступил в Военную академию связи им. С. М. Буденного, после окончания которой в 1993 г. (диплом с отличием) прошел сложный путь от младшего научного сотрудника до начальника системного отдела по тематике систем обмена данными АСУ ВС РФ в 16-м ЦНИИИ Минобороны России. По завершении военной службы Юрий Сергеевич пришел работать в ИПИ РАН и в 2006 г. стал первым сотрудником созданного 33-го отдела.

Большой опыт научно-исследовательской работы, полученный им в ведущем военном НИИ, ясное понимание потребностей заказчика, высокая компетентность в области информационных систем и технологий оказались весьма ценными при обосновании требований и разработке проектов тактико-технических заданий на ОКР по созданию крупномасштабной многоуровневой, территориально распределенной ведомственной системы ситуационных центров в защищенном исполнении. Ю. С. Ионенков внес значительный вклад в разработку системотехнических решений, создание рабочей и конструкторской документации, комплектов организационно-технических документов для проведения различных видов испытаний, а также принял в них активное участие на объектах заказчика в Москве, Краснодаре, Новороссийске, Сочи, Челябинске, Санкт-Петербурге, Владивостоке и Мурманске. В последующем он активно участвовал в работах по научно-техническому сопровождению функционирования ситуационных центров в части комплексной оценки эффективности их применения и эксплуатации.

Глубокие энциклопедические знания, постоянно обновляемые на основе анализа широкого перечня научно-технической литературы, профессиональный кругозор и глубокое понимание организационно-методической основы системного подхода к выполнению НИР и ОКР по созданию и развитию крупномасштабных информационных систем позволили ему стать одним из ведущих исполнителей комплекса работ по исследованию и разработке современных информационных систем в интересах различных заказчиков, в том числе органов государственного и военного управления.

Руководствуясь системным подходом к решению сложных научно-практических задач, Юрий Сергеевич умело выделял приоритеты в работе, своевременно и с высоким качеством представлял отчетные материалы. Он активно публиковал результаты своих научных исследований: его монографии и десятки научных статей посвящены актуальным вопросам создания информационно-телекоммуникационных систем на основе современных информационных технологий.

В 2019 г. успешно защитил кандидатскую диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.13.01 («Системный анализ, управление и обработка информации»), в которой представил методы и методики комплексной оценки системотехнических решений на всех стадиях жизненного цикла информационно-телекоммуникационных систем.

Он всегда (начиная с безукоризненного внешнего вида) служил образцовым примером ответственного, аккуратного и скрупулезного, вплоть до учета весьма

важных мелочей, отношения к работе. Во всем любил поддерживать порядок: от упорядоченной и систематизированной раскладки многочисленной научной литературы на рабочем месте, стройной классификации папок и файлов на его флешках до структурированного, четко выстроенного мышления и обоснованных корректных действий в работе.

Таким мы помним Юрия Сергеевича.

7 декабря 2023 г. он скоропостижно ушел из жизни в полном расцвете творческих сил. Для нашего коллектива это стало тяжелой и невосполнимой утратой. Мы часто вспоминаем его при выполнении текущих задач. . .

Эта статья — память и дань глубокого уважения сотруднику, который трудился в коллективе ИПИ РАН (с 2015 г. — ФИЦ ИУ РАН) около 18 лет, и человеку, которого отличали беззаветная преданность жизни, науке и делу. Будем хранить светлую память о нем.

А. А. Зацаринный, С. В. Козлов

ОБ АВТОРАХ

Акчупанов Константин Васильевич (р. 2002) — инженер Института «Авиационная техника» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Волканов Дмитрий Юрьевич (р. 1979) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры автоматизации систем вычислительных комплексов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Герасин Тимофей Дмитриевич (р. 2000) — аспирант кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Го Фэнжуй (р. 1996) — аспирант факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Грушо Александр Александрович (р. 1946) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Грушо Николай Александрович (р. 1982) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Забежайло Михаил Иванович (р. 1956) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Зацаринный Александр Алексеевич (р. 1951) — доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Ибришев Кирилл Константинович (р. 2000) — инженер Института «Авиационная техника» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Казанцев Сергей Юрьевич (р. 1971) — доктор физико-математических наук, профессор Московского технического университета связи и информатики

Конашенкова Татьяна Дмитриевна (р. 1964) — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Корепанов Эдуард Рудольфович (р. 1966) — кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Королев Виктор Юрьевич (р. 1954) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Кудрявцев Алексей Андреевич (р. 1978) — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; старший научный сотрудник Московского центра фундаментальной и прикладной математики

Матюнин Александр Евгеньевич (р. 1991) — аспирант Московского технического университета связи и информатики

Миронов Юрий Борисович (р. 1985) — кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»

Морозов Евсей Викторович (р. 1947) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории стохастического моделирования информационно-вычислительных и коммуникационных систем Института прикладных математических исследований — обособленного подразделения ФГБУН ФИЦ «Карельский научный центр Российской академии наук»; профессор кафедры ПМиК Петрозаводского государственного университета

Пантелеев Андрей Владимирович (р. 1955) — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Образовательного центра Института «Компьютерные науки» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Писковский Виктор Олегович (р. 1963) — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Поздышев Валерий Юрьевич (р. 1960) — доктор технических наук, старший преподаватель, научный руководитель Автономной некоммерческой организации дополнительного профессионального образования «Научно-образовательный центр ВКО «Алмаз–Антей» им. академика В. П. Ефремова»

Сапожников Максим Вячеславович (р. 1998) — кандидат технических наук, младший научный сотрудник Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»

Сачко Александр Александрович (р. 1998) — аспирант Автономной некоммерческой организации дополнительного профессионального образования «Научно-образовательный центр ВКО «Алмаз–Антей» им. академика В. П. Ефремова»

Сачко Анастасия Мартиновна (р. 1999) — соискатель ученой степени Автономной некоммерческой организации дополнительного профессионального образования «Научно-образовательный центр ВКО «Алмаз–Антей» им. академика В. П. Ефремова»

Синицын Владимир Игоревич (р. 1968) — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; профессор образовательного центра института «Компьютерные науки» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Синицын Игорь Николаевич (р. 1940) — доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Смелянский Руслан Леонидович (р. 1950) — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой автоматизации систем вычислительных комплексов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Талья Роман Львович (р. 2003) — инженер Образовательного центра Института «Компьютерные науки» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Турбин Николай Васильевич (р. 1989) — ведущий инженер Института «Передовая инженерная школа» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Тучков Николай Александрович (р. 2002) — ассистент Образовательного центра Института «Компьютерные науки» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Шабанов Борис Михайлович (р. 1954) — доктор технических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»

Шестаков Олег Владимирович (р. 1976) — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; ведущий научный сотрудник Московского центра фундаментальной и прикладной математики

Правила подготовки рукописей статей для публикации в журнале «Системы и средства информатики»

Журнал «Системы и средства информатики» публикует теоретические, обзорные и дискуссионные статьи, посвященные научным исследованиям и разработкам в области информационных технологий.

Журнал издается на русском языке. По специальному решению редколлегии отдельные статьи могут печататься на английском языке.

Тематика журнала охватывает следующие направления:

- информационно-телекоммуникационные системы и средства их построения;
- архитектура и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и сетей;
- методы и средства защиты информации.

1. В журнале печатаются статьи, содержащие результаты, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях.

   Публикация предоставленной автором(ами) рукописи не должна нарушать положений глав 69, 70 раздела VII части IV Гражданского кодекса, которые определяют права на результаты интеллектуальной деятельности и средства индивидуализации, в том числе авторские права, в РФ.

   Ответственность за нарушение авторских прав, в случае предъявления претензий к редакции журнала, несут авторы статей.

   Направляя рукопись в редакцию, авторы сохраняют свои права на данную рукопись и при этом передают учредителям и редколлегии журнала неисключительные права на издание статьи на русском языке (или на языке статьи, если он отличен от русского) и на перевод ее на английский язык, а также на ее распространение в России и за рубежом. Каждый автор должен представить в редакцию подписанный с его стороны «Лицензионный договор о передаче неисключительных прав на использование произведения», текст которого размещен по адресу http://www.ipiran.ru/publications/licence.doc. Этот договор может быть представлен в бумажном (в 2-х экз.) или в электронном виде (отсканированная копия заполненного и подписанного документа).

   Если при подготовке статьи авторы использовали инструменты на основе искусственного интеллекта, они обязаны включить эту информацию в текст статьи.

   Редколлегия вправе запросить у авторов экспертное заключение о возможности публикации представленной статьи в открытой печати.

2. К статье прилагаются данные автора (авторов) (см. п. 8). При наличии нескольких авторов указывается фамилия автора, ответственного за переписку с редакцией.

3. Редакция журнала осуществляет экспертизу присланных статей в соответствии с принятой в журнале процедурой рецензирования.

   Возвращение рукописи на доработку не означает ее принятия к печати.

   Доработанный вариант с ответом на замечания рецензента необходимо прислать в редакцию.

4. Решение редколлегии о публикации статьи или ее отклонении сообщается авторам.

   Редколлегия может также направить авторам текст рецензии на их статью. Дискуссия по поводу отклоненных статей не ведется.

5. Редактура статей высылается авторам для просмотра. Замечания к редактуре должны быть присланы авторами в кратчайшие сроки.
6. Рукопись предоставляется в электронном виде в форматах MS WORD (.doc или .docx) или LaTeX (.tex), дополнительно — в формате .pdf, на дискете, лазерном диске или электронной почтой. Предоставление бумажной рукописи необязательно.
7. При подготовке рукописи в MS Word рекомендуется использовать следующие настройки.

   Параметры страницы: формат — A4; ориентация — книжная; поля (см): внутри — 2,5, снаружи — 1,5, сверху и снизу — 2, от края до нижнего колонтитула — 1,3.

   Основной текст: стиль — «Обычный», шрифт — Times New Roman, размер — 14 пунктов, абзацный отступ — 0,5 см, 1,5 интервала, выравнивание — по ширине.

   Рекомендуемый объем рукописи — не свыше 10 страниц указанного формата. При превышении указанного объема редколлегия вправе потребовать от автора сокращения объема рукописи.

   Сокращения слов, помимо стандартных, не допускаются. Допускается минимальное количество аббревиатур.

   Все страницы рукописи нумеруются.

   Шаблоны оформления представлены в интернете:

   http://www.ipiran.ru/journal/template_iiep_ssi_2024.zip
8. Статья должна содержать следующую информацию на ***русском и английском языках***:

   – название статьи;
   – Ф.И.О. авторов, на английском можно только имя и фамилию;
   – место работы, с указанием города и страны и электронного адреса каждого автора;
   – сведения об авторах, в соответствии с форматом, образцы которого представлены на страницах:
     http://www.ipiran.ru/journal/collected/2019_29_03_rus/authors.asp и
     http://www.ipiran.ru/journal/collected/2019_29_03_eng/authors.asp;
   – аннотация (не менее 100 слов на каждом из языков). Аннотация — это краткое резюме работы, которое может публиковаться отдельно. Она является основным источником информации в информационных системах и базах данных. Английская аннотация должна быть оригинальной, может не быть дословным переводом русского текста и должна быть написана хорошим английским языком. В аннотации не должно быть ссылок на литературу и, по возможности, формул;
   – ключевые слова — желательно из принятых в мировой научно-технической литературе тематических тезаурусов. Предложения не могут быть ключевыми словами.
   – источники финансирования работы (ссылкм на гранты, проекты, поддерживающие организации и т. п.

9. Требования к спискам литературы.
   Ссылки на литературу в тексте статьи нумеруются (в квадратных скобках) и располагаются в каждом из списков литературы в порядке первых упоминаний.

Списки литературы представляются в двух вариантах:

(1) **Список литературы к русскоязычной части**. Русские и английские работы — на языке и в алфавите оригинала.

(2) **References**. Русские работы и работы на других языках — в латинской транслитерации с переводом на английский язык; английские работы и работы на других языках — на языке оригинала.

Необходимо для составления списка "References" пользоваться размещенной на сайте http://www.translit.net/ru/bgn/ бесплатной программой транслитерации русского текста в латиницу.

Список литературы "References" приводится полностью отдельным блоком, повторяя все позиции из списка литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке литературы к русскоязычной части есть ссылки на иностранные публикации, набранные латиницей, они полностью повторяются в списке "References".

Примеры ссылок на различные виды публикаций в списке "References":

Описание статьи из журнала:

Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.

Описание статьи из электронного журнала:

Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/ (accessed April 28, 2011).

Описание материалов конференций:

Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursosberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi"* [6th Symposium (International) "New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact" Proceedings]. Moscow. 267–272.

Описание книги (монографии, сборники):

Lindorf, L. S., and L. G. Mamikoniants, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publs. 352 p.

Описание переводной книги (в списке литературы к русскоязычной части необходимо указать: / Пер. с англ. — после названия книги, а в конце ссылки указать оригинал книги в круглых скобках):

1. В русскоязычной части:
   Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1985. 472 с. (*Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver W.* Vibration problems in engineering. — 4th ed. — New York, NY, USA: Wiley, 1974. 521 p.)

2. В англоязычной части:
   Timoshenko, S. P., D. H. Young, and W. Weaver. 1974. *Vibration problems in engineering*. 4th ed. New York, NY: Wiley. 521 p.

Описание неопубликованного документа:

Latypov, A. R., M. M. Khasanov, and V. A. Baikov. 2004. Geology and production (NGT GiD). Certificate on official registration of the computer program No. 2004611198. (In Russian, unpubl.)

Описание интернет-ресурса:

Pravila tsitirovaniya istochnikov [Rules for the citing of sources]. Available at: http://www.scribd.com/doc/1034528/ (accessed February 7, 2011).

Описание диссертации или автореферата диссертации:

Semenov, V. I. 2003. Matematicheskoe modelirovanie plazmy v sisteme kompaktnyy tor [Mathematical modeling of the plasma in the compact torus]. Moscow. D.Sc. Diss. 272 p.

Kozhunova, O. S. 2009. Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovarya informatsionnogo monitoringa [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. PhD Thesis. Moscow: IPI RAN. 23 p.

Описание ГОСТа:

GOST 8.586.5-2005. 2007. Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. Moscow: Standardinform Publs. 10 p.

Описание патента:

Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.

10. Присланные в редакцию материалы авторам не возвращаются.
11. При отправке файлов по электронной почте просим придерживаться следующих правил:
    - указывать в поле subject (тема) название журнала и фамилию автора;
    - указывать в тексте письма название статьи, авторов и журнал, в который направляется статья;
    - использовать attach (присоединение);
    - в состав электронной версии статьи должны входить: файл, содержащий текст статьи, и файл(ы), содержащий(е) иллюстрации.
12. Журнал «Системы и средства информатики» является некоммерческим изданием. Плата за публикацию не взимается, гонорар авторам не выплачивается.

Адрес редакции журнала «Системы и средства информатики»:

Москва 119333, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН
Тел.: +7 (499)135-86-92 Факс: +7 (495)930-45-05
e-mail: ssi@frccsc.ru (Стригина Светлана Николаевна)
http://www.ipiran.ru/journal/collected

Requirements for manuscripts submitted to Journal "Systems and Means of Informatics"

Journal "Systems and Means of Informatics" publishes theoretical, review, and discussion articles on the research and development in the field of information technology.

The journal is published in Russian. By a special decision of the editorial board, some articles can be published in English.

Topics covered include the following areas:

- information and communication systems and tools of their design;
- architecture and software of computational complexes and networks; and
- methods and tools of information protection.

1. The Journal publishes original articles which have not been published before and are not intended for simultaneous publication in other editions. An article submitted to the Journal must not violate the Copyright law. Sending the manuscript to the Editorial Board, the authors retain all rights of the owners of the manuscript and transfer the nonexclusive rights to publish the article in Russian (or the language of the article, if not Russian) and its distribution in Russia and abroad to the Founders and the Editorial Board. Authors should submit a letter to the Editorial Board in the following form:

   Agreement on the transfer of rights to publish:

   "We, the undersigned authors of the manuscript ". . . ," pass to the Founder and the Editorial Board of the Journal "Systems and Means of Informatics" the nonexclusive right to publish the manuscript of the article in Russian (or in English) in both print and electronic versions of the Journal. We affirm that this publication does not violate the Copyright of other persons or organizations.

   Author(s) signature(s): (name(s), address(es), date)."

   This agreement should be submitted in paper form or in the form of a scanned copy (signed by the authors).

   The Editorial Board has the right to request from the authors an official expert conclusion that the submitted article has no classified data prohibited for publication.
   If authors used artificial intelligence (AI)-based tools in preparing their manuscript, they must include this information in the text of the article.
2. A submitted article should be attached with **the data on the author(s)** (see item 8). If there are several authors, the contact person should be indicated who is responsible for correspondence with the Editorial Board and other authors about revisions and final approval of the proofs.
3. The Editorial Board of the Journal examines the article according to the established reviewing procedure. If authors receive their article for correction after reviewing, it does not mean that the article is approved to be published. The corrected article should be sent to the Editorial Board for the subsequent review and approval.
4. The decision on the article publication or its rejection is communicated to the authors. The Editorial Board may also send the reviews on the submitted articles to the authors. Any discussion upon the rejected articles is not possible.
5. The edited articles will be sent to the authors for proofread. The comments of the authors to the edited text of the article should be sent to the Editorial Board as soon as possible.
6. The manuscript of the article should be presented electronically in the MS WORD (.doc or .docx) or LaTeX (.tex) formats, and additionally in the .pdf format. All documents may be sent by e-mail or provided on a CD or diskette. A hard copy submission is not necessary.

7. The recommended typesetting instructions for manuscript.

   Pages parameters: format A4, portrait orientation, document margins (cm): left — 2.5, right — 1.5, above — 2.0, below — 2.0, footer 1.3.

   Text: font —Times New Roman, font size — 14, paragraph indent — 0.5, line spacing — 1.5, justified alignment.

   The recommended manuscript size: not more than 10 pages of the specified format. If the specified size exceeded, the editorial board is entitled to require the author to reduce the manuscript.

   Use only standard abbreviations. Avoid abbreviations in the title and abstract. The full term for which an abbreviation stands should precede its first use in the text unless it is a standard unit of measurement.

   All pages of the manuscript should be numbered.

   The templates for the manuscript typesetting are presented on site:

   http://www.ipiran.ru/journal/template_jiep_ssi_2024.zip

8. Articles should enclose data both in **Russian and English**:
   - title;
   - author's name and surname;
   - affiliation — organization, its address with ZIP code, city, country, and official e-mail address;
   - data on authors according to the format (see site):
     http://www.ipiran.ru/journal/collected/2019_29_03_rus/authors.asp and
     http://www.ipiran.ru/journal/collected/2019_29_03_eng/authors.asp;
   - abstract (not less than 100 words) both in Russian and in English. Abstract is a short summary of the article that can be published separately. The abstract is the main source of information on the article and it could be included in leading information systems and data bases. The abstract in English has to be an original text and should not be an exact translation of the Russian one. Good English is required. In abstracts, avoid references and formulae.
   - Indexing is performed on the basis of keywords. The use of keywords from the internationally accepted thematic Thesauri is recommended.

     Important! Keywords must not be sentences.
   - Acknowledgments.

9. References. Russian references have to be presented both in English translation and in Latin transliteration (refer http://www.translit.net/ru/bgn/).

   Please take into account the following examples of Russian references appearance:

   Article in journal:

   Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.

   Journal article in electronic format:

   Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/ (accessed April 28, 2011).

Conference proceedings:

Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursosberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi"* [6th Symposium (International) "New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact" Proceedings]. Moscow. 267–272.

Books and other monographs:

Lindorf, L. S., and L. G. Mamikoniants, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publs. 352 p.

Dissertation and Thesis:

Kozhunova, O. S. 2009. Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovarya informatsionnogo monitoringa [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.

State standards and patents:

GOST 8.586.5-2005. 2007. Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. M.: Standardinform Publs. 10 p.

Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.

References in Latin transcription are presented in the original language.

References in the text are numbered according to the order of their first appearance; the number is placed in square brackets. All items from the reference list should be cited.

10. Manuscripts and additional materials are not returned to Authors by the Editorial Board.
11. Submissions of files by e-mail must include:
    - the journal title and author's name in the "Subject" field;
    - the article title, authors' names, and the journal title, whereto the paper is being submitted, in the text of the e-mail;
    - an article and additional materials have to be attached using the "attach" function;
    - an electronic version of the article should contain the file with the text and a separate file with figures.
12. "System and Means of Informatics" journal is not a profit publication. There are no charges for the authors as well as there are no royalties.

Editorial Board address:
FRC CSC RAS, 44, block 2, Vavilov Str., Moscow 119333, Russia
Ph.: +7 (499) 135 86 92, Fax: +7 (495) 930 45 05
e-mail: ssi@frccsc.ru (to Svetlana Strigina)
http://www.ipiran.ru/english/journal_systems.asp