

СИСТЕМЫ И СРЕДСТВА ИНФОРМАТИКИ

**Научный журнал Российской академии наук
(издается под руководством Отделения нанотехнологий
и информационных технологий РАН)**

Издается с 1989 года

Журнал выходит ежеквартально

Учредитель:

**Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление» Российской академии наук**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

академик РАН И. А. Соколов — председатель Редакционного совета

академик РАН Г. И. Савин

академик РАН А. Л. Стемпковский

профессор Ш. Долев (S. Dolev, Beer-Sheva, Israel)

профессор Ю. Кабанов (Yu. Kabanov, Besancon, France)

профессор В. Ротарь (V. Rotar, San-Diego, USA)

профессор М. Финкельштейн (M. Finkelstein, Bloemfontein, South Africa)

профессор В. Хофкирхнер (W. Hofkirchner, Wien, Austria)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

академик РАН И. А. Соколов — главный редактор

проф., д.ф.-м.н. С. Я. Шоргин — заместитель главного редактора

д.т.н. В. Н. Захаров

д.ф.-м.н. В. И. Сеницын

проф., д.ф.-м.н. А. И. Зейфман

проф., д.т.н. И. Н. Сеницын

проф., д.т.н. В. Д. Ильин

проф., д.ф.-м.н. В. Г. Ушаков

проф., д.т.н. К. К. Колин

д.ф.-м.н. А. К. Горшенин — отв. секретарь

проф., д.ф.-м.н. В. Ю. Королев

к.ф.-м.н. С. А. Христочевский

д.ф.-м.н. Р. В. Разумчик

Редакция

к.ф.-м.н. Е. Н. Арутюнов

С. Н. Стригина

© Федеральный исследовательский центр «Информатика
и управление» Российской академии наук, 2026

Журнал включен в базу данных Russian Science Citation Index (RSCI),

интегрированную с Web of Science, и в «Белый список» научных журналов

Журнал входит в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)

Журнал включен в базу данных CrossRef (систему DOI — Digital Object Identifier),

в базу данных Ulrich's periodicals directory

и в информационную систему «Общероссийский математический портал Math-Net.Ru»

Журнал реферировается в «Реферативном журнале» ВИНИТИ

и в системе Google Scholar

Журнал включен в сформированный Минобрнауки России Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук

<http://www.ipiran.ru/journal/collected>

СИСТЕМЫ И СРЕДСТВА ИНФОРМАТИКИ

Том 36 № 2 Год 2026

СОДЕРЖАНИЕ

Реализация самосинхронных счетчиков методом шаблонов Ю. А. Степченков, Ю. Г. Дьяченко, Д. В. Хилько, Г. А. Орлов, Г. С. Апполонов, Д. Ю. Дьяченко	3
Вейвлет-нейросетевой синтез оптимальной наблюдаемой линейной стохастической системы Пугачёва с параметрическими шумами по среднеквадратичному критерию И. Н. Сеницын, В. И. Сеницын, Э. Р. Корепанов, Т. Д. Конашенкова	18
Статистический анализ эквивалентности алгоритмов оценивания параметров динамико-стохастических моделей турбулентного теплообмена океана и атмосферы А. А. Осипова	40
Balancing power demand and performance in a delayed deactivation $M/G/1$ -type model A. S. Golovin, E. V. Morozov, and A. S. Romyantsev	62
Многомерные квазистепенные смешанные нормальные распределения М. А. Иванов, В. Ю. Королев	84
Реализация тестов единичного корня для малых выборок М. П. Кривенко	106
Алгоритм генерации синтетических данных для систем технического зрения на основе стекинга генеративно-сопоставительных и диффузионных моделей И. С. Реутов	116
Базовые элементы теории построения единой системы частотно-временного обеспечения национальной информационной инфраструктуры И. А. Саитов, Н. И. Фокин, Ю. Б. Миронов, Б. М. Шабанов	133
Об авторах	150
Правила подготовки рукописей статей	152
Requirements for manuscripts	156

РЕАЛИЗАЦИЯ САМОСИНХРОННЫХ СЧЕТЧИКОВ МЕТОДОМ ШАБЛОНОВ*

*Ю. А. Степченков¹, Ю. Г. Дьяченко², Д. В. Хилько³, Г. А. Орлов⁴,
Г. С. Апполонов⁵, Д. Ю. Дьяченко⁶*

Аннотация: Статья посвящена вопросам автоматизированного проектирования самосинхронных (СС) двоичных счетчиков по исходному Verilog-описанию синхронного прототипа. Счетчики относятся к одним из наиболее популярных цифровых устройств элементной базы робототехнических систем. Типовые синтезаторы синхронных схем строят счетчики с помощью регистра хранения и комбинационного окружения, высчитывающего новое состояние счетчика на основе его текущего состояния и значений сигналов, определяющих свойства счетчика. Однако в большинстве случаев такой подход к реализации СС-счетчиков приводит к чрезмерной аппаратной избыточности и ухудшению быстродействия счетчика. В то же время известны схемотехнические решения для СС-счетчиков последовательного типа, обеспечивающие их минимальные аппаратные затраты и приемлемое быстродействие. Рассмотрены особенности построения СС-счетчиков с различными опциями их асинхронной и самосинхронной установки и разрешения работы. Предложен метод формализованного построения СС-счетчиков, основанный на использовании готовых аппаратных блоков — шаблонов, реализующих особенности их поведения. Verilog-описание СС-счетчика компонуется из аппаратных модулей, соответствующих заданным опциям синтезируемого счетчика. Предлагаемый метод шаблонов позволяет синтезировать двоичные СС-счетчики разного типа (суммирующие, вычитающие и реверсивные), автоматизировать наполнение библиотеки элементов для синтеза СС-схем и гарантирует самосинхронность получаемых аппаратных реализаций счетчиков.

Ключевые слова: самосинхронная схема; счетчик; автоматизированное проектирование; параметризация; шаблон; библиотека элементов

DOI: 10.14357/08696527260201

EDN: GCWIDC

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-29-20207, <https://rscf.ru/en/project/25-29-20207/>.

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, YStepchenkov@frccsc.ru

²Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, YDuachenko@frccsc.ru

³Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, DHilko@frccsc.ru

⁴Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, GOrlov@frccsc.ru

⁵Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, GAppolonov@frccsc.ru

⁶Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, DDyachenko@frccsc.ru

1 Введение

Актуальность применения вычислительной техники во всех областях человеческой деятельности не вызывает сомнений. Она обеспечивает эффективное управление современными производственными линиями, робототехническими комплексами, транспортными средствами, многочисленными системами обеспечения жизнедеятельности человека [1, 2]. Эволюционное развитие вычислительной техники и управляющих систем выдвинуло на первый план синхронную парадигму проектирования цифровых схем [3, 4]. Однако с развитием технологического базиса микроэлектроники и уменьшением технологических норм изготовления микросхем синхронные устройства сталкиваются с проблемами реализации тактового «дерева» и обеспечения строгой одновременности событий в удаленных частях схемы [3]. Методы адаптивной подстройки частоты и целенаправленного построения «дерева» тактового сигнала [5–7] смягчают эти проблемы. Однако они не способны устранить их.

Альтернативой синхронной схемотехнике выступают асинхронные схемы [8]. Их наиболее яркий представитель — СС-схемы [9–12]. Функционирование цифровых СС-схем базируется на двухфазной дисциплине переключения элементов схемы и принципе индикации — контроле успешного завершения перехода схемы в текущую фазу работы [12]. Переключение в следующую фазу работы разрешается строго после подтверждения завершения всех переключений элементов схемы, инициированных значениями входных сигналов. Совокупность данных свойств обеспечивает независимость поведения СС-схем от задержек логических ячеек. Благодаря этому СС-схемы обладают рядом преимуществ перед синхронными аналогами [12], что подтверждено экспериментально [13]. В частности, их устойчивость к логическим сбоям в несколько раз выше устойчивости синхронных аналогов [14]. Поэтому СС-схемы служат перспективным базисом для реализации цифровых устройств повышенной надежности.

Однако реализация индикации требует дополнительных аппаратных затрат и тормозит функционирование СС-схемы [12], поэтому потребительские характеристики синтезируемой СС-схемы во многом определяются оптимальностью используемых схемотехнических решений для реализации ее компонентов. Известны методы разработки асинхронных схем, базирующиеся на конвертации исходного задания алгоритма функционирования ее синхронного прототипа на языке Verilog (см., например, [15, 16]). Синтез комбинационных СС-схем достаточно хорошо изучен и формализован [17, 18]. Реализация же последовательностных СС-устройств, в том числе счетчиков, нуждается в оптимизации.

Наиболее перспективным выглядит подход, использующий шаблоны типовых цифровых СС-устройств [19–21] и типовой логический синтезатор, например Yosys [22]. Данная статья посвящена проблеме разработки и использования параметризованных шаблонов СС-счетчиков, гарантирующих получение действительно СС-реализаций, адекватных заданным свойствам и имеющих близкие к оптимальным характеристики.

2 Структура самосинхронного счетчика

Методология автоматизированного проектирования синхронных схем предусматривает реализацию счетчиков любого типа в виде регистра хранения и комбинационного окружения. Регистр хранит состояние счетчика, а новое состояние формируется комбинационной схемой и записывается в регистр по активному фронту глобального тактового сигнала. Такой подход унифицирует и упрощает создание счетчиков с разными опциями. Его можно использовать и для построения СС-счетчиков. Однако он приводит к чрезмерно избыточным аппаратно и медленным реализациям [23].

В СС-схемотехнике известен последовательный двоичный СС-счетчик, разработанный группой В. И. Варшавского [13]. Его схема показана на рис. 1. Он изменяет свое состояние по высокому уровню счетного входа (Т) и имеет входы сброса (С) и установки (Р), счетный выход (ОТ) и индикаторный выход (Ind). Для успешной установки или сброса счетчика его счетный вход должен иметь активное значение $T = 1$. Входы сброса и установки могут быть индивидуальными для каждого разряда счетчика, обеспечивая запись в него исходного состояния.

Преимущества данного СС-счетчика:

- высокое среднестатистическое быстродействие;
- простота индикаторной подсхемы, обеспечивающая минимальную аппаратную сложность и максимальное быстродействие;
- инвариантность разряда счетчика к направлению счета.

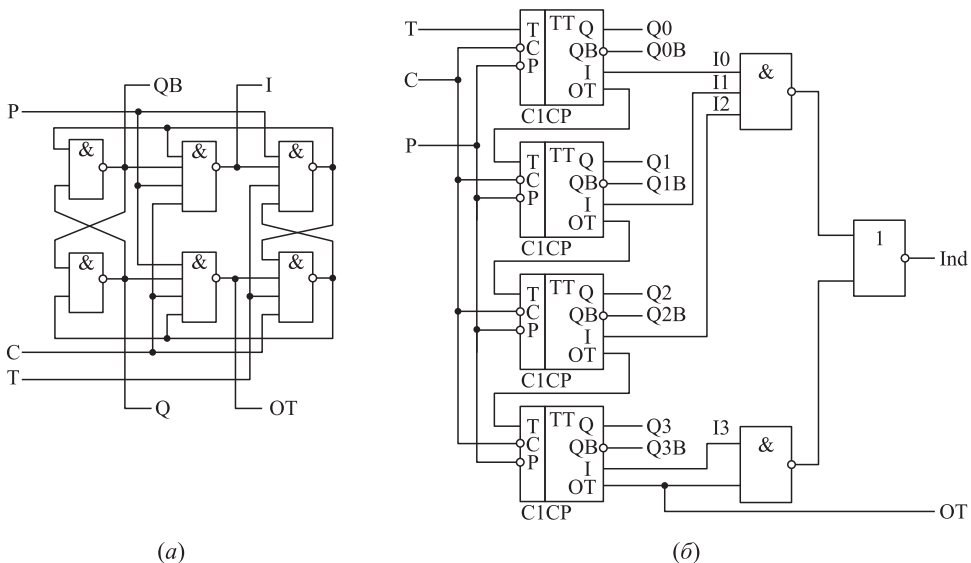


Рис. 1 Самосинхронный счетчик: (а) один разряд С1СР; (б) 4-разрядный суммирующий счетчик

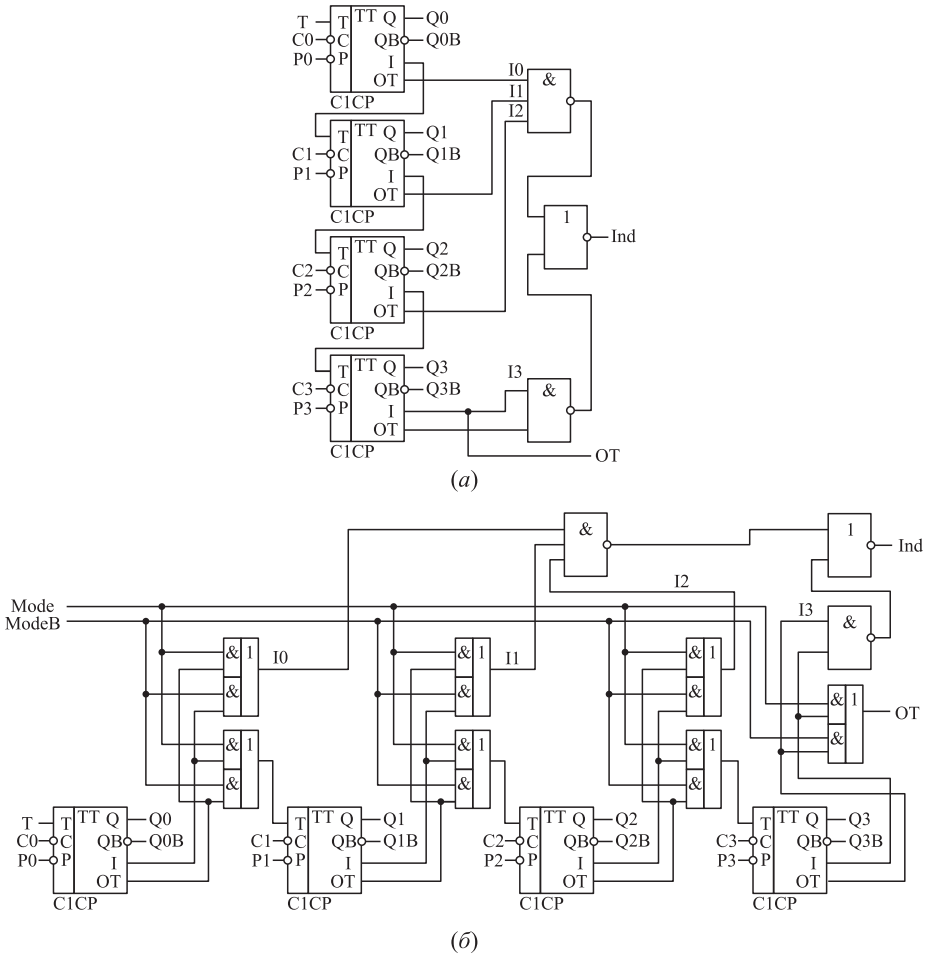


Рис. 2 Варианты СС-счетчика: (а) вычитающий; (б) реверсивный

Вычитающий и реверсивный СС-счетчики также реализуются на основе одноразрядного счетчика С1СР, как показано на рис. 2. Здесь используются поразрядные входы сброса ($C0 \dots C3$) и установки ($P0 \dots P3$). Направлением счета в реверсивном счетчике управляет бифазный сигнал ($Mode, ModeB$), обеспечивающий прямой счет при $Mode = 0, ModeB = 1$ или обратный счет при $Mode = 1, ModeB = 0$.

Отметим, что выход Ind счетчика индицирует его элементы только в счетном режиме работы. Однако сброс, установка и запись состояния могут быть самосинхронными. Для их индикации достаточно в окружении СС-счетчика

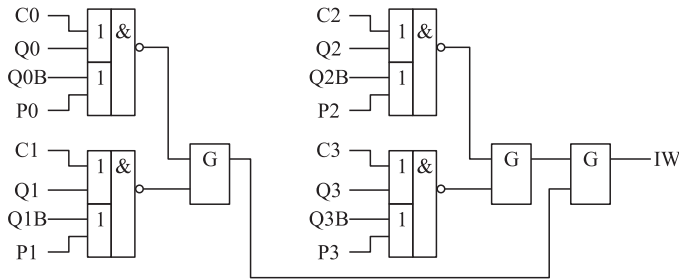


Рис. 3 Индикаторная подсхема режима СС-записи в счетчик

использовать схему, показанную на рис. 3. Ее выход *IW* единичным значением подтверждает успешную запись нового состояния в СС-счетчик.

Таким образом, структурно СС-счетчик состоит из ядра, реализации которого для четырехразрядного счетчика показывают рис. 1, б и 2, и его окружения, как показывает рис. 4. Соответственно, шаблон СС-счетчика на языке Verilog включает ядро счетчика и аппаратное описание схемы его окружения.

Ядро счетчика специфицирует направления счета, реализуя суммирующий, вычитающий или реверсивный счетчик. Окружение ядра счетчика реализует интерфейс СС-счетчика с устройствами общей СС-схемы, формирует входы для ядра счетчика и организует индикацию СС-установки/записи.

Задача разработки СС-счетчика сводится к использованию соответствующего ядра счетчика, реализующего заданное направление счета, и формированию схемы его окружения, управляющей его входами. В качестве ядра счетчика целесообразно использовать один из трех вариантов простейшего последовательного СС-счетчика со сбросом и установкой, показанных на рис. 1, б и 2 для случая четырехразрядного СС-счетчика. Варианты с другой разрядностью синтезируются аналогичным образом. Функция индикатора *Ind* ядра счетчика описывается общей формулой:

$$Ind = I_0 \cdot I_1 \cdot \dots \cdot I_N,$$

где *N* — число, на единицу меньше разрядности счетчика. Функция *Ind* допускает произвольную логическую декомпозицию с целью реализации на элементах заданной библиотеки и минимизации задержки формирования индикаторного выхода.

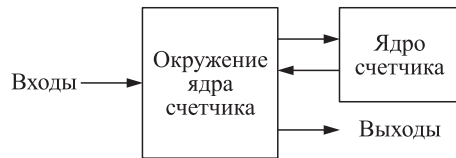


Рис. 4 Структурная схема СС-счетчика

3 Окружение ядра самосинхронного счетчика

Схема окружения ядра СС-счетчика специфицирует свойства счетчика:

- наличие и тип сброса всех разрядов — асинхронный, самосинхронный;
- наличие и тип установки всех разрядов — асинхронная, самосинхронная;
- наличие поразрядной СС-записи состояния счетчика;
- наличие разрешения работы и/или счета;
- направление счета для реверсивного счетчика — прямой, обратный.

Окружение счетчика формирует входы поразрядного сброса и установки ядра счетчика, вход управления направлением счета с учетом наличия и значений сигналов разрешения записи, работы и счета. Кроме того, оно согласовывает активные уровни входных сигналов счетчика и реализует индикаторную подсхему всего счетчика.

Для компоновки схемы окружения используется блочный принцип. Она собирается из отдельных блоков («кирпичиков»), каждый из которых реализует одно из перечисленных выше свойств СС-счетчика, и модуля ядра счетчика. Блоки специфицируют свойства счетчика путем формирования соответствующего входа ядра счетчика или вспомогательных сигналов, а также выходов всего СС-счетчика.

Общая структура шаблона СС-счетчика представлена на рис. 5. В квадратных скобках указаны опциональные блоки, которые могут отсутствовать в конкретном шаблоне.

С целью сокращения вариантов реализации блоков и согласования имен сигналов, служащих входами и выходами блоков, реализующих одно и то же свойство в СС-счетчиках с разным общим составом этих свойств, блоки оформлены в виде Verilog-модулей, входы и выходы которых связаны друг с другом или входами и выходами модуля всего СС-счетчика.

```
module <имя_модуля> (<список_входов_и_выходов>)
  parameter N_Bit = 4; // Разрядность счетчика, 4 бита по умолчанию
  <Декларация_входов_и_выходов>
  [<Блок_реализации_разрешения_работы_и_счета>]
  [<Блок_формирования_признака_направления_счета>]
  [<Блок_формирования_входов_сброса_и_установки_ядра_счетчика>]
  [<Блок_формирования_счетного_входа_ядра_счетчика>]
  [<Блок_индикатора_установки_и_записи>]
  [<Блок_индикатора_разрешения_работы_и_направления_счета>]
  [<Блок_индикаторной_подсхемы>]
  <Вызов_модуля_ядра_счетчика>
endmodule
```

Рис. 5 Структура шаблона СС-счетчика

```

//--- Входы---
input      T, TB;      // - 1 - Счетный вход, ПФС, спейсер=0
input      AR;         // - 2 - Вход асинхронного сброса, унарный
input      AS;         // - 3 - Вход асинхронной установки, унарный
input      CD, CDB;    // - 4 - Направление счета, ПФС, спейсер=0
input      Res, ResB;  // - 5 - Вход общего СС-сброса, ПФС, спейсер=0
input      Set, SetB;  // - 6 - Вход общей СС-установки, ПФС, спейсер=0
input      WrkE, WrkEB; // - 7 - Разрешение работы, ПФС, спейсер=0
input      CE, CEB;    // - 8 - Разрешение счета, ПФС, спейсер=0
input      WrtE, WrtEB; // - 9 - Разрешение записи, ПФС, спейсер=0
input  [N_Bit-1:0] D, DB; // - 10 - Данные для записи, ПФС, спейсер=0
//--- Выходы---
output     QT;         // - 11 - Счетный выход, унарный
output     Ind;        // - 12 - Индикаторный выход, унарный
output  [N_Bit-1:0] Q, QB; // - 13 - Информационный выход, бифазный
//--- Внутренние сигналы ----
wire  [N_Bit-1:0] Clear; // - 14 - Поразрядные сигналы сброса
wire  [N_Bit-1:0] Preset; // - 15 - Поразрядные сигналы установки
    
```

Рис. 6 Декларируемые сигналы шаблона СС-счетчика

Декларируются имена и типы входов и выходов всего СС-счетчика и многоразрядные внутренние переменные из списка, приведенного на рис. 6. Здесь ПФС — тип сигнала «парафазный со спейсером». Внутренние унарные сигналы могут не декларироваться. Это допускается стандартом языка Verilog.

В таблице указано, какие сигналы должны декларироваться при наличии соответствующих опций СС-счетчика. При определении состава объявляемых входов, выходов и переменных суммируются «звездочки» во всех строках таблицы, соответствующих опциям в данном счетчике. Например, в реверсивном СС-счетчике с асинхронным сбросом, СС-установкой, параллельной записью,

Объявления сигналов в вариантах СС-счетчика

№	Опция СС-счетчика	Порядковый номер переменной в списке														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	Асинхронный сброс		*									*	*	*		
2	Асинхронная установка			*								*	*	*		
3	СС-сброс					*						*	*	*	*	
4	СС-установка						*					*	*	*	*	*
5	Параллельная запись									*	*	*	*	*	*	*
6	Разрешение работы							*				*	*	*		
7	Разрешение счета								*			*	*	*		
8	Счетный вход не совпадает с фазовым сигналом	*										*	*	*		
9	Реверсивность				*							*	*	*		

разрешением работы и счетным входом, совпадающим с общим фазовым сигналом, должны использоваться объявления переменных с порядковыми номерами 2, 4, 6, 7, 9–15.

В вариантах СС-счетчика с СС-сбросом, СС-установкой и параллельной записью необходимо также объявление индекса генератора, формирующего многоразрядные сигналы: «genvar i;». Он задается в модулях соответствующих блоков шаблона СС-счетчика.

В синхронном прототипе синтезируемого СС-счетчика счетным входом может служить либо общий тактовый сигнал, либо сигнал, формируемый комбинационным окружением счетчика. В первом случае в СС-счетчике роль счетного входа играет один из индикаторов фазовых переключений остальных входов СС-счетчика. В отсутствие входов разрешения (работы, счета, записи) и входа признака направления счета он реализуется как отдельный унарный вход модуля СС-счетчика, к которому подключается сигнал фазового управления общей СС-схемы.

Если счетный вход счетчика в синхронном аналоге не совпадает с тактовым сигналом, он реализуется как ПФС-сигнал разрешения счета. При наличии в описании синхронного прототипа счетчика входа разрешения счета он играет роль счетного входа синтезируемого СС-счетчика.

Пример Verilog-описания блока формирования входов сброса и установки ядра счетчика с заданными опциями асинхронного сброса и СС-записи приведен на рис. 7.

```
module RSWB4 (AR, D, DB, WrtE, Ph, nAR, Clear, Preset);

    parameter N_Bit = 4;          // Разрядность счетчика, 4 бита по умолчанию
    input  AR;                    // Вход асинхронного сброса низким уровнем
    input [N_Bit-1:0] D, DB;      // ПФС-вход поразрядной СС-записи, спейсер=0
    input  WrtE;                  // Вход разрешения записи высоким уровнем
    input  Ph;                    // Вход разрешения сброса и записи высоким уровнем
    output nAR;                   // Выход асинхронного сброса, активный уровень высокий
    output [N_Bit-1:0] Clear, Preset; // ПФС-выход сброса-установки
    genvar i;                      // Индекс генератора Verilog-кода

    INV  URSWB0 (.I(AR), .O(nAR));
    AND3 URSWB1 (.IO(WrtE), .I1(Ph), .I2(AR), .O(WrtEnC));
    generate
        for (i=0; i < N_Bit; i=i+1) begin //-- Цикл по числу разрядов
            A210I URSWB2 (.IO(WrtEnC), .I1(DB[i]), .I2(nAR), .O(Clear[i]));
            NAN2 URSWB3 (.IO(WrtEnC), .I1(D[i]), .O(Preset[i]));
        end
    endgenerate
endmodule
```

Рис. 7 Verilog-описание блока формирования входов сброса и установки

Функции блоков составных частей СС-счетчика, не допускающие декомпозиции, представлены в структурном виде в базе библиотеки стандартных элементов, задаваемой при синтезе. Например, в блоке RSWB4 на рис. 7 использованы элементы библиотеки 5503СС из системы автоматизированного проектирования (САПР) «Ковчег» («Технологический центр», МИЭТ). При отсутствии подходящего элемента в заданной библиотеке использование соответствующего шаблона СС-счетчика невозможно. В этом случае весь СС-счетчик должен синтезироваться с помощью логического синтезатора Yosys и программы синтеза комбинационных СС-схем:

- Yosys реализует синхронный счетчик в виде регистра хранения и комбинационной схемы его окружения;
- программа конвертации подставляет вместо синхронного регистра шаблон его СС-аналога [24];
- программа синтеза СС-схем дуализирует систему логических функций комбинационного окружения регистра и дополняет ее индикаторной подсхемой.

4 Методика компоновки шаблона самосинхронного счетчика

Компоновка шаблона СС-счетчика заключается в подборе модулей блоков — компонентов схемы СС-счетчика и согласовании их интерфейса, обеспечивающем адекватное воспроизведение свойств синхронного аналога.

Алгоритм компоновки шаблона:

- (1) определение комплекта свойств синтезируемого счетчика — совокупности функций сброса, установки, записи и разрешений — на основе свойств синхронного прототипа;
- (2) подбор модуля ядра СС-счетчика, исходя из наличия у синхронного прототипа свойств сброса, установки, записи и реверсивности;
- (3) подбор комплекта блоков для модуля окружения ядра СС-счетчика, согласование имен сигналов, подключаемых к входам и выходам блоков, объявление параметров и сигналов;
- (4) генерация заголовка шаблона СС-счетчика;
- (5) генерация СС-атрибутов шаблона СС-счетчика для последующего логического синтеза;
- (6) генерация вызова шаблона в общей схеме с учетом полярности активных уровней унарных входов и рабочих состояний ПФС-входов.

Базис компоновки шаблона СС-счетчика включает совокупность блоков, реализующих отдельные особенности функционирования синтезируемого СС-счетчика. Блоки содержатся в библиотеке в виде Verilog-модулей или фрагментов Verilog-кода. Для подбора комплекта блоков целесообразно использовать таблицу соответствия, строки которой определяют набор свойств синтезируемого

счетчика, а столбцы перечисляют всю совокупность вариантов блоков. Порядок включения модулей блоков в состав шаблона СС-счетчика роли не играет.

Заголовок шаблона СС-счетчика включает перечень входов и выходов синтезируемого СС-счетчика. Имена выводов СС-счетчика указываются в соответствии со списком опций синтезируемого триггера. В тело шаблона включаются вызовы всех отобранных на предыдущих шагах алгоритма модулей блоков и список декларируемых сигналов.

5 Заключение

Предложенный метод реализации СС-счетчиков с помощью генерируемых шаблонов позволяет формализовать и автоматизировать процедуру реализации СС-счетчика по его поведенческому описанию. Актуальным свойствам СС-счетчика (сбросу, установке, параллельной записи, разрешению счета и т. д.) сопоставляются аппаратные блоки (модули), описанные на языке Verilog и хранящиеся в библиотеке САПР. Самосинхронный счетчик komponуется из готовых блоков, реализующих заданные свойства счетчика, и модуля ядра счетчика, реализующего направление счета и индикацию счетного режима, в произвольном порядке.

Verilog-описание блоков и модуля ядра счетчика параметризованы по числу разрядов счетчика. Функциональная реализация блоков и ядра обеспечивает самосинхронность скомпонованного из них счетчика. Блоки, функции которых не допускают декомпозиции из-за нарушения самосинхронности счетчика, представлены в виде структурной схемы (списка цепей) на элементах целевой библиотеки САПР. При переходе на другую целевую библиотеку синтеза элементы структурных описаний блоков замещаются адекватными элементами новой библиотеки.

Число вариантов шаблона СС-счетчика определяется числом комбинаций опций, задаваемых его унарными и ПФС входами. Активные уровни входов и выходов СС-счетчика фиксированы. Их вариабельность обеспечивается подсхемой согласования в окружении счетчика.

Использование предложенного метода шаблонов обеспечивает получение действительно СС-реализаций двоичных счетчиков в составе общей СС-схемы, оптимизированных по потребительским характеристикам.

Литература

1. Afrin S., Rokhsana S., Akram R. AI-enhanced robotic process automation: A review of intelligent automation innovations // IEEE Access, 2025. Vol. 13. P. 173–197. doi: 10.1109/ACCESS.2024.3513279. EDN: DRFTAS.
2. Kozov V., Ivanov A., Ivanova G. A generalized review of recent robotics research (2020–2024) // 24th Symposium (International) INFOTEH-JAHORINA Proceed-

- ings. — IEEE, 2025. Art. 10959238. 5 p. doi: 10.1109/INFOTEN64129.2025.10959238.
3. *Harris D., Harris S. L.* Digital design and computer architecture. — Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, 2013. 690 p.
 4. *Hennessy J. L., Patterson D. A.* Computer architecture: A quantitative approach. — 6th ed. — San Mateo, CA, USA: Morgan Kaufmann, 2019. 936 p.
 5. *Anirudh S., Ramesh T. K.* An enhanced clock tree synthesis methodology for optimizing power in physical design // 3rd Conference (International) on VLSI Systems, Architecture, Technology and Applications Proceedings. — IEEE, 2022. Art. 10046629. 9 p. doi: 10.1109/VLSISATA54927.2022.10046629.
 6. *Мартыросов В. Е., Алексеев Г. А.* Методы высокоскоростной синхронизации в системах фазовой автоподстройки частоты // Радиотехника, 2023. Т. 87. № 3. С. 83–91. doi: 10.18127/j00338486-202303-08. EDN: JCCXZL.
 7. *Wiesner A., Kováčsházy T.* An innovative method to enhance PLL resolution in synchronized embedded systems // IEEE T. Instrum. Meas., 2025. Vol. 74. Art. 3002312. 12 p. doi: 10.1109/TIM.2025.3584124.
 8. *Sparsø J., Furber S.* Principles of asynchronous circuit design: A systems perspective. — New York, NY, USA: Springer, 2001. 337 p. doi: 10.1007/978-1-4757-3385-3.
 9. *Варшавский В. И., Кишиневский М. А., Мараховский В. Б. и др.* Автоматное управление асинхронными процессами в ЭВМ и дискретных системах / Под ред. В. И. Варшавского. — М.: Наука, 1986. 400 с.
 10. *Fant K. M.* Logically determined design: Clockless system design with NULL convention logic. — Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2005. 292 p. doi: 10.1002/0471702897.
 11. *Kushnerov A., Medina M., Yakovlev A.* Towards hazard-free multiplexer based implementation of self-timed circuits // 27th Symposium (International) on Asynchronous Circuits and Systems Proceedings. — IEEE, 2021. P. 17–24. doi: 10.1109/ASYNC48570.2021.00011.
 12. *Захаров В. Н., Степченко Ю. А., Дьяченко Ю. Г., Морозов Н. В., Плеханов Л. П., Степченко Д. Ю.* Свойства и оптимизация самосинхронных схем // Системы и средства информатики, 2025. Т. 35. № 1. С. 149–169. doi: 10.14357/08696527250108. EDN: QPTSAO.
 13. *Плеханов Л. П., Степченко Ю. А.* Экспериментальная проверка некоторых свойств строго самосинхронных схем // Системы и средства информатики, 2006. Вып. 16. С. 476–485. EDN: KZUWOX.
 14. *Соколов И. А., Степченко Ю. А., Рождественский Ю. В., Дьяченко Ю. Г.* Приближенная оценка эффективности синхронной и самосинхронной методологий в задачах проектирования сбоеустойчивых вычислительно-управляющих систем // Автоматика и телемеханика, 2022. № 2. С. 122–132. doi: 10.31857/S0005231022020088. EDN: PYRRXN.
 15. *Zhou R., Chong K.-S., Gwee B.-H., Chang J. S., Ho W.-G.* Synthesis of asynchronous QDI circuits using synchronous coding specifications // Symposium (International) on Circuits and Systems Proceedings. — IEEE, 2014. P. 153–156. doi: 10.1109/ISCAS.2014.6865088.
 16. *Oliveira D. L., Duarte G. C., Batista G. C., Cardoso N. N. M.* Converting synchronous digital systems to asynchronous systems using local-clock // 27th Conference

- (International) on Electronics, Electrical Engineering and Computing Proceedings. — IEEE, 2020. Art. 9220269. 4 p. doi: 10.1109/INTERCON50315.2020.9220269.
17. Плеханов Л. П. Основы самосинхронных электронных схем. — М.: Бином; Лаборатория знаний, 2013. 208 с. EDN: SUMKIV.
 18. Oliveira D., Cardoso N., Batista G. A new method for synthesis of self-timed combinational circuits with strong indication // 5th Ecuador Technical Chapters Meeting Proceedings. — IEEE, 2021. Art. 9590822. 6 p. doi: 10.1109/ETCM53643.2021.9590822.
 19. Sudeng S., Thongtak A. Synthesis of complicated asynchronous control circuits using template based technique // World Congress on Engineering Proceedings. — London, U.K.: Newswood Ltd., 2008. Vol. I. P. 462–467.
 20. Stepchenkov Y., Diachenko Y., Khilko D. Mapping self-timed sequential circuits on the basis of the original synchronous counterpart description // Conference (International) on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing Proceedings. — IEEE, 2025. P. 837–842. doi: 10.1109/ICIEAM65163.2025.11028582.
 21. Плеханов Л. П., Дьяченко Ю. Г., Хилько Д. В., Орлов Г. А. Оптимизация синтеза последовательностных самосинхронных схем по синхронному описанию // Системы и средства информатики, 2025. Т. 35. № 4. С. 4–19. doi: 10.14357/08696527250401. EDN: THWOVK.
 22. Yosys Open Synthesis Suite. <https://yosyshq.net/yosys>.
 23. Степченко Ю. А., Дьяченко Ю. Г., Морозов Н. В., Степченко Д. Ю., Дьяченко Д. Ю. Формализация синтеза самосинхронных счетчиков // Системы и средства информатики, 2024. Т. 34. № 2. С. 66–82. doi: 10.14357/08696527240205. EDN: KDIEOJ.
 24. Степченко Ю. А., Хилько Д. В., Дьяченко Ю. Г., Морозов Н. В., Степченко Д. Ю., Орлов Г. А. Методика десинхронизации при синтезе самосинхронных схем // Системы и средства информатики, 2024. Т. 34. № 1. С. 33–43. doi: 10.14357/08696527240103. EDN: XGZCWU.

Поступила в редакцию 27.02.2026

Принята к публикации 15.04.2026

TEMPLATE-BASED SELF-TIMED COUNTER DESIGN

*Yu. A. Stepchenkov, Yu. G. Diachenko, D. V. Khilko, G. A. Orlov, G. S. Appolonov,
and D. Yu. Diachenko*

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Voscov 119333, Russian Federation

Abstract: The article explores the self-timed (ST) binary counter automated design based on the initial Verilog description of a synchronous prototype. Counters are among the most popular digital units used in robotic systems. Typical synchronous circuit synthesizers construct counters using a storage

register and a combinational environment that calculates a new counter state based on its current state and the signal values that determine the counter's properties. However, in most cases, this approach to ST counter synthesis results in excessive hardware redundancy and degraded counter performance. However, circuit design solutions for sequential ST counters are available that ensure minimal hardware costs and acceptable performance. The design features of ST counters with various options for asynchronous and self-timed setup as well as operation-enable features are examined. A method for the ST counter formalized construction based on the use of ready-made hardware blocks — templates — that implement the specific features of their behavior is proposed. The ST counter's Verilog description is assembled from hardware modules corresponding to the specified synthesized counter's options. The proposed template method enables the synthesis of binary ST counters of various types (up, down, and reversible), automates the creation of a cell library for ST circuit synthesis, and guarantees the self-timing of the resulting hardware counter implementations.

Keywords: self-timed circuit; counter; automated design; parameterization; template; cell library

DOI: 10.14357/08696527260201

EDN: GCWIDC

Acknowledgments

The research was funded by the Russian Science Foundation grant No.25-29-20207, <https://rscf.ru/en/project/25-29-20207/>.

References

1. Afrin, S., S. Roksana, and R. Akram. 2025. AI-enhanced robotic process automation: A review of intelligent automation innovations. *IEEE Access* 13:173–197. doi: 10.1109/ACCESS.2024.3513279. EDN: DRFTAS.
2. Kozov, V., A. Ivanov, and G. Ivanova. 2025. A generalized review of recent robotics research (2020–2024). *24th Symposium (International) INFOTEH-JAHORINA Proceedings*. IEEE. Art. 10959238. 5 p. doi: 10.1109/INFOTEH64129.2025.10959238.
3. Harris, D., and S. L. Harris. 2013. *Digital design and computer architecture*. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier. 690 p.
4. Hennessy, J. L., and D. A. Patterson. 2019. *Computer architecture: A quantitative approach*. 6th ed. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann. 936 p.
5. Anirudh, S., and T. K. Ramesh. 2022. An enhanced clock tree synthesis methodology for optimizing power in physical design. *3rd Conference (International) on VLSI Systems, Architecture, Technology and Applications Proceedings*. IEEE. Art. 10046629. 9 p. doi: 10.1109/VLSISATA54927.2022.10046629.
6. Martirosov, V. E., and G. A. Alekseev. 2023. Metody vysokoskorostnoy sinkhronizatsii v sistemakh fazovoy avtopodstroyki chastoty [Methods of high-speed synchronization in PLL systems]. *Radiotekhnika [Radioengineering]* 87(3):83–91. doi: 10.18127/j00338486-202303-08. EDN: JCCXZL.
7. Wiesner, A., and T. Kováčsházy. 2025. An innovative method to enhance PLL resolution in synchronized embedded systems. *IEEE T. Instrum. Meas.* 74:3002312. 12 p. doi: 10.1109/TIM.2025.3584124.

8. Sparsø, J., and S. Furber. 2001. *Principles of asynchronous circuit design: A systems perspective*. New York, NY: Springer. 337 p. doi: 10.1007/978-1-4757-3385-3.
9. Varshavsky, V. I., M. A. Kishinevsky, V. B. Marakhovsky, and V. A. Peschansky. 1990. *Self-timed control of concurrent processes*. Kluwer Academic Pubs. 245 p.
10. Fant, K. M. 2005. *Logically determined design: Clockless system design with NULL convention logic*. New York, NY: John Wiley. 292 p. doi: 10.1002/0471702897.
11. Kushnerov, A., M. Medina, and A. Yakovlev. 2021. Towards hazard-free multiplexer based implementation of self-timed circuits. *27th Symposium (International) on Asynchronous Circuits and Systems Proceedings*. IEEE. 17–24. doi: 10.1109/ASYNC48570.2021.00011.
12. Zakharov, V. N., Yu. A. Stepchenkov, Yu. G. Diachenko, N. V. Morozov, L. P. Plekhanov, and D. Yu. Stepchenkov. 2025. Svoystva i optimizatsiya samosinkhronnykh skhem [Properties and optimization of self-timed circuits]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 35(1):149–169. doi: 10.14357/08696527250108. EDN: QPTSAO.
13. Plekhanov, L. P., and Yu. A. Stepchenkov. 2006. Eksperimental'naya proverka nekotorykh svoystv strogo samosinkhronnykh skhem [Experimental verification of some properties of strictly self-timed circuits]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 16:476–485. EDN: KZUWOX.
14. Sokolov, I. A., Yu. A. Stepchenkov, Yu. V. Rogdestvenski, and Yu. G. Diachenko. 2022. Approximate evaluation of the efficiency of synchronous and self-timed methodologies in problems of designing failure-tolerant computing and control systems. *Automat. Rem. Contr.* 83(2):264–272. doi: 10.1134/S0005117922020084. EDN: CDSNSD.
15. Zhou, R., K.-S. Chong, B.-H. Gwee, J. S. Chang, and W.-G. Ho. 2014. Synthesis of asynchronous QDI circuits using synchronous coding specifications. *Symposium (International) on Circuits and Systems Proceedings*. IEEE. 153–156. doi: 10.1109/ISCAS.2014.6865088.
16. Oliveira, D. L., G. C. Duarte, G. C. Batista, and N. N. M. Cardoso. 2020. Converting synchronous digital systems to asynchronous systems using local-clock. *27th Conference (International) on Electronics, Electrical Engineering and Computing Proceedings*. IEEE. Art. 9220269. 4 p. doi: 10.1109/INTERCON50315.2020.9220269.
17. Plekhanov, L. P. 2013. *Osnovy samosinkhronnykh elektronnykh skhem* [Basics of self-timed electronic circuits]. Moscow: BINOM; Laboratoriya znaniy. 208 p. EDN: SUMKIV.
18. Oliveira, D. L., N. N. M. Cardoso, and G. C. Batista. 2021. A new method for synthesis of self-timed combinational circuits with strong indication. *5th Ecuador Technical Chapters Meeting Proceedings*. IEEE. Art. 9590822. 6 p. doi: 10.1109/ETCM53643.2021.9590822.
19. Sudeng, S., and A. Thongtak. 2008. Synthesis of complicated asynchronous control circuits using template based technique. *World Congress on Engineering Proceedings*. London, U.K.: Newswood Ltd. I:462–467.
20. Stepchenkov, Y., Y. Diachenko, and D. Khilko. 2025. Mapping self-timed sequential circuits on the basis of the original synchronous counterpart description. *Conference (International) on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing Proceedings*. IEEE. 837–842. doi: 10.1109/ICIEAM65163.2025.11028582.

21. Plekhanov, L. P., Yu. G. Diachenko, D. V. Khilko, and G. A. Orlov. 2025. Optimizatsiya sinteza posledovatel'nostnykh samosinkhronnykh skhem po sinkhronnomu opisaniyu [Template method in synthesis of self-timed digital circuits]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 35(4):4–19. doi: 10.14357/08696527250401. EDN: THWOVK.
22. Yosys open synthesis suite. Available at: <https://yosyshq.net/yosys> (accessed May 6, 2026).
23. Stepchenkov, Yu. A., Yu. G. Diachenko, N. V. Morozov, D. Yu. Stepchenkov, and D. Yu. Diachenko. 2024. Formalizatsiya sinteza samosinkhronnykh schetchikov [Self-timed counter synthesis formalization]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 34(2):66–82. doi: 10.14357/08696527240205. EDN: KDIEOJ.
24. Stepchenkov, Yu. A., D. V. Khilko, Yu. G. Diachenko, N. V. Morozov, D. Yu. Stepchenkov, and G. A. Orlov. 2024. Metodika desinkhronizatsii pri sinteze samosinkhronnykh skhem [Desynchronization methodology at self-timed circuit synthesis]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 34(1):33–43. doi: 10.14357/08696527240103. EDN: XGZCWU.

Received February 27, 2026

Accepted April 15, 2026

Contributors

Stepchenkov Yuri A. (b. 1951) — Candidate of Science (PhD) in technology, leading scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; YStepchenkov@frccsc.ru

Diachenko Yuri G. (b. 1958) — Candidate of Science (PhD) in technology, senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; YDyachenko@frccsc.ru

Khilko Dmitri V. (b. 1987) — Candidate of Science (PhD) in technology, senior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation; DHilko@frccsc.ru

Orlov Georgi A. (b. 1994) — scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation, GOrlov@frccsc.ru

Appolonov Georgi S. (b. 2002) — engineer, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation, GAppolonov@frccsc.ru

Diachenko Denis Y. (b. 1987) — research engineer, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119133, Russian Federation, DDyachenko@frccsc.ru

ВЕЙВЛЕТ-НЕЙРОСЕТЕВОЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ НАБЛЮДАЕМОЙ ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПУГАЧЁВА С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ШУМАМИ ПО СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОМУ КРИТЕРИЮ*

И. Н. Сеницын¹, В. И. Сеницын², Э. Р. Корепанов³, Т. Д. Конашенкова⁴

Аннотация: Разработано методическое и алгоритмическое обеспечение вейвлет-нейросетевого синтеза наблюдаемой линейной стохастической системы (СтС) Пугачёва с параметрическими шумами (ПШ), оптимальной по критерию минимума среднеквадратичной ошибки (СКО). На вход системы подается одномерный стохастический процесс (СтП), состоящий из полезного сигнала, зависящего от случайных параметров, и ПШ. Задан вид требуемого выходного СтП системы. Линейный оператор СКО-оптимальной СтС находится приближенным решением операторного уравнения, связывающего вторые вероятностные моменты входного и требуемого выходного СтП системы, на основе теории кратномасштабного анализа (КМА) и вейвлет-нейронной сети (ВНС). Входной СтП представляется в виде линейной комбинации входных случайных величин (СВ) методом вейвлет-канонических разложений (ВЛКР). Оптимальная по критерию СКО оценка выходного СтП также формируется в виде линейной комбинации входных СВ с коэффициентами, определяемыми из решения операторного уравнения. Получены аналитические выражения для оценки точности метода, включающие математическое ожидание, второй начальный момент и дисперсию ошибки СКО-оптимальной оценки выходного СтП. Приведены результаты вычислительных экспериментов, показывающие преимущества нейросетевого подхода на базе КМА, ВЛКР и ВНС в сравнении с рекуррентными алгоритмами на базе КМА и ВЛКР.

Ключевые слова: вейвлет; вейвлет-нейронная сеть; каноническое разложение; моделирование; оптимальная оценка; параметрический шум; среднеквадратичный критерий; стохастический процесс; стохастическая система

DOI: 10.14357/08696527260202

EDN: FADQTM

*Работа выполнена с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика») ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, sinitsin@dol.ru

²Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, vsinitsin@frccsc.ru

³Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, ekorepanov@frccsc.ru

⁴Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, tkonashenkova64@mail.ru

1 Введение

В задачах практики часто встречаются линейные системы, в которых шумы зависят линейно от вектора состояния системы. Для описания поведения таких систем применяют линейные СтС с ПШ [1, 2]. Большое число работ посвящено анализу и синтезу билинейных СтС, которые представляют собой важный частный случай СтС с ПШ [3–5].

В настоящей работе авторы предлагают решение задачи синтеза оптимальной по критерию минимума СКО одномерной системы, описываемой линейными уравнениями В. С. Пугачёва с ПШ для наблюдаемого входного и требуемого выходного СтП, зависящих от случайных параметров [1, 2]. Линейный оператор СКО-оптимальной СтС находится приближенным решением операторного уравнения, связывающего вторые вероятностные моменты входного и выходного СтП системы, на основе общих принципов приближенных методов решения операторных уравнений [6], т. е. операторное уравнение заменяется более простым, которое поддается непосредственному решению. При разработке нового приближенного метода применялась теория КМА [7], нейросетевые технологии [8] и ВЛКР СтП [2]. Действительные функции, определяющие вторые вероятностные моменты входного и выходного СтП системы, аппроксимируются линейными комбинациями базисных вейвлетов с компактными носителями [7]. Оптимальный по критерию СКО оператор задается в виде совокупности параметров, значения которых находятся при приближенном решении операторного уравнения на основе ВНС [9, 10]. Входной СтП представляется в виде линейной комбинации входных СВ методом ВЛКР [2]. При нахождении значений входных СВ применяются ВЛКР, построенные на основе ВНС и обозначаемые как КРВНС [11]. Оптимальная по критерию СКО оценка выходного СтП моделируется в виде линейной комбинации входных СВ с коэффициентами в виде параметров, значения которых были определены при решении операторного уравнения.

В разд. 2 дана постановка задачи. В разд. 3 предлагается приближенное решение операторного уравнения на основе ВНС. Приведен алгоритм определения конечного числа параметров СКО-оптимального оператора. В разд. 4 описан процесс построения СКО-оптимальной оценки требуемого выходного СтП в виде линейной комбинации входных СВ. Получены формулы для нахождения входных СВ на основе метода КРВНС случайной помехи из состава входного СтП. Приведен алгоритм компьютерного моделирования СКО-оптимальной оценки требуемого выходного СтП. В разд. 5 для оценки точности метода получены формулы математического ожидания, второго начального момента и дисперсии ошибки СКО-оценки требуемого выходного СтП. В разд. 6 приведены результаты вычислительных экспериментов.

2 Постановка задачи

Пусть стохастические одномерные действительные СтП $Z(t)$ и $W(t)$, $t \in [t_0, t_k]$, заданы на вероятностном пространстве $(\mathcal{L}^2[t_0, t_k], \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Здесь

$\mathcal{L}^2[t_0, t_k]$ — гильбертово пространство функций $\xi(t)$, $t \in [t_0, t_k]$, с нормой $\|\xi\| = [\int_{t_0}^{t_k} |\xi(t)|^2 dt]^{1/2}$; \mathcal{A} — σ -алгебра в $\mathcal{L}^2[t_0, t_k]$; $\mathcal{P}(\xi)$ — вероятность события ξ . При этом выполняются условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[Z(t)] &= m^Z(t) \in \mathcal{L}^2[t_0, t_k]; \\ \mathbf{M}[Z(t_1)Z(t_2)] &= \Gamma^{ZZ}(t_1, t_2) \in \mathcal{L}^2([t_0, t_k] \times [t_0, t_k]); \\ \mathbf{M}[W(t)] &= m^W(t) \in \mathcal{L}^2[t_0, t_k]; \\ \mathbf{M}[W(t_1)W(t_2)] &= \Gamma^{WW}(t_1, t_2) \in \mathcal{L}^2([t_0, t_k] \times [t_0, t_k]); \\ \mathbf{M}[W(t_1)Z(t_2)] &= \Gamma^{WZ}(t_1, t_2) \in \mathcal{L}^2([t_0, t_k] \times [t_0, t_k]). \end{aligned}$$

В пространстве $\mathcal{L}^2[t_0, t_k]$ зададим ортонормированный базис вейвлетов с компактными носителями $\{g_\nu(t)\}_{\nu=1}^\infty$ [7]. Кратномасштабный анализ [7] позволяет определить последовательность подпространств E_J пространства $\mathcal{L}^2[t_0, t_k]$, в каждом из которых можно построить соответствующий ортонормированный базис вейвлетов с компактными носителями $\{g_\nu(t)\}_{\nu=1}^L$, где конечное число L базисных вейвлет-функций определяется максимальным уровнем вейвлет-разрешения $J = 0, 1, 2, \dots$ и $L = 2^{J+1}$. В пространстве $\mathcal{L}^2([t_0, t_k] \times [t_0, t_k])$ определим двумерный ортонормированный базис путем тензорного произведения двух одномерных вейвлет-базисов $\{g_\nu(t)\}_{\nu=1}^\infty$ и зададим соответствующую последовательность подпространств $E_J \times E_J$, $J = 0, 1, 2, \dots$.

Рассмотрим СтС В.С. Пугачёва [1, 2], когда шумы зависят линейно от случайных параметров, описывающих поведение системы. На вход СтС поступает одномерный наблюдаемый в течение промежутка времени $[t_0, t_k]$ СтП $Z(t)$, содержащий полезный сигнал $S(t)$ и нормально распределенную случайную помеху $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием и заданной ковариационной функцией $K^X(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in [t_0, t_k]$. Полезный сигнал $S(t)$ задан линейной функцией относительно вектора случайных параметров $U = [U_1 U_2 \dots U_N]^T$:

$$S(t) = \sum_{r=1}^N \xi_r(t) U_r, \tag{1}$$

где $\xi_r(t)$, $r = \overline{1, N}$, — заданные детерминированные скалярные структурные функции. Случайная величина U задана известной плотностью вероятности $f_u(u)$ с конечными первым и вторым моментами. Случайная помеха $X(t)$ не зависит от вектора случайных параметров U . Входной СтП определяется уравнением:

$$Z(t) = \sum_{r=1}^N \xi_r(t) U_r + \left(b_0 + \sum_{r=1}^N b_r U_r \right) X(t), \tag{2}$$

где $b_r = \text{const}$, $r = \overline{0, N}$. На выходе СтС требуется получить одномерный СтП $W(t)$ в виде заданного преобразования входного полезного сигнала:

$$W(t) = \sum_{r=1}^N \zeta_r(t) U_r, \quad (3)$$

где $\zeta_r(t)$, $r = \overline{1, N}$, — заданные детерминированные структурные функции.

Требуется найти оптимальную СтС с оператором A_t , выходной СтП которого

$$W^*(t) = A_t Z(t)$$

обеспечивает минимум СКО:

$$M \left[(W(t) - W^*(t))^2 \right] = \min .$$

Далее СтП $W^*(t)$ будем называть СКО-оптимальной оценкой выходного СтП $W(t)$.

3 Приближенное решение операторного уравнения

Пусть A_t принадлежит классу линейных операторов. Тогда известно уравнение, определяющее оператор СтС, оптимальной по среднеквадратичному критерию [2]:

$$A_t [M [Z(t)Z(\tau)]] = M [W(t)Z(\tau)]; \quad t, \tau \in [t_0, t_k]. \quad (4)$$

Учитывая, что $M[Z(t)Z(\tau)] = \Gamma^{ZZ}(t, \tau)$, $M[W(t)Z(\tau)] = \Gamma^{WZ}(t, \tau)$, уравнение (4) можно переписать в виде:

$$A_t [\Gamma^{ZZ}(t, \tau)] = \Gamma^{WZ}(t, \tau); \quad t, \tau \in [t_0, t_k]. \quad (5)$$

Из (2) и (3) с учетом независимости U от $X(t)$ получаем следующие выражения для начальных моментов второго порядка СтП $Z(t)$ и $W(t)$:

$$\begin{aligned} \Gamma^{ZZ}(t, \tau) = & \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \xi_p(t) \xi_q(\tau) \gamma_{pq}^U + \\ & + \left(b_0^2 + 2b_0 \sum_{p=1}^N m_p^U b_p + \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N b_p b_q \gamma_{pq}^U \right) K_X(t, \tau); \end{aligned}$$

$$\Gamma^{WZ}(t, \tau) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N \zeta_q(t) \xi_q(\tau) \gamma_{pq}^U,$$

где $\gamma_{pq}^U = M[U_p U_q]$, $m_p^U = M[U_p]$.

Согласно [6], для приближенного решения уравнения (5) выполняется его замена более простым уравнением вида:

$$A_t^L [\Gamma^{ZZL}(t, \tau)] = \Gamma^{WZL}(t, \tau); \quad t, \tau \in [t_0, t_k], \quad (6)$$

где функции $\Gamma^{ZZ}(t, \tau), \Gamma^{WZ}(t, \tau) \in \mathcal{L}^2([t_0, t_k] \times [t_0, t_k])$ аппроксимируются функциями $\Gamma^{ZZL}(t, \tau), \Gamma^{WZL}(t, \tau) \in E_J \times E_J$. Функции $\Gamma^{ZZL}(t, \tau)$ и $\Gamma^{WZL}(t, \tau)$ выражаются линейными комбинациями базисных вейвлет-функций

$$\Gamma^{ZZL}(t, \tau) = \sum_{\nu=1}^L \sum_{\mu=1}^L \gamma_{\nu\mu}^{ZZ} g_{\nu}(t) g_{\mu}(\tau); \quad \Gamma^{WZL}(t, \tau) = \sum_{\nu=1}^L \sum_{\mu=1}^L \gamma_{\nu\mu}^{WZ} g_{\nu}(t) g_{\mu}(\tau) \quad (7)$$

с коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\nu\mu}^{ZZ} &= \int_{t_0}^{t_k} \int_{t_0}^{t_k} \Gamma^{ZZ}(t, \tau) g_{\nu}(t) g_{\mu}(\tau) dt d\tau; \\ \gamma_{\nu\mu}^{WZ} &= \int_{t_0}^{t_k} \int_{t_0}^{t_k} \Gamma^{WZ}(t, \tau) g_{\nu}(t) g_{\mu}(\tau) dt d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из определения КМА [7] следует, что для $t, \tau \in [t_0, t_k]$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \Gamma^{ZZL}(t, \tau) = \Gamma^{ZZ}(t, \tau); \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \Gamma^{WZL}(t, \tau) = \Gamma^{WZ}(t, \tau).$$

Чтобы найти оператор A_t^L , аппроксимирующий оператор A_t , подставим выражения (7) в (6):

$$A_t^L \left[\sum_{\nu=1}^L \sum_{\mu=1}^L \gamma_{\nu\mu}^{ZZ} g_{\nu}(t) g_{\mu}(\tau) \right] = \sum_{\nu=1}^L \sum_{\mu=1}^L \gamma_{\nu\mu}^{WZ} g_{\nu}(t) g_{\mu}(\tau). \quad (9)$$

Из (9) следует, что оператор A_t^L можно задать в виде совокупности коэффициентов $\{h_{\nu}\}_{\nu=1}^L$, удовлетворяющих уравнению

$$\sum_{\nu=1}^L h_{\nu} g_{\nu}(t) \sum_{\mu=1}^L \gamma_{\nu\mu}^{ZZ} g_{\mu}(\tau) = \sum_{\nu=1}^L \sum_{\mu=1}^L \gamma_{\nu\mu}^{WZ} g_{\nu}(t) g_{\mu}(\tau).$$

Тогда оператор $A_t : \Gamma^{ZZ}(t, \tau) \rightarrow \Gamma^{WZ}(t, \tau)$ для $t, \tau \in [t_0, t_k]$ определяется в виде бесконечной совокупности коэффициентов $\{h_{\nu}\}_{\nu=1}^{\infty}$, удовлетворяющих уравнению

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} h_{\nu} g_{\nu}(t) \sum_{\mu=1}^{\infty} \gamma_{\nu\mu}^{ZZ} g_{\mu}(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \gamma_{\nu\mu}^{WZ} g_{\nu}(t) g_{\mu}(\tau).$$

Согласно [6], последовательность операторов $A_t^L : \Gamma^{ZZL}(t, \tau) \rightarrow \Gamma^{WZL}(t, \tau)$ будет сходиться к оператору $A_t : \Gamma^{ZZ}(t, \tau) \rightarrow \Gamma^{WZ}(t, \tau)$ при $L \rightarrow \infty$ для $t, \tau \in [t_0, t_k]$.

Следуя [8], найдем неизвестные коэффициенты h_ν , $\nu = \overline{1, L}$, применяя нейросетевые технологии. Для этого рассмотрим задачу аппроксимации известной функции $\Gamma^{WZ}(t, \tau)$, $t, \tau \in [t_0, t_k]$, линейной зависимостью двумерных вейвлет-функций

$$\rho_\nu^{ZZ}(t, \tau) = g_\nu(t) \sum_{\mu=1}^L \gamma_{\nu\mu}^{ZZ} g_\mu(\tau)$$

с неизвестными коэффициентами h_ν , $\nu = \overline{1, L}$:

$$\Gamma^{WZL}(t, \tau) = \sum_{\nu=1}^L h_\nu \rho_\nu^{ZZ}(t, \tau).$$

Вычислим значения заданных функций в точках

$$t_i = t_0 + i \frac{\delta t}{2}, \quad \delta t = \frac{t_k - t_0}{L}, \quad i = \overline{1, L}, \quad (10)$$

и построим функцию стоимости следующим образом:

$$E^\Gamma(h) = \frac{1}{2L^2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \left(\Gamma^{WZ}(t_i, t_j) - \sum_{\nu=1}^L h_\nu \rho_\nu^{ZZ}(t_i, t_j) \right)^2, \quad (11)$$

или

$$E^\Gamma(h) = \frac{1}{2L^2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L (e^{WZ}(t_i, t_j))^2, \quad (12)$$

где

$$e^{WZ}(t_i, t_j) = \Gamma^{WZ}(t_i, t_j) - \sum_{\nu=1}^L h_\nu \rho_\nu^{ZZ}(t_i, t_j).$$

Итак, задача построения линейного оператор A_t^L сведена к нахождению оптимальных значений коэффициентов h_ν^* , $\nu = \overline{1, L}$, при которых функция стоимости (11) принимает минимальное значение.

Для решения поставленной задачи построим многослойную ВНС № 1 (рис. 1) со следующей структурой:

- входной слой: $t_i; t_j; i, j = \overline{1, L}$;
- первый скрытый слой вычисляет значения базисных функций $g_\nu(t_i); g_\mu(t_j)$; $\nu, \mu = \overline{1, L}$;

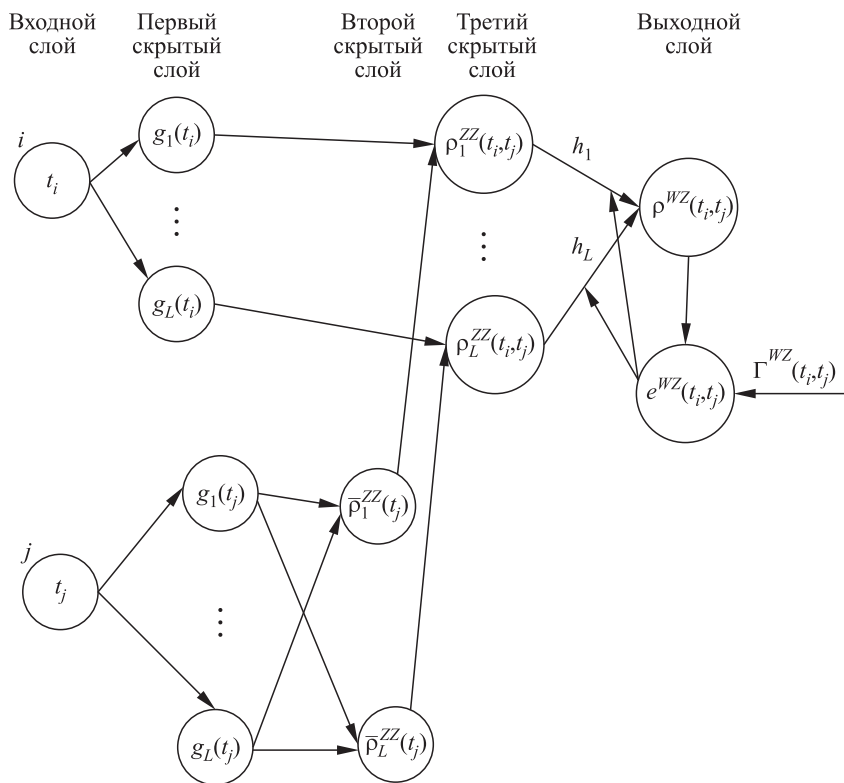


Рис. 1 Вейвлет-нейронная сеть № 1 для определения параметров линейного оператора A_t^L

– второй скрытый слой вычисляет значения функций

$$\bar{\rho}_\nu^{ZZ}(t_j) = \sum_{\mu=1}^L \gamma_{\nu\mu}^{ZZ} g_\mu(t_j);$$

– третий скрытый слой вычисляет значения функций

$$\rho_\nu^{ZZ}(t_i, t_j) = g_\nu(t_i) \bar{\rho}_\nu^{ZZ}(t_j);$$

– выходной слой вычисляет значения фактического отклика сети

$$\rho^{WZ}(t_i, t_j) = \sum_{\nu=1}^L h_\nu \rho_\nu^{ZZ}(t_i, t_j).$$

Вейвлет-нейронная сеть содержит пять слоев, в том числе три скрытых. Обучаемыми параметрами служат синаптические веса h_ν , $\nu = \overline{1, L}$. Для обучения ВНС применяется пакетный режим обучения с учителем методом обратного распространения ошибки [8]. Начиная с исходных значений весов $h_\nu(0) = h_{\nu 0}$, $\nu = \overline{1, L}$, генерируется последовательность весовых коэффициентов $h_\nu(1), h_\nu(2), \dots$, $\nu = \overline{1, L}$, таких что при переходе от n -й итерации алгоритма к $(n + 1)$ -й выполняется условие $E^\Gamma(h(n + 1)) \leq E^\Gamma(h(n))$, а значения весовых коэффициентов стабилизируются около оптимальных значений h_ν^* , $\nu = \overline{1, L}$.

Корректировка весов осуществляется по формуле:

$$h_\nu(n + 1) = h_\nu(n) - \eta q_\nu(n), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} q_\nu(n) &= q_\nu = \frac{\partial E^\Gamma(h)}{\partial h_\nu} = \\ &= -\frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \left(\Gamma^{WZ}(t_i, t_j) - \sum_{\nu=1}^L h_\nu \rho_\nu^{ZZ}(t_i, t_j) \right) \rho_\nu^{ZZ}(t_i, t_j); \end{aligned}$$

$\eta = const$ — параметр скорости обучения $0 < \eta < 1$.

В итоге имеем алгоритм определения параметров h_ν^* , $\nu = \overline{1, L}$, линейного оператора A_t^L .

Алгоритм 1. Определение параметров линейного оператора A_t^L

1. Генерация множества обучающих примеров в виде совокупности значений параметра времени t_i, t_j , $i, j = \overline{1, L}$, по формуле (10) и соответствующих значений функции $\Gamma^{WZ}(t_i, t_j)$, $i, j = \overline{1, L}$. Задание значений функции $\Gamma^{ZZ}(t_i, t_j)$.
2. Определение коэффициентов $\gamma_{\nu\mu}^{ZZ}$, $\nu, \mu = \overline{1, L}$, вейвлет-разложения (ВЛР) $\Gamma^{ZZL}(t_i, t_j)$ согласно (7), (8).
3. Задание параметра скорости обучения $0 < \eta < 1$, параметра $0 < \delta^E < 1$.
4. Инициализация весов. При $n = 0$ $h_\nu(0) = h_{\nu 0}$, $\nu = \overline{1, L}$.
5. Вычисление функций первого скрытого слоя $g_\nu(t_i)$, $\nu = \overline{1, L}$.
6. Вычисление функций второго скрытого слоя $\rho_\nu^Z(t_i)$, $\nu, i = \overline{1, L}$.
7. Вычисление функций третьего скрытого слоя $\rho_\nu^{QZ}(t_i, t_j)$, $\nu, i, j = \overline{1, L}$.
8. Вычисление функций выходного слоя $\rho^{WZ}(t_i, t_j)$, $i, j = \overline{1, L}$.

9. Вычисление значения функции стоимости по формуле (12). Начиная с третьего шага при $n = 3$, проверка условия окончания адаптации весов: $|E^\Gamma(h(n+1)) - E^\Gamma(h(n))| \leq \delta^E$. Если условие выполняется, выход из алгоритма, в противном случае переход к п. 10.
10. Адаптация весов. Изменение весов по формуле (13).
11. Увеличение номера итерации n на 1 и возвращение к п. 8.

4 Построение оценки выходного стохастического процесса, оптимальной по критерию среднего квадратического отклонения

После определения параметров h_ν^* , $\nu = \overline{1, L}$, линейного оператора A_t^L для построения приближенной СКО-оптимальной оценки выходного СтП необходимо аппроксимировать входной СтП $Z(t)$ ВЛР

$$Z^L(t) = \sum_{\nu=1}^L V_\nu^Z g_\nu(t),$$

где V_ν^Z — входные СВ, определяемые выражениями

$$V_\nu^Z = \int_{t_0}^{t_k} g_\nu(t) Z(t) dt, \quad \nu = \overline{1, L}. \quad (14)$$

Тогда приближенную СКО-оптимальную оценку можно записать в виде:

$$W^{L*}(t) = A_t^L Z(t) = \sum_{\nu=1}^L h_\nu^* V_\nu^Z g_\nu(t). \quad (15)$$

После подстановки (2) в (14) имеем:

$$V_\nu^Z = \sum_{r=0}^{N_U} U_r \int_{t_0}^{t_k} \xi_r(t) g_\nu(t) dt + \left(b_0 + \sum_{r=1}^N U_r b_r \right) \int_{t_0}^{t_k} X(t) g_\nu(t) dt.$$

Из условия $\xi_1(t), \dots, \xi_N(t) \in \mathcal{L}^2[t_0, t_k]$ следует, что

$$\int_{t_0}^{t_k} \xi_r(t) g_\nu(t) dt = \alpha_{\nu r}^\xi \quad (16)$$

являются коэффициентами соответствующих ВЛР. Случайные величины

$$V_\nu^X = \int_{t_0}^{t_k} X(t)g_\nu(t) dt \quad (17)$$

представляют собой некоррелированные СВ КРВНС [11] случайной помехи $X(t)$ в виде

$$X(t) = \sum_{\nu=1}^L V_\nu^X g_\nu(t).$$

Случайные величины V_ν^X имеют нулевые математические ожидания и дисперсии D_ν^X , значения которых определяются при построении КРВНС СтП $X(t)$. Учитывая (16) и (17), получим окончательное выражение для входных СВ V_ν^Z :

$$V_\nu^Z = \sum_{r=1}^N \alpha_{\nu r} U_r + \left(b_0 + \sum_{r=1}^N U_r b_r \right) V_\nu^X. \quad (18)$$

После подстановки (18) в (15) получаем формулу для СКО-оптимальной оценки:

$$W^{L*}(t) = \sum_{\nu=1}^L h_\nu^* g_\nu(t) \left(\sum_{r=1}^N \alpha_{\nu r} U_r + \left(b_0 + \sum_{r=1}^N U_r b_r \right) V_\nu^X \right). \quad (19)$$

Для компьютерного моделирования СКО-оптимальной оценки $W^{L*}(t)$ выходного СтП $W(t)$ необходимо с помощью датчика случайных чисел получить значения $u = [u_1 u_2 \dots u_N]^T$ векторной СВ U с заданной плотностью вероятности $f_u(u)$ и значения v_ν^X , $\nu = \overline{1, L}$, нормальных СВ V_ν^X , $\nu = \overline{1, L}$, с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями D_ν^X .

Для нахождения дисперсий D_ν^X СВ V_ν^X , $\nu = \overline{1, L}$, разработан алгоритм на основе многослойной ВНС № 2 [11] (рис. 2):

- входной слой: $t_i; t_j; i, j = \overline{1, L}$;
- первый скрытый слой вычисляет значения функций

$$\Psi_\nu(t_i, t_j) = g_\nu(t_i)g_\nu(t_j), \quad \nu = \overline{1, L};$$

- выходной слой вычисляет отклик сети:

$$y(t_i, t_j) = \sum_{\nu=1}^L D_\nu^X \Psi_\nu(t_i, t_j).$$

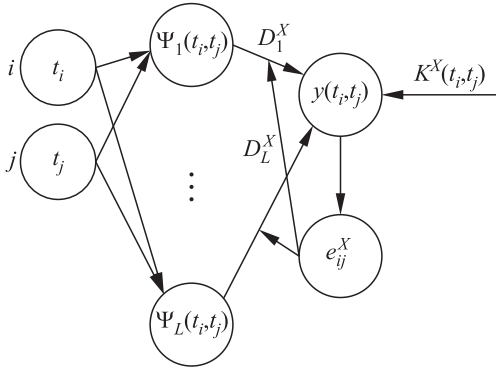


Рис. 2 Вейвлет-нейронная сеть № 2 для определения дисперсий СВ V_ν^X

Обучаемыми параметрами служат синаптические веса D_ν^X , $\nu = \overline{1, L}$. Для обучения ВНС № 2 применяется пакетный режим обучения с учителем методом обратного распространения ошибки [8]. Начиная с исходных значений весов $D_\nu^X(0) = D_{\nu 0}^X$, $\nu = \overline{1, L}$, генерируется последовательность весовых коэффициентов $D_\nu^X(1), D_\nu^X(2), \dots$, $\nu = \overline{1, L}$, таких что при переходе от n -й итерации алгоритма к $(n + 1)$ -й выполняется условие $E^X(D_\nu^X(n + 1)) \leq E^X(D_\nu^X(n))$ для функции стоимости

$$E^X(D_\nu^X(n)) = \frac{1}{2L^2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L (e_{ij}^X(n))^2, \quad (20)$$

где ошибка для каждого примера обучения вычисляется по формуле

$$e_{ij}^X = K^X(t_i, t_j) - y(t_i, t_j) = K^X(t_i, t_j) - \sum_{\nu=1}^L D_\nu^X(n) \Psi_\nu(t_i, t_j).$$

В результате обучения значения весовых коэффициентов стабилизируются около оптимальных значений D_ν^{X*} , $\nu = \overline{1, L}$. Корректировка весов осуществляется по формуле:

$$D_\nu^X(n + 1) = D_\nu^X(n) - \eta_X q_\nu^X(n), \quad (21)$$

где

$$q_\nu^X(n) = -\frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L (\Psi_\nu(t_i, t_j) e_{ij}^X(n));$$

$\eta_X = const$ — параметр скорости обучения $0 < \eta_X < 1$.

Алгоритм 2. Определение дисперсий D_ν^X нормальных СВ V_ν^X , $\nu = \overline{1, L}$

1. Генерация множества обучающих примеров в виде совокупности значений параметра времени t_i, t_j , $i, j = \overline{1, L}$, по формуле (10) и соответствующих значений функции $K^X(t_i, t_j)$, $i, j = \overline{1, L}$.

2. Задание параметра скорости обучения $0 < \eta_X < 1$, параметра $0 < \delta^{E^X} < 1$.
3. Инициализация весов. При $n = 0$ $D_\nu^X(0) = D_{\nu 0}^X$, $\nu = \overline{1, L}$.
4. Вычисление функций скрытого слоя: $\Psi_\nu(t_i, t_j)$; $\nu, i, j = \overline{1, L}$.
5. Вычисление фактического отклика: $y(t_i, t_j)$; $i, j = \overline{1, L}$.
6. Вычисление значения функции стоимости по формуле (20). Начиная с третьего шага при $n = 3$, проверка условия окончания адаптации весов: $|E^X(D_\nu^X(n+1)) - E^X(D_\nu^X(n))| \leq \delta^{E^X}$. Если условие выполняется, выход из алгоритма, в противном случае переход к п. 7.
7. Адаптация весов. Изменение весов по формуле (21).
8. Увеличение номера итерации n на 1 и возвращение к п. 5.

Схема компьютерного моделирования значений

$$w^{L^*}(t) = \sum_{\nu=1}^L h_\nu^* v_\nu^Z g_\nu(t) \quad (22)$$

оценки $W^{L^*}(t)$ представлена на рис. 3.

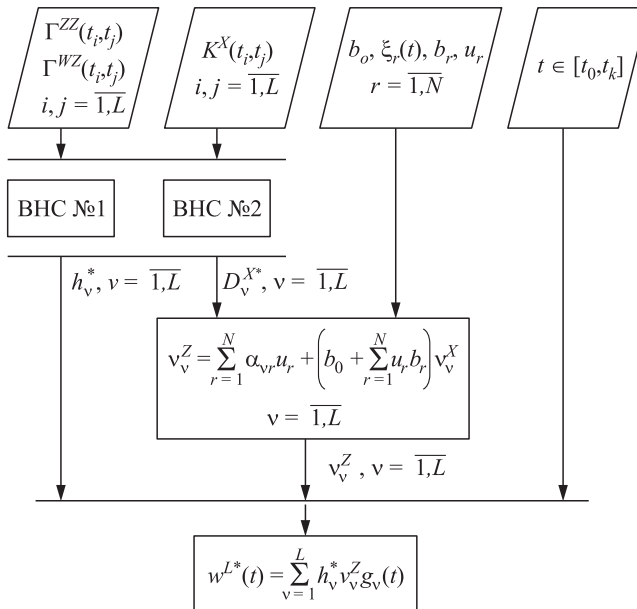


Рис. 3 Схема компьютерного моделирования SKO-оптимальной оценки $W^{L^*}(t)$

Алгоритм 3. Компьютерное моделирование СКО-оптимальной оценки $W^{L*}(t)$

1. Выбор базиса вейвлетов с компактными носителями, задание максимального уровня вейвлет-разрешения J . Генерация множества обучающих примеров для ВНС № 1 и ВНС № 2. Задание исходных данных: b_0 , b_r и $\xi_r(t)$. Генерация значений u_r СВ U_r .
2. Параллельное выполнение алгоритмов 1 и 2.
3. Вычисление значений v_ν^Z СВ V_ν^Z согласно (18).
4. Вычисление значения $w^{L*}(t)$ СКО-оптимальной оценки $W^{L*}(t)$ в заданный момент времени $t \in [t_0, t_k]$ согласно (22).

5 Точность алгоритмов

Для оценки точности найдем математическое ожидание и дисперсию ошибки

$$\Delta(t) = W(t) - W^{L*}(t). \quad (23)$$

Согласно (3) и (19),

$$\Delta(t) = \sum_{r=1}^N U_r \left(\zeta_r(t) - \sum_{\nu=1}^L h_\nu^* \alpha_{\nu r} g_\nu(t) \right) - \sum_{\nu=1}^L h_\nu^* \left(b_0 + \sum_{r=1}^N U_r b_r \right) V_\nu g_\nu(t).$$

Если для каждого $r = \overline{1, N}$ ввести функцию $\varepsilon_r^\zeta(t, L) = \zeta_r(t) - \sum_{\nu=1}^L h_\nu^* \alpha_{\nu r} g_\nu(t)$, то

$$\Delta(t) = \sum_{r=1}^{N_U} U_r \varepsilon_r^\zeta(t, L) - \sum_{\nu=1}^L h_\nu^* \left(b_0 + \sum_{r=1}^N U_r b_r \right) V_\nu^X g_\nu(t).$$

Учитывая условия $M[V_\nu^X] = 0$, $M[(V_\nu^X)^2] = D_\nu^X$, $M[V_\nu^X U_r] = 0$, $\nu = \overline{1, L}$, $r = \overline{1, N}$, получим выражения для математического ожидания ошибки

$$m_\Delta(t) = \sum_{r=1}^{N_U} m_r^U \varepsilon_r^\zeta(t, L), \quad (24)$$

а также ее второго начального момента $\Gamma_\Delta(t)$ и дисперсии $D_\Delta(t)$:

$$\begin{aligned} \Gamma_\Delta(t) = & \sum_{r_1=1}^N \sum_{r_2=1}^N \gamma_{r_1 r_2}^U \varepsilon_{r_1}^\zeta(t, L) \varepsilon_{r_2}^\zeta(t, L) + \\ & + \sum_{\nu=1}^L h_\nu^{L*2} D_\nu^X g_\nu^2(t) \left(b_0^2 + 2 \sum_{r=1}^N b_0 b_r m_r^U + \sum_{r_1=1}^N \sum_{r_2=1}^N \gamma_{r_1 r_2}^U b_{r_1} b_{r_2} \right); \quad (25) \end{aligned}$$

$$D_{\Delta}(t) = \sum_{r_1=1}^N \sum_{r_2=1}^N k_{r_1 r_2}^U \varepsilon_{r_1}^{\zeta}(t, L) \varepsilon_{r_2}^{\zeta}(t, L) + \sum_{\nu=1}^L h_{\nu}^{L*2} D_{\nu}^X g_{\nu}^2(t) \left(b_0^2 + 2 \sum_{r=1}^N b_0 b_r m_r^U + \sum_{r_1=1}^N \sum_{r_2=1}^N \gamma_{r_1 r_2}^U b_{r_1} b_{r_2} \right), \quad (26)$$

где использованы следующие обозначения: $k_{r_1 r_2}^U = \gamma_{r_1 r_2}^U - m_{r_1}^U m_{r_2}^U$.

Таким образом, точность СКО-оптимальной оценки $W^{L*}(t)$ выходного СтП $W(t)$ системы, описываемой уравнениями (1), (2), оценивается математическим ожиданием, вторым начальным моментом, дисперсией ошибки (23), вычисляемыми соответственно по формулам (24)–(26).

6 Вычислительные эксперименты

Найти СКО-оптимальную СтС, предназначенную для воспроизведения сигнала

$$W(t) = U \quad (27)$$

по результатам наблюдения

$$Z(t) = U + (1 + bU)X(t) \quad (28)$$

в течение интервала времени длительностью T , предшествующего данному моменту t ($t \geq T$). Случайная гауссовская помеха $X(t)$ имеет нулевое математическое ожидание и ковариационную функцию $K_X(t_1, t_2) = D_X \exp(-\alpha_X |t_1 - t_2|)$. Случайный параметр U не зависит от случайной помехи $X(t)$, задан нормальным распределением с $M[U] = m_u = \text{const} < \infty$, $M[U^2] = \gamma_u = \text{const} < \infty$, $D_u = \gamma_u - m_u^2$.

Реализации СтП $Z(t)$ и $W(t)$ для $t \in [t_0, t_0 + T]$ принадлежат пространству $\mathcal{L}^2[t_0, t_0 + T]$, в котором задается ортонормированный базис вейвлетов Хаара $\{g_{\nu}(t)\}_{\nu=1}^{\infty}$ [7]. Задав максимальный уровень вейвлет-разрешения J , определим подпространство $E_J \subset \mathcal{L}^2[t_0, t_0 + T]$ с конечным числом базисных вейвлет-функций L . С помощью замены $\bar{t} = (t - t_0)/T$ все вычисления переносятся в $\mathcal{L}^2[0, 1]$ с базисом Хаара:

$$g_1^0(\bar{t}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \bar{t} \in [0, 1], ; \\ 0 & \text{при } \bar{t} \notin [0, 1]; \end{cases}$$

$$g_{\nu}^0(\bar{t}) = \psi_{jk}(\bar{t}) = \begin{cases} \sqrt{2^j} & \text{при } \bar{t} \in \left[\frac{k}{l}, \frac{k+0,5}{l} \right); \\ -\sqrt{2^j} & \text{при } \bar{t} \in \left[\frac{k+0,5}{l}, \frac{k+1}{l} \right]; \\ 0 & \text{при } \bar{t} \notin \left[\frac{k}{l}, \frac{k+1}{l} \right] \end{cases}$$

для $j = \overline{0, J}$; $l = 2^j$; $k = \overline{0, l-1}$; $\nu = l + k + 1$. Обратный переход от $\bar{t} \in [0, 1]$ к $t \in [t_0, t_0 + T]$ осуществляется по формуле $t = t_0 + T\bar{t}$.

Значения вторых начальных моментов $\Gamma^{ZZ}(t_1, t_2)$ и $\Gamma^{WZ}(t_1, t_2)$, согласно (27) и (28), вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \Gamma^{ZZ}(t_1, t_2) &= M[Z(t_1)Z(t_2)] = \gamma_u + (1 + 2bm_u + b^2\gamma_u) K_X(t_1, t_2); \\ \Gamma^{WZ}(t_1, t_2) &= M[W(t_1)Z(t_2)] = \gamma_u. \end{aligned}$$

Для реализации алгоритма 3 разработано инструментальное программное обеспечение в среде MATLAB. Исходные данные: $D_X = 1$; $\alpha_X = 1$; $T = 8$; $t \in [0, 8]$; $m_u = 0$; $D_u = 1$. В алгоритме 2 $\eta_X = 0,8$ [11]. Математическое ожидание ошибки в данном примере равно 0.

Таблица 1 Значения параметров h_{ν}^* , $\nu = \overline{1, L}$, E^{Γ} и D_{Δ} в зависимости от L

L	$h_{\nu}^*, \nu = \overline{1, L}$	E^{Γ}	D_{Δ}
4	$h_1^* = 0,6206$; $h_2^* = h_3^* = h_4^* = 0$	$8,0429 \cdot 10^{-14}$	0,6148
8	$h_1^* = 0,6741$; $h_2^* = -2,2844 \cdot 10^{-19}$; $h_{\nu}^* = 0, \nu = \overline{3, 8}$	$1,3200 \cdot 10^{-11}$	0,5456
16	$h_1^* = 0,6900$; $h_2^* = -1,1107 \cdot 10^{-19}$; $h_3^* = 9,6065 \cdot 10^{-20}$; $h_4^* = 3,7633 \cdot 10^{-21}$; $h_{\nu}^* = 0, \nu = \overline{5, 16}$	$4,6319 \cdot 10^{-11}$	0,5238
32	$h_1^* = 0,6942$; $h_2^* = -2,3678 \cdot 10^{-20}$; $h_3^* = -3,7248 \cdot 10^{-20}$; $h_4^* = 5,2246 \cdot 10^{-20}$; $h_5^* = 1,4976 \cdot 10^{-20}$; $h_6^* = 1,4573 \cdot 10^{-20}$; $h_7^* = 1,5138 \cdot 10^{-20}$; $h_8^* = 1,4162 \cdot 10^{-20}$; $h_{\nu}^* = 0, \nu = \overline{9, 32}$	$6,3315 \cdot 10^{-11}$	0,5180

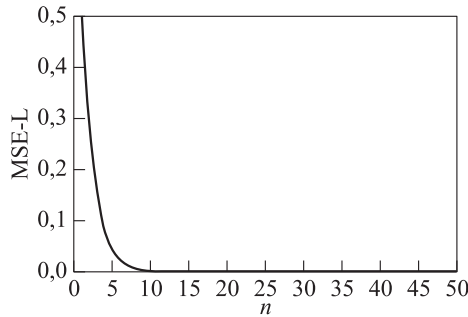


Рис. 4 График функции $E^\Gamma = E^\Gamma(n)$, обозначенной как MSE-L, при $L = 4$

Для $b = 1$ в (28) в ходе вычислительных экспериментов было определено оптимальное значение параметра скорости обучения $\eta = 0,1$ для выполнения алгоритма 1. Начиная с $n = 30$, для $\delta^E = 0,0001$ выполняется условие

$$\left| E^\Gamma(h(n+1)) - E^\Gamma(h(n)) \right| \leq \delta^E.$$

В табл. 1 приведены значения параметров, не зависящих от времени в данном примере, для $n = 50$ и $L = 4, 8, 16$ и 32 , а именно:

- значения параметров h_ν^* , $\nu = \overline{1, L}$, линейного оператора A_t^L , вычисляемых с помощью алгоритма 1;
- значения функции стоимости E^Γ , вычисляемой по формуле (11);
- значения дисперсии ошибки D_Δ , вычисляемой по формуле (26).

На рис. 4 изображен график функции $E^\Gamma = E^\Gamma(n)$, обозначенной как MSE-L, при $L = 4$. На рис. 5 приведены графики реализаций входного сигнала $Z(t)$, требуемого выходного сигнала $W(t)$ и его СКО-оптимальной оценки $W^{L^*}(t)$, обозначенной WE, для $L = 4, 8$ и 32 .

Вычислительные эксперименты для различных значений параметра b в (28) выполнялись только для $L = 8$.

В табл. 2 приведены значения параметров, не зависящих от времени, для $b = 10^2, 10^1, 10^{-1}$ и 10^{-4} , а именно:

- значения параметра скорости обучения η для выполнения алгоритма 1;
- номер n окончания выполнения алгоритма 1;
- значения параметров h_ν^* , $\nu = \overline{1, L}$, линейного оператор A_t^L , вычисляемых с помощью алгоритма 1;
- значения функции стоимости E^Γ , вычисляемой по формуле (11);
- значения дисперсии ошибки D_Δ , вычисляемой по формуле (26).

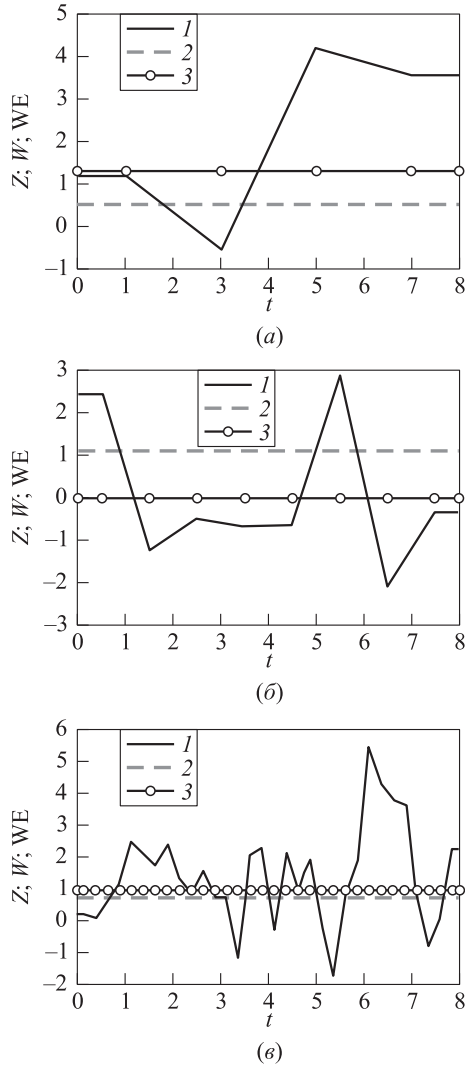


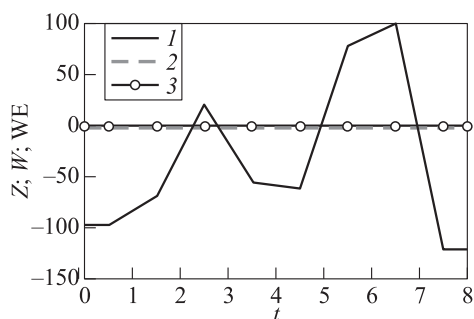
Рис. 5 График входного сигнала $Z(t)$, требуемого сигнала $W(t)$ и его оценки $WE(t)$ для $L = 4$ (а), 8 (б) и 32 (в)

На рис. 6 приведены графики реализаций входного сигнала $Z(t)$, требуемого выходного сигнала $W(t)$ и его СКО-оптимальной оценки $W^{L*}(t)$, обозначенной WE , для $b = 10^2, 10^1, 10^{-1}$ и 10^{-4} .

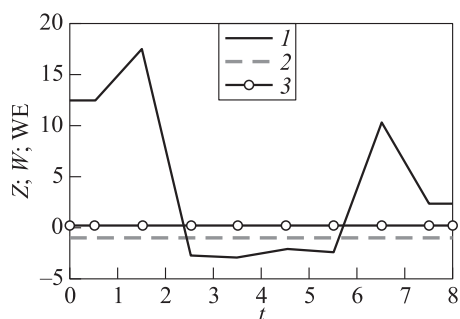
Вычислительные эксперименты подтвердили результаты сравнительного анализа построения СКО-оптимальной оценки выходного СтП линейной СтС на

Таблица 2 Значения параметров h_ν^* , $\nu = \overline{1, 8}$, E^Γ и D_Δ для различных значений b

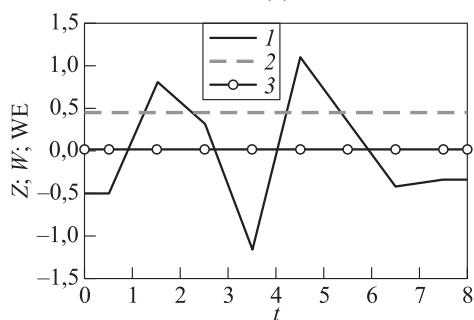
b	η	n	$h_\nu^*, \nu = \overline{1, 8}$	E^Γ	D_Δ
10^2	10^{-8}	50	$h_1^* = 4,1347 \cdot 10^{-4};$ $h_2^* = -1,037 \cdot 10^{-21};$ $h_\nu^* = 0, \nu = \overline{3, 8}$	$6,1630 \cdot 10^{-33}$	1,0
10^1	10^{-3}	50	$h_1^* = 0,0393;$ $h_2^* = -2,2709 \cdot 10^{-20};$ $h_\nu^* = 0, \nu = \overline{3, 8}$	$6,1630 \cdot 10^{-33}$	0,9985
10^{-1}	10^{-1}	50	$h_1^* = 0,8036;$ $h_2^* = 1,8398 \cdot 10^{19};$ $h_\nu^* = 0, \nu = \overline{3, 8}$	$3,4790 \cdot 10^{-8}$	0,3539
10^{-4}	10^{-2}	500	$h_1^* = 0,8050;$ $h_2^* = 8,7604 \cdot 10^{-20};$ $h_\nu^* = 0, \nu = \overline{3, 8}$	$9,2027 \cdot 10^{-11}$	0,3513



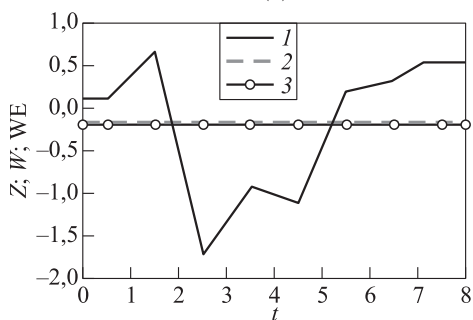
(а)



(б)



(в)



(г)

Рис. 6 График входного сигнала $Z(t)$, требуемого сигнала $W(t)$ и его оценки $WE(t)$ для $b = 10^2$, 10^1 (б), 10^{-1} (в) и 10^{-4} (г)

основе метода КР различных методов [12]. Методическое и программно-алгоритмическое обеспечение на основе ВНС обеспечивает высокую точность при небольшом числе членов ВЛКР по сравнению с рекуррентными алгоритмами построения ВЛКР уже при $L = 4$.

7 Заключение

Для СтП с конечными вероятностными моментами второго порядка разработано методическое и алгоритмическое обеспечение вейвлет-нейросетевого синтеза СКО-оптимальной наблюдаемой скалярной СтС Пугачёва с ПШ на основе теории КМА, ВЛКР и ВНС.

Проведенные вычислительные эксперименты показали высокую точность нейросетевого синтеза по сравнению с алгоритмами на базе рекуррентного синтеза и ВЛКР.

Полученные результаты допускают обобщение на случай многомерной СтС, описываемой линейными уравнениями В. С. Пугачёва с ПШ, и другие виды нелинейных СтС.

Литература

1. Пугачёв В. С. Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления. — М.: Физматгиз, 1962. 884 с.
2. Сеницын И. Н. Канонические представления случайных функций. Теория и применения. — 2-е изд. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2023. 816 с.
3. Xu H., Liu Sh., Zhao Sh., Wang J. Distributed control for a class of nonlinear systems based on distributed high-gain observer // ISA T., 2023. Vol. 138. P. 329–340. doi: 10.1016/j.isatra.2023.03.002. EDN: OQULQW.
4. Venkateswaran S., Kravaris C. Linear unknown input observers for sensor fault estimation in nonlinear systems // IFAC PapersOnLine, 2023. Vol. 56. Iss. 1. P. 61–66. doi: 10.1016/j.ifacol.2023.02.011. EDN: RFPITX.
5. Козачёк О. А., Бобцов А. А. Синтез адаптивного наблюдателя состояния для класса нестационарных билинейных систем в условиях частичной параметрической неопределенности // Изв. вузов. Приборостроение, 2025. Т. 68. № 5. С. 397–405. doi: 10.17586/0021-3454-2025-68-5-397-405. EDN: RPVOZM.
6. Пугачёв В. С. Лекции по функциональному анализу. — М.: МАИ, 1996. 744 с.
7. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / Пер. с англ. — Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 464 с. (Daubechies I. Ten lectures on wavelets. — Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. 352 p.)
8. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс / Пер. с англ. — 2-е изд. — СПб.: Диалектика, 2020. 1104 с. (Haykin S. Neural networks. A comprehensive foundation. — 2nd ed. — Prentice-Hall of India Pvt. Ltd., 1999. 842 p.)
9. Терехов С. А. Вейвлеты и нейронные сети // Научная сессия МИФИ: III Всерос. научн.-техн. конф. «Нейроинформатика»: Лекции по нейроинформатике. — М.: МИФИ, 2001. С. 142–181.

10. Veitch D. Wavelet neural networks and their application in the study of dynamical system // Networks, 2005. Vol. 1. No. 8. P. 313–320.
11. Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д. Моделирование нестационарного стохастического процесса посредством его канонического разложения на основе вейвлет-нейронной сети // Системы и средства информатики, 2024. Т. 34. № 2. С. 21–39. doi: 10.14357/08696527240202. EDN: YFHFJN.
12. Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д. Нейросетевой алгоритм синтеза оптимальной линейной стохастической системы высокой доступности по энергетическому критерию // Системы высокой доступности, 2024. Т. 20. № 4. С. 5–14. doi: 10.18127/j20729472-202404-01. EDN: PRWOPG.

Поступила в редакцию 22.02.2026

Принята к публикации 15.04.2026

WAVELET-NEURAL NETWORK SYNTHESIS OF THE OPTIMAL OBSERVED LINEAR STOCHASTIC PUGACHEV SYSTEM WITH PARAMETRIC NOISES USING THE MEAN-SQUARE CRITERION

I. N. Sinitsyn, V. I. Sinitsyn, E. R. Korepanov, and T. D. Konashenkova

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: Methodological and algorithmical support for wavelet neural network (WNN) synthesis for observable linear scalar Pugachev stochastic system (StS) with parametric noises (PN) and mean square error (MSE) criterion is presented. Input of StS with PN contains useful signal scalar stochastic process (StP) depending upon random vector parameters and PN. Output StP is fixed. Linear operator MSE-optimal StS is derived by approximate solution of operator equation connecting second probability moments of input and needed output using methods of multiscale analysis (MSA) and WNN. Input StP is presented in the form of linear combination of input random variables (RV) by means of wavelet canonical expansions (WLCE). Mean-square optimal estimate of an output StP is also constructed in the form of linear combination of input RV with coefficients defined by operator equation solution. Formulae based on the first and second probability moments for accuracy of MSE estimate are given. Computer experiments confirm advantages of WNN synthesis based on MSA, WLCE, and WNN in comparison with recurrent synthesis based on MSA and WLCE.

Keywords: canonical expansion; mean-square criterion; modeling; optimal estimate; parametric noise; stochastic process; stochastic system; wavelet; wavelet-neural network

DOI: 10.14357/08696527260202

EDN: FADQTM

Acknowledgments

The research was carried out using the infrastructure of the Shared Research Facilities “High Performance Computing and Big Data” (CKP “Informatics” of FRC CSC RAS (Moscow)).

References

1. Pugachev, V. S. 1965. *Theory of random functions and its application to control problems*. Oxford, U.K.: Pergamon Press. 833 p.
2. Sinitsyn, I. N. 2023. *Kanonicheskie predstavleniya sluchaynykh funktsiy. Teoriya i primeneniya* [Canonical expansions of random functions. Theory and applications]. 2nd ed. Moscow: TORUS PRESS. 816 p.
3. Xu, H., Sh. Liu, Sh. Zhao, and J. Wang. 2023. Distributed control for a class of nonlinear systems based on distributed high-gain observer. *ISA T.* 138:329–340. doi: 10.1016/j.isatra.2023.03.002. EDN: OQULQW.
4. Venkateswaran, S., and C. Kravaris. 2023. Linear unknown input observers for sensor fault estimation in nonlinear systems. *IFAC PapersOnLine* 56(1):61–66. doi: 10.1016/j.ifacol.2023.02.011. EDN: RFPITX.
5. Kozachek, O. A., and A. A. Bobtsov. 2025. Sintez adaptivnogo nablyudatelya sostoyaniya dlya klassa nestatsionarnykh bilineynykh sistem v usloviyakh chastichnoy parametricheskoy neopredelennosti [Adaptive state observer synthesis for a class of nonstationary bilinear systems under conditions of partial parametric uncertainty]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie* [J. Instrument Engineering] 68(5):397–405. doi: 10.17586/0021-3454-2025-68-5-397-405. EDN: RPVOZM.
6. Pugachev, V. S., and I. N. Sinitsyn. 1999. *Lectures on functional analysis and applications*. Singapore: World Scientific. 752 p.
7. Daubechies, I. 1992. *Ten lectures on wavelets*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics. 352 p.
8. Haykin, S. 1999. *Neural networks. A comprehensive foundation*. 2nd ed. Prentice-Hall of India Pvt. Ltd. 842 p.
9. Terekhov, S. A. 2001. Veyvlety i neyronnye seti [Wavelets and neural networks]. *Nauchnaya sessiya MIFI: III Vseros. nauchn.-tekhn. konf. “Neyroinformatika”: lektsii po neyroinformatike* [Scientific session MEFhI: 3rd All-Russian Scientific and Technical Conference “Neuroinformatics”: Lectures on neuroinformatics]. Moscow: MIFI. 142–181.
10. Veitch, D. 2005. Wavelet neural networks and their application in the study of dynamical system. *Networks* 1(8):313–320.
11. Sinitsyn, I. N., V. I. Sinitsyn, E. R. Korepanov, and T. D. Konashenkova. 2024. Modelirovanie nestatsionarnogo stokhasticheskogo protsessa posredstvom ego kanonicheskogo razlozheniya na osnove veyvlet-neyronnoy seti [Nonstationary stochastic process modeling by canonical expansion and wavelet neural network]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 34(2):21–39. doi: 10.14357/08696527240202. EDN: YFHFHIN.
12. Sinitsyn, I. N., V. I. Sinitsyn, E. R. Korepanov, and T. D. Konashenkova. 2024. Neyrosetevoy algoritm sinteza optimal’noy lineynoy stokhasticheskoy sistemy vysokoy

dostupnosti po energeticheskomu kriteriyu [Neural network algorithm for the synthesis of an optimal linear stochastic system with high availability according to the energy criterion]. *Sistemy vysokoy dostupnosti* [Highly Available Systems] 20(4):5–14. doi: 10.18127/j20729472-202404-01. EDN: PRWOPG.

Received February 22, 2026

Accepted April 15, 2026

Contributors

Sinitsyn Igor N. (b. 1940) — Doctor of Science in technology, professor, Honored scientist of RF, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; sinitsin@dol.ru

Sinitsyn Vladimir I. (b. 1968) — Doctor of Science in physics and mathematics, principal scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; vsinitsin@frccsc.ru

Korepanov Eduard R. (b. 1966) — Candidate of Science (PhD) in technology, leading scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; ekorepanov@frccsc.ru

Konashenkova Tatyana D. (b. 1964) — Candidate of Science (PhD) in physics and mathematics, scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; tkonashenkova64@mail.ru

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИКО-СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕПЛООБМЕНА ОКЕАНА И АТМОСФЕРЫ*

*А. А. Осипова*¹

Аннотация: Проводится статистический анализ эквивалентности непараметрического и полупараметрического подходов к оцениванию случайных коэффициентов стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Ито, используемого для моделирования турбулентных потоков тепла между океаном и атмосферой. С помощью критерия Уилкоксона–Манна–Уитни полностью сравнение эффективности методов в зависимости от числа групп на этапе дискретизации входных данных. Исследование проведено как на синтетических данных с известными коэффициентами, так и на реальных данных реанализа ERA5 для Северной Атлантики. Установлено, что при увеличении числа групп точность непараметрического метода для коэффициента дрейфа снижается, а для коэффициента диффузии возрастает, в то время как полупараметрический метод демонстрирует высокую стабильность. На основе статистического тестирования с поправкой Холма–Бонферрони на множественную проверку гипотез определено пороговое число групп (порядка 200–250), начиная с которого распределения оценок обоих методов становятся статистически неразличимыми, что подтверждает их практическую эквивалентность для анализа геофизических данных.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение Ито; случайные коэффициенты; EM-алгоритм

DOI: 10.14357/08696527260203

EDN: YAHNFS

1 Введение

Одной из главных задач современной метеорологии, океанографии и климатологии является исследование механизмов взаимодействия тепловых потоков, температуры поверхности моря и приземного атмосферного давления. Анализируя изменчивость и физические характеристики тепловых потоков и их взаимосвязь с другими метеорологическими переменными, можно получить ценную информацию о климатической системе Земли. Эти знания имеют решающее значение для улучшения средне- и долгосрочного прогнозирования погоды, что

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00448, <https://rscf.ru/project/25-21-00448/>.

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, osipova.anastasiya.2020@gmail.com

позволяет более точно предсказывать появление экстремальных событий, таких как тропические ураганы, цунами и т. д. Кроме того, изучение данных процессов помогает оценить масштаб антропогенного воздействия на окружающую среду и понять ключевые факторы, влияющие на климат нашей планеты.

Известно, что на поверхности раздела двух сред — океана и атмосферы — турбулентные потоки тепла имеют высокую волатильность на различных пространственно-временных масштабах [1, 2].

Моделирование приращений потоков тепла с помощью стохастического дифференциального уравнения Ито адекватно описывает динамику потоков в среднесрочной и долгосрочной перспективе и хорошо согласуется с реальными данными. Эта модель имеет ряд преимуществ перед известными численными или стохастическими моделями. Она довольно проста, поскольку форма модели определяется двумя коэффициентами даже в многомерном случае (вектор дрейфа и матрица диффузии). Таким образом, можно количественно оценить поведение изучаемых характеристик, т. е. проанализировать и спрогнозировать их. Несмотря на то что сама по себе модель СДУ не нова, исследование свойств стохастических моделей и по сей день остается, несомненно, одной из актуальных проблем современных статистики и информатики [3, 4]. Известны различные методы оценивания коэффициентов СДУ [5, 6], но для конкретной прикладной области требуется тонкая настройка, которой и посвящена данная статья.

Вероятностные результаты в области природы рассматриваемых данных касаются аппроксимации распределения потоков тепла двухпараметрическим распределением Фишера–Триппета с оценкой его параметров по данным базы реанализа NCEP–NCAR (National Centers for Environmental Prediction / National Center for Atmospheric Research) за период 1948–2008 гг. [7]. В статье [8] изучено статистическое поведение экстремальных характеристик потоков (максимум, минимум) по области за весь период наблюдений в точках одноградусной сетки при различных осреднениях от суточных до годовых, а также средних значений по распределению и медиан. Кроме того, проведена аппроксимация вероятностных распределений для каждого из типов потоков тепла по отдельности и исследованы их совместные распределения. Данная работа продолжает исследования непараметрического и полупараметрического методов оценивания случайных коэффициентов стохастического дифференциального уравнения Ито, описанных ранее в статьях [8–10]. В работе [10] было показано качественное сходство методов, однако оставался открытым вопрос о статистической значимости этого сходства и о влиянии параметров дискретизации данных на точность оценок. Данная работа посвящена детальному анализу этих факторов.

В статье представлены следующие новые результаты:

- статистически исследовано поведение оценок обоих методов при различном числе групп на этапе дискретизации;
- проведено сравнение точности работы методов на синтетических данных при различном числе групп на этапе дискретизации;

- для набора значений разницы работы методов продемонстрирована на данных реанализа о явном и скрытом потоках тепла, а также атмосферного давления на всей области Северной Атлантики;
- проведено статистическое исследование различий распределений получаемых выборок оценок для различного числа групп с помощью критерия Уилкоксона–Манна–Уитни.

Следует отметить, что в данной работе интерес представляет результат сравнения методов в первую очередь применительно к изучаемой предметной области, данные в которой традиционно представляются в формате двумерных географических карт. Поэтому при сравнении методов важна не только абсолютная точность получаемых оценок на синтетических данных, но и естественность и объяснимость оценок с точки зрения геофизики, поэтому рассматриваются также результаты методов на реальных данных, хотя для них и не существует однозначного ответа о поведении коэффициентов уравнения.

В разд. 2 дано описание используемой математической модели, а также сформулирована постановка задачи. Раздел 3 посвящен используемым методам оценивания коэффициентов, а также процедуре дискретизации данных. Описание используемых в исследовании данных реанализа, а также генерации синтетических данных приведено в разд. 4. Подразделы 5.1 и 5.2 посвящены исследованию влияния числа групп на этапе дискретизации на точность работы методов и статистической проверке значимости различий распределений получаемых оценок соответственно. Технические детали реализации методов оценивания и сравнения приведены в подразд. 5.3. В заключении кратко сформулированы основные полученные в статье результаты.

2 Постановка задачи

Рассмотрим СДУ Ито:

$$dX = a(t, X) dt + b(t, X) dW(t). \quad (1)$$

Данная модель обыкновенно используется для описания случайных процессов диффузионного типа, в которых изменчивость самого процесса за малый промежуток времени мала по сравнению с изменчивостью его среднего значения и дисперсии [8]. В данном уравнении через X обозначен рассматриваемый случайный процесс (например, тепловой поток между океаном и атмосферой), $a(t, X)$ и $b(t, X)$ — случайные коэффициенты дрейфа и диффузии, а $dW(t)$ обозначает приращения процесса Винера, представляющие собой гауссовский белый шум.

В статьях [9, 10] было показано, что рассматриваемая модель (1) корректна для используемых данных реанализа в том смысле, что существует такой процесс [11], описываемый уравнением (1), коэффициенты которого могут быть

аппроксимированы специальным образом, показанным в упомянутых статьях, и это уравнение имеет единственное решение.

Для оценивания случайных коэффициентов СДУ Ито (1) могут быть использованы два статистических подхода. Непараметрический метод не требует априорных предположений о виде коэффициентов и обладает доказанной состоятельностью, однако его точность сильно зависит от параметров дискретизации данных, а оценки склонны к высокой дисперсии при малом объеме выборок в группах. Полупараметрический метод, напротив, вводит более гибкую структуру, аппроксимируя распределение приращений конечными нормальными смесями, что позволяет сглаживать локальные флуктуации и повышает устойчивость оценок на ограниченных выборках, но при этом он требует выбора числа компонент смеси и начальных приближений в EM (Expectation-Maximization) алгоритме. Сопоставление этих двух подходов представляет не только прикладной интерес (выбор наиболее подходящего инструмента для анализа геофизических данных), но и позволяет установить, при каких условиях менее строгий в теоретическом плане полупараметрический метод дает результаты, статистически эквивалентные состоятельным оценкам непараметрического подхода.

Рассмотрим случайный процесс X , для которого установлена адекватность модели СДУ Ито (1). Этот процесс характеризуется случайными коэффициентами дрейфа $a(t, X)$ и диффузии $b(t, X)$. Для простоты будем рассматривать одномерный случай, когда оба коэффициента в каждый из моментов времени $t = 1, 2, \dots$ представляют собой одномерные случайные величины. Обозначим оценки коэффициентов a и b , получаемые непараметрическим и полупараметрическим методами в момент времени t , через $a_{np}(t)$, $b_{np}(t)$ и $a_{sp}(t)$, $b_{sp}(t)$ соответственно. Сокращения *np* и *sp* соответствуют английским *nonparametric* и *semiparametric* для непараметрического и полупараметрического методов.

Обозначим число групп на этапе дискретизации данных через N . Будем рассматривать точность оценок, получаемых каждым методом, на синтетических данных (их описание дано в подразд. 4.2) для различного числа групп. Для этого в момент времени t определим среднеквадратичные ошибки каждого метода для двух типов коэффициентов:

$$\begin{aligned} \text{RMSE}_{np}(t, a) &= \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (a(t)[i] - a_{np}(t)[i])^2}{n}}; \\ \text{RMSE}_{np}(t, b) &= \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (b(t)[i] - b_{np}(t)[i])^2}{n}}; \\ \text{RMSE}_{sp}(t, a) &= \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (a(t)[i] - a_{sp}(t)[i])^2}{n}}; \end{aligned}$$

$$\text{RMSE}_{\text{sp}}(t, b) = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n (b(t)[i] - b_{\text{sp}}(t)[i])^2}{n}},$$

где n — число элементов в рассматриваемой выборке процесса в момент времени t (размерность задачи). Например, для данных в формате карты размера 10×10 размерность n будет равна 100.

Проведем также статистическую проверку различий между двумя выборками получаемых оценок для каждого типа коэффициентов с помощью критерия Уилкоксона–Манна–Уитни. Данную операцию можно провести и на реальных геофизических данных, поскольку для теста не нужно знание реального распределения коэффициентов.

Рассмотрим $N = ML$ точек области размера $M \times L = 10 \times 10$, в каждой из которых оценим, будут ли различия в оценках параметров, получаемых двумя исследуемыми методами, статистически значимыми согласно критерию Уилкоксона–Манна–Уитни [12]. Нулевая гипотеза критерия в используемой реализации заключается в том, что данные выборки имеют различные распределения. Зафиксируем уровень значимости $\alpha = 0,05$ и посчитаем число точек, в которых полученное критерием p -значение оказалось достаточно мало, чтобы при заданном уровне значимости можно было отвергнуть рассматриваемую гипотезу, т. е. предположить, что распределения совпадают. Рассматривается отношение result полученного числа точек, в которых принято решение отвергнуть гипотезу, к общему числу рассматриваемых точек N :

$$\text{result} = \frac{\#i : p_i < \alpha}{N}.$$

Иными словами, рассматривается предположение о том, что во всех рассматриваемых точках распределения оценок достаточно близки, чтобы с заданным уровнем значимости можно было сказать, что результаты работы методов близки.

3 Методология

3.1 Дискретизация данных

До непосредственной работы методов оценивания коэффициентов требуется предварительно перейти от формально бесконечного множества возможных значений процесса к конечному множеству. Для этого проводится следующее предварительное действие — дискретизация данных. Независимо для каждого элемента рассматриваемого процесса ($X(t)$ в одномерном случае либо пары ($X_1(t), X_2(t)$) в двумерном случае) за некоторый период времени рассматриваются все известные значения процесса. Выбирая N точек (например, $N = 1000$) $\{p_1, \dots, p_N\}$, разделяющих отрезок $[0, 1]$ на части одинаковой длины, для каждого p_i по рассматриваемой выборке находим квантиль соответствующего порядка.

Обозначим их q_i , $i = \overline{1, N}$. Затем каждое значение процесса (для двумерного операция проводится независимо для обоих компонент), попавшее в интервал $[q_i, q_{i+1}]$, заменяется величиной $(q_i + q_{i+1})/2$. В дальнейшем будем называть интервалы $[q_i, q_{i+1}]$ *группами*. Данное разбиение данных с точки зрения статистики похоже на процесс приближения абсолютно непрерывной случайной величины дискретной.

3.2 Непараметрический метод

Особенность данного метода заключается в возможности его работы при отсутствии какой-либо априорной информации о форме коэффициентов дрейфа и диффузии. Для построения оценок случайных функций $a(t, x)$ и $b(t, x)$ в момент времени t непараметрическим методом необходимо оценить переходные вероятности процесса между моментами времени t и $t + 1$:

$$p_{ij} = \frac{\#\{X(t) = X_i, X(t+1) = X_j\}}{\#\{X(t) = X_i\}}.$$

Здесь символ $\#$ обозначает число элементов в соответствующем множестве, $j = \overline{1, N}$, $i \in \{1, \dots, N\} : \#\{X(t) = X_i\} > 0$. Очевидно, что при этом для i , соответствующих непустому набору в момент времени t , $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$.

Оценки для коэффициента переноса $a(t, x)$ в момент времени $t \in [0, T - 1]$ строятся следующим образом:

$$a_{x_i} = \sum_{j=1}^N (x_i - y) p_{ij}, \quad x_i, y \in \{X_1, \dots, X_N\},$$

где p_{ij} — полученные оценки переходных вероятностей.

Оценки квадрата коэффициента диффузии строятся аналогичным образом:

$$b_{k,l,i} = \sum_{j=1}^N (x_{k,i} - y_l)^2 p_{ij},$$

где $k = 1, 2$ и $l = 1, 2$ — два индекса, соответствующих первому и второму элементу пары в момент времени t и $t + 1$ соответственно.

3.3 Полупараметрический метод

Известно [11], что для СДУ Ито (1) с неслучайными коэффициентами при дополнительных предположениях об измеримости процесса в отношении естественной фильтрации и нормальности распределения начального значения решение имеет вид некоторого гауссовского процесса с заданным средним и ковариационной функцией. В этой ситуации приращения процесса также оказываются гауссовскими случайными величинами. Однако, если каждый параметр является случайным, естественным образом возникают распределения

вида $\mathbb{E}\Phi((x - A)/B)$, т. е. дисперсионно-сдвиговые смеси нормальных законов. Метод был назван полупараметрическим, поскольку он сочетает параметрическую аппроксимацию распределения приращений конечной нормальной смесью с непараметрическим усреднением по группам, что позволяет избежать жесткой параметризации всего процесса.

Итак, полупараметрический статистический метод основывается на реконструкции распределений неизвестных случайных коэффициентов дрейфа и диффузии и подразумевает, что процесс оценки выполняется с использованием разделения сдвиг-масштабных конечных смесей нормальных законов. Для этого в исходном временном ряду выделяется окно, наблюдения внутри которого рассматриваются как однородная выборка. Теоретическое распределение этих наблюдений представляет собой нормальную смесь по шкале сдвига. Для математической корректности задачи непрерывные нормальные смеси аппроксимируются конечными нормальными смесями, которые считаются идентифицируемыми [13].

Аппроксимация процесса $X(t)$ конечными нормальными смесями выглядит следующим образом [13]:

$$\mathbb{P}(X(t_i) - X(t_{i-1}) < x) \approx \sum_{k=1}^K p_k \Phi\left(\frac{x - a_k}{b_k}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона, $K \in \mathbb{N}$, $p_k \geq 0$, $k = \overline{1, K}$, $\sum_{k=1}^K p_k = 1$.

Для статистической оценки параметров p_k , a_k и b_k можно использовать метод скользящего разделения смесей (например, на основе EM-алгоритма [14]). На основе гистограмм выборок данных, попадающих в одну группу, было принято решение использовать двухкомпонентные смеси. Начальные приближения выбираются случайным образом. Эмпирическим способом число «холодных стартов» EM-алгоритма со случайным начальным приближением было выбрано равным 5.

Для каждого набора точек, которые попадают в одну и ту же группу во время дискретизации (см. подразд. 3.1) значений процесса $X(t)$, могут быть получены оценки среднего значения и дисперсии аппроксимирующей смеси, соответствующие желаемым оценкам коэффициентов $a(t, X)$ и $b(t, X)$.

Итак, оценки случайных коэффициентов СДУ Ито (1) $a(t, X)$ и $b(t, X)$ полупараметрическим методом в момент времени t в точках с координатами $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)$ задаются формулами:

$$\hat{a}(t, i_m, j_m) = \sum_{i=1}^N w_i a_i; \quad \hat{b}^2(t, i_m, j_m) = \sum_{i=1}^N w_i (a_i^2 + \sigma_i^2).$$

В отличие от непараметрического полупараметрический метод ориентирован на работу с данными конечного размера, поэтому классическая асимптотическая

теория в данном случае не применима по конструктивным причинам. В рамках эмпирического тестирования далее будем пытаться установить статистическую эквивалентность полупараметрического подхода с классическим непараметрическим, для которого, в свою очередь, доказана состоятельность получаемых оценок [6, 10].

4 Тестовые данные

4.1 Данные реанализа

В качестве реальных данных используются данные реанализа базы ERA5 [15] о явном и скрытом потоках тепла, а также приземного атмосферного давления в области Северной Атлантики (рис. 1) за период с 1 января 1979 г. по 31 декабря 2024 г. Данные сосредоточены в узлах равномерной сетки с шагом в $0,5^\circ$, покрывающей область Северной Атлантики. Границы сетки по широте составляют от -90° до 0° , а по долготе — от 0° до 80° . Шаг измерений по времени составляет 24 ч, на одни сутки приходится 1 измерение, полученное усреднением четырех измерений за сутки: в полночь, 06 : 00, 12 : 00 и 18 : 00.

На рис. 1 представлен пример визуализации данных пары явного и скрытого потоков тепла с суточным усреднением: график на рис. 1, *a* соответствует явным,

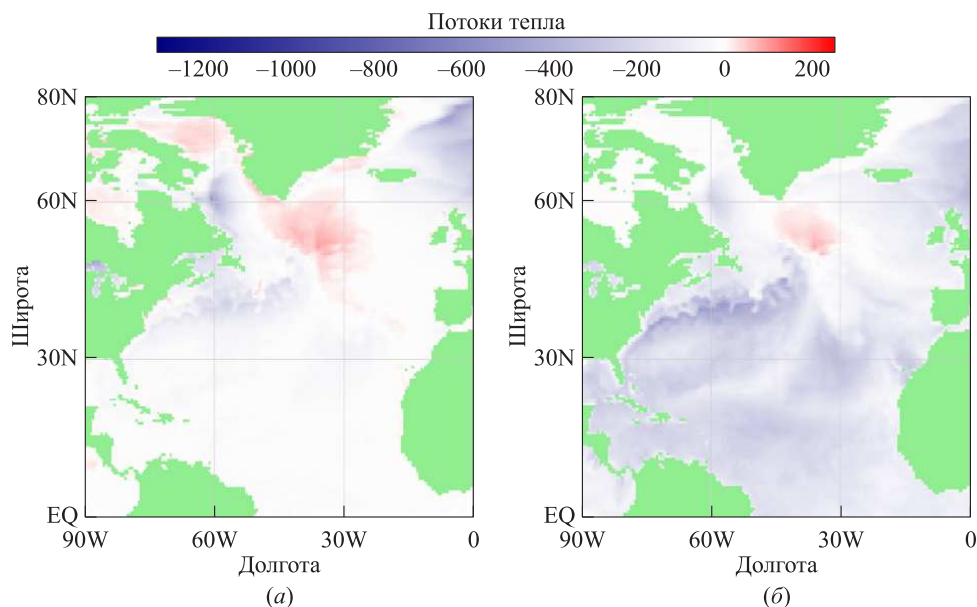


Рис. 1 Пример используемых данных реанализа: (а) явный поток; (б) скрытый поток

а на рис. 1, б — скрытым потокам тепла. Цветовая шкала меняется от синего (при отрицательных значениях потоков) до белого (при значениях, близких к нулю) и далее до красного (при положительных значениях). Яркость цвета в конкретной точке соответствует удаленности значения от нуля. Темно-зеленым цветом обозначены участки суши. В качестве подобласти размера 10×10 точек в следующих разделах используется область с координатами от -50° до -45° широты и от 40° до 45° долготы.

4.2 Синтетические данные

Для оценки точности работы методов необходимо в явном виде знать значения коэффициентов дрейфа и диффузии. Для этого необходимо смоделировать синтетические данные. Желательно к тому же, чтобы они не были тривиальными и обладали похожими на встречающиеся в физике коэффициенты для получения эталонных данных, исключающих влияние климатических факторов на методы оценивания параметров.

В качестве модельного распределения используется реализация процесса, соответствующего уравнению Ито (1), с использованием заданных функций $a(t, X)$ и $b(t, X)$ тригонометрического вида, которые обеспечивают явный вид решения:

$$a(t, X) = \sum_{k=1}^M p_k \cos(\omega_k t) \alpha X_{t-1}; \quad b(t, X) = \sum_{k=1}^M p_k \cos(\omega_k t) \beta X_{t-1},$$

где ω_k — частоты M рассматриваемых гармоник; p_k — их веса, для которых выполняется ограничение $\sum_{k=1}^M p_k = 1$.

Для генерации данных, аналогичных формату географической карты, для проверки работоспособности алгоритмов берутся несколько гармоник с соответствующими весами. Веса подбираются таким образом, чтобы их комбинация не сводилась к тривиальной и их число не совпадало с количеством компонентов смеси, которой затем аппроксимируются данные. В частности, число гармоник и их веса были положены равными $M = 6$, $p = \{0,35; 0,2; 0,1; 0,1; 0,1; 0,05\}$; коэффициенты α и β и набор частот подобраны таким образом, чтобы затухание процесса (схождение траекторий к нулю с течением времени) происходило не слишком быстро и в то же время различные компоненты не совпадали по фазе так часто, что позволяло бы им быть выделяемыми. В результате был выбран следующий набор параметров:

$$\alpha = -0,1, \quad \beta = 0,001, \quad \omega = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, 2\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{7}, \frac{4\pi}{3} \right\},$$

$$p = \{0,35; 0,2; 0,1; 0,1; 0,1; 0,05\}.$$

Эти данные отличаются от используемых в статье [10], во-первых, увеличением числа генерируемых компонент, а во-вторых, значениями коэффициентов, чтобы обеспечить более плавное изменение значений между двумя подряд идущими моментами времени, что более соответствует поведению реальных геофизических данных.

Обозначим значение случайного процесса X в момент времени t в точке с координатами (i, j) как $X_t[i, j]$ и зададим начальные значения (в момент времени $t = 0$) в каждой точке карты как реализацию случайной величины с нормальным распределением с параметрами $(1, 1)$:

$$X_0[i, j] \sim N(1, 1) \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Тогда значения процесса в следующие моменты времени $t > 0$ могут быть вычислены с использованием следующей рекуррентной формулы:

$$X_t[i, j] = X_{t-1}[i, j] + a_{t-1}[i, j] + b_{t-1}[i, j]\Delta W_t,$$

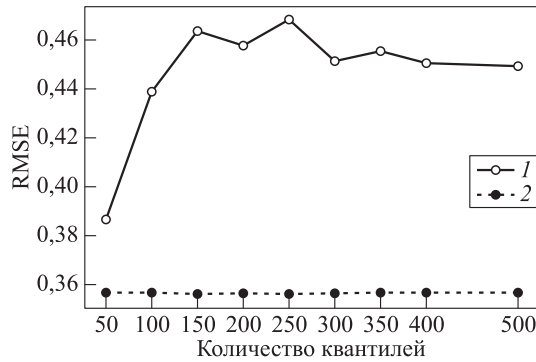
где $\Delta W_t \sim N(0, 1)$ обозначает последовательность приращений винеровского процесса.

5 Результаты

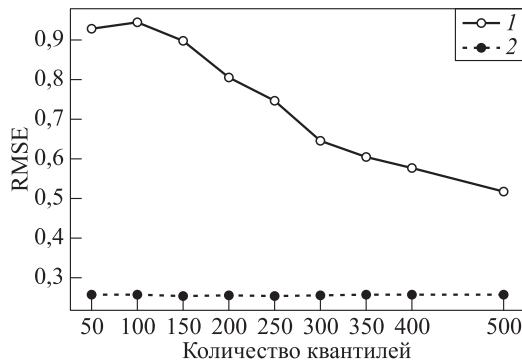
5.1 Влияние числа групп в дискретизации на точность методов

Рассмотрим различия в точности оценок, получаемых обоими методами, при изменении числа групп на этапе дискретизации. Очевидно, что при уменьшении числа групп N растет количество значений, попадающих в одну группу, а значит, и число точек, используемых для оценивания переходных вероятностей в непараметрическом методе, или ширина окна в каждой группе, подающегося на вход EM-алгоритму в полупараметрическом методе. На рис. 2 показаны значения среднеквадратичных ошибок методов для коэффициентов a и b при использовании синтетических данных. Можно заметить, что при всех рассматриваемых значениях числа групп полупараметрический метод показывает лучшие результаты. Стоит отметить, что его точность также изменяется, но на меньшем масштабе, чем у непараметрического метода, из-за чего при одновременном отображении на одном рисунке его ошибки визуально близки к прямой линии. На рис. 3 показано поведение ошибок только для полупараметрического метода для коэффициента a , для коэффициента b ошибки этого метода имеют аналогичное поведение и форму кривой в отличие от непараметрического метода.

Можно сделать вывод о том, что для непараметрического метода характерно увеличение среднеквадратичной ошибки при росте числа групп для коэффициента a , но при этом уменьшение ошибки для коэффициента b ; следовательно, выбор оптимального числа групп зависит от поставленной задачи — нужно ли



(а)



(б)

Рис. 2 Величины ошибок в терминах метрики RMSE непараметрического (1) и полупараметрического (2) методов на синтетических данных при оценивании коэффициентов a (а) и b (б)

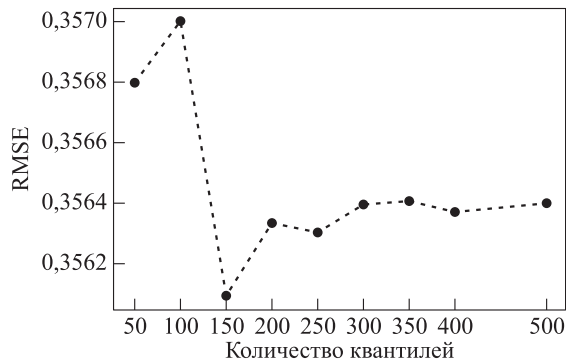


Рис. 3 Величины ошибок в терминах метрики RMSE полупараметрического метода на синтетических данных при оценивании коэффициента a

точнее оценить один из коэффициентов, или можно провести оценку дважды на одних и тех же данных с разным числом групп для двух коэффициентов.

На рис. 4–6 приведены сравнения результатов оценок коэффициентов a и b двумя методами при использовании 50 групп на этапе дискретизации. На рис. 4 и 5 показаны получаемые оценки для явного и скрытого потоков тепла соответственно. Для обоих типов потока можно наблюдать более высокие по

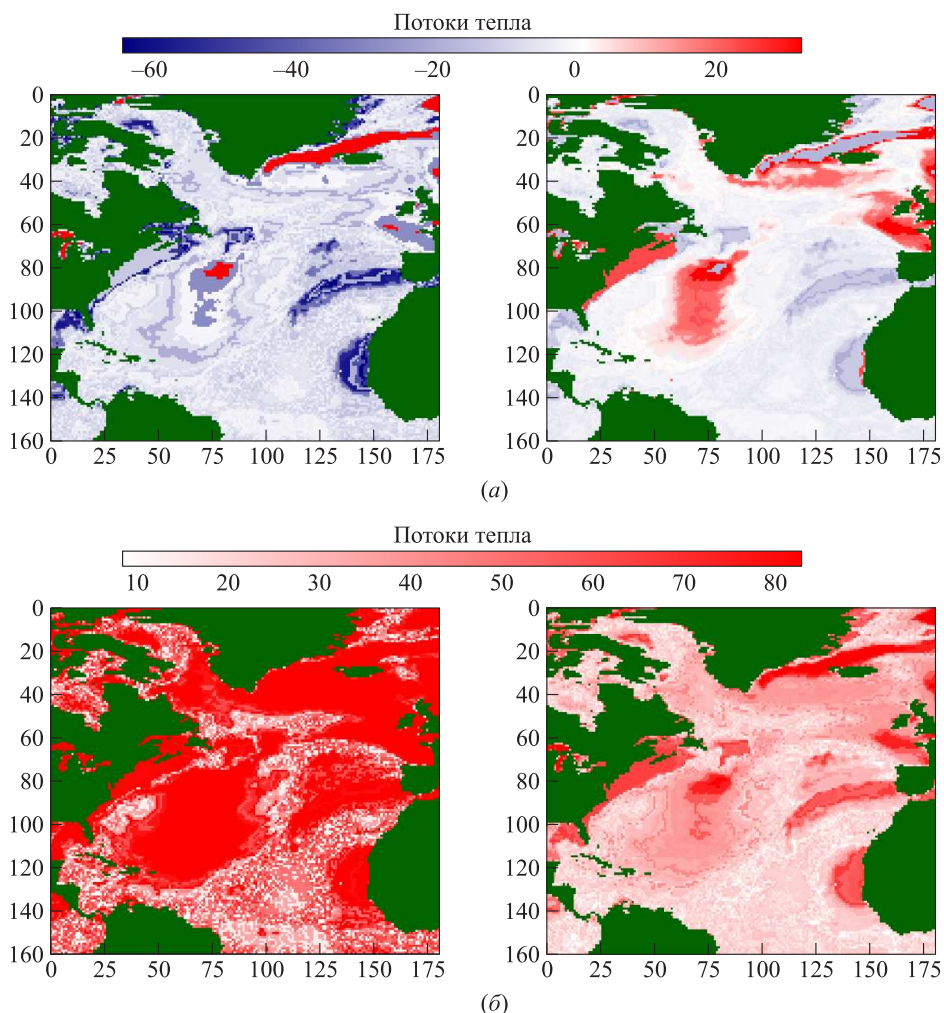


Рис. 4 Отличия оценок непараметрического (левый столбец) и полупараметрического (правый столбец) методов для явного потока тепла при использовании 50 групп для коэффициентов a (а) и b (б)

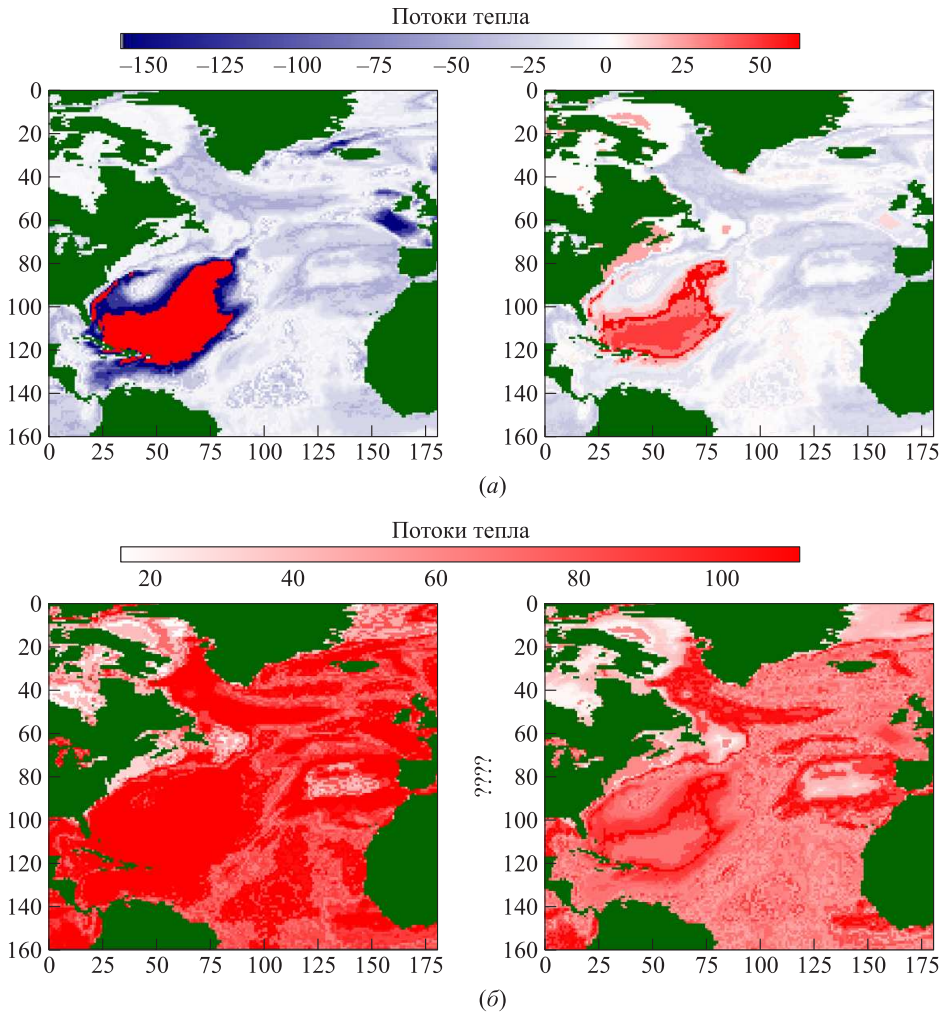


Рис. 5 Отличия оценок непараметрического (левый столбец) и полупараметрического (правый столбец) методов для скрытого потока тепла при использовании 50 групп для коэффициентов a (a) и b (б)

модулю значения вдоль Гольфстрима и других течений системы Атлантической меридиональной опрокидывающей циркуляции, что соответствует их физической природе [16].

Рисунок 6 демонстрирует различия для данных атмосферного давления. На рис. 6 для обоих коэффициентов видны кольцевые структуры, которые выражают крупномасштабную динамику атмосферы (циклоны), связанную с тепловыми потоками. Видно, что оценки, получаемые непараметрическим методом, имеют

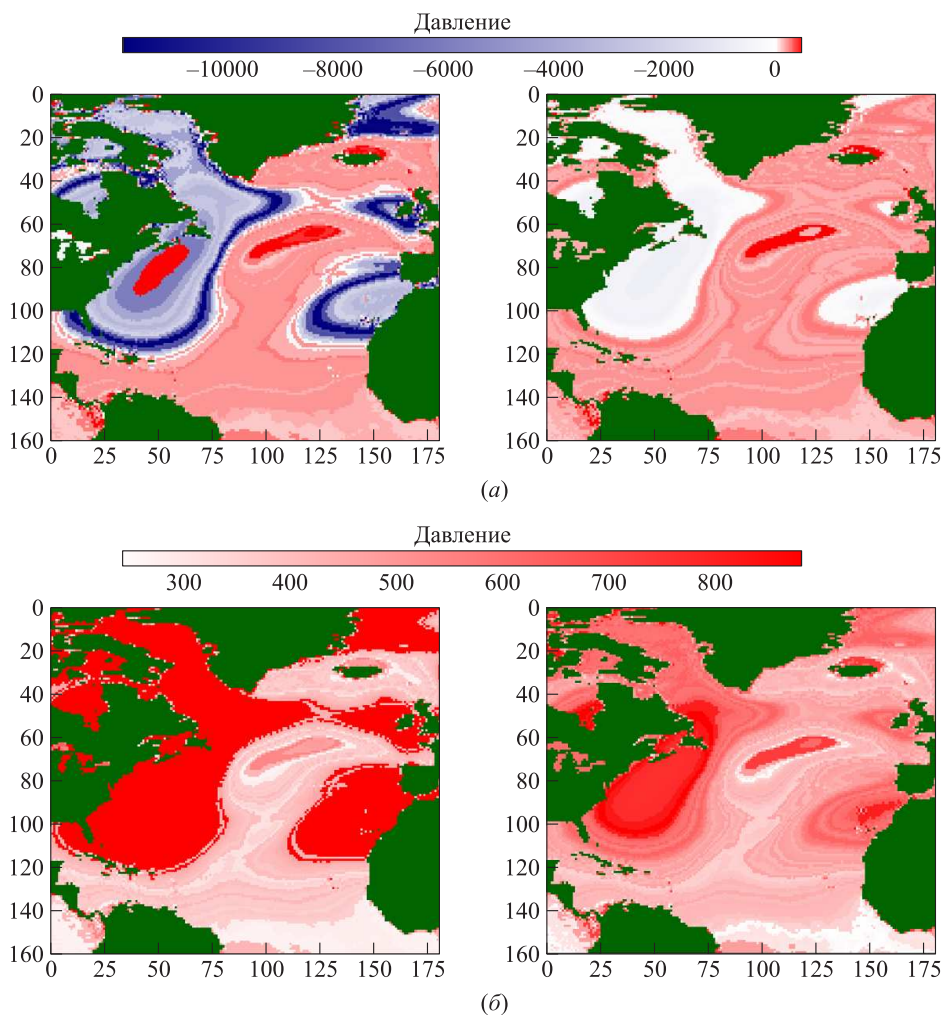


Рис. 6 Отличия оценок методов непараметрического (левый столбец) и полупараметрического (правый столбец) методов для давления при использовании 50 групп для коэффициентов a (а) и b (б)

более яркие цвета (а значит, более удаленные по модулю от нуля значения), чем аналогичные оценки полупараметрическим методом. Также для непараметрического метода характерны более резкие переходы между соседними областями, чем для полупараметрического метода. Из этого можно сделать вывод о том, что оценки, получаемые непараметрическим методом, более грубые и, вероятно, находятся дальше от реальных значений, чем оценки полупараметрического метода, так как данные самих потоков и давления имеют более плавные переходы,

а коэффициент a имеет физический смысл тренда потока. Данный вывод согласуется с полученными выше результатами для искусственно сгенерированных данных.

Непараметрический метод оценивает переходные вероятности p_{ij} непосредственно по эмпирическим частотам попадания значений в дискретные ячейки (группы). Эта оценка оказывается кусочно-постоянной: для каждой ячейки X_i в момент времени t строится своя гистограмма переходов, и значения коэффициентов a и b получаются путем усреднения по этой гистограмме. Такой подход чувствителен к локальным флуктуациям данных и может приводить к резким скачкам оценок на границах ячеек, особенно при малом числе наблюдений в ячейке, что визуально проявляется как «шум» и «резкие переходы» на картах (более яркие, контрастные цвета на рис. 4–6).

В отличие от этого, полупараметрический метод сначала аппроксимирует распределение приращений процесса внутри каждой ячейки с помощью конечной нормальной смеси. Процедура оценивания параметров смеси (например, EM-алгоритм) и последующего взвешенного усреднения для получения итоговых оценок a и b по своей сути оказывается сглаживающей. Она не просто считает частоты, а подбирает гладкую параметрическую форму (сумму гауссиан) для описания данных внутри ячейки. Это позволяет распространить информацию от соседних точек, что приводит к более устойчивым и, как следствие, более гладким оценкам коэффициентов. По сути, полупараметрический метод вводит дополнительную регуляризацию через параметрическую форму смеси, что делает его менее чувствительным к выбросам и локальным шумам, чем чистый непараметрический частотный подход.

Для объективной оценки сходства получаемых карт при различных значениях N была использована метрика структурного сходства SSIM (structural similarity index measure) [17], часто используемая для оценки близости изображений. В табл. 1 приведены полученные значения SSIM. Метрика принимает значения от 0 до 1, где большее значение означает большую близость изображений, 1 метрика выдает на совпадающих изображениях. По значениям в табл. 1 видно, что метрика возрастает для обоих коэффициентов и всех данных при росте

Таблица 1 Значения метрики SSIM для оценок коэффициентов a и b для данных реанализа

Группы	Явный поток		Скрытый поток		Давление	
	a	b	a	b	a	b
50	0,415	0,441	0,618	0,635	0,655	0,496
100	0,479	0,503	0,667	0,651	0,716	0,601
150	0,630	0,570	0,669	0,615	0,739	0,645
200	0,716	0,583	0,717	0,651	0,947	0,743
250	0,762	0,599	0,750	0,661	0,994	0,752
300	0,777	0,634	0,773	0,655	0,981	0,888
350	0,771	0,628	0,806	0,685	0,994	0,954

числа групп, но если при переходе от 50 к 100 группам наблюдается резкий рост (особенно заметен для давления), то с каждым дальнейшим шагом он замедляется, а на последнем шаге для явного потока даже слегка ухудшается. Для значения 50 метрика SSIM показывает, что изображения существенно отличаются. Для числа же групп от 250, особенно для коэффициента a , можно утверждать, что результирующие карты достаточно похожи ($SSIM \geq 0,750$). Для коэффициента b значения метрики стабильно ниже, что согласуется с остальными результатами — оценки коэффициента диффузии двух методов менее близки, чем коэффициента дрейфа.

Отдельно стоит упомянуть, что при расчете этой метрики на реальных географических картах на изображениях будут гарантированно совпадать области суши, которые заданы нулями при расчете, и это отдалит минимальную возможную SSIM для карт от нуля даже при совершенно разных значениях водной части, представляющей интерес. Аналогично стоит заметить, что для синтетических данных расчет SSIM не имеет смысла, поскольку точки в синтетических данных не связаны между собой и не оказывают влияния друг на друга, а также не образуют связанные области, как Гольфстрим для тепловых потоков или круги циклонов для давления.

5.2 Статистическая проверка различий методов

Проверим, будут ли результаты, получаемые обоими методами при различных значениях числа групп на этапе дискретизации, статистически значимыми. На рис. 7 представлена блок-схема описанного алгоритма.

При одновременной проверке гипотезы о различии распределений в $N = 100$ точках области возникает проблема множественных сравнений. При использовании стандартного уровня значимости $\alpha = 0,05$ для каждого теста по отдельности в случае полной эквивалентности методов можно ожидать, что в среднем $100 \times 0,05 = 5$ точек будут ошибочно показаны как «значимо различные» просто из-за случайности, что приведет к пороговому значению отношения `result`, которое по аналогии тоже сравнивается со значением 0,05. Чтобы исключить эти ложные срабатывания и обеспечить достоверность выводов в целом по всей области, необходима коррекция уровня значимости. Применим к полученным результатам поправку Холма–Бонферрони перед расчетом отношения `result` к вектору получаемых p -значений для каждого конкретного набора данных и числа групп. Данная процедура представляет собой модификацию классической поправки Бонферрони, но обладает большей мощностью, так как корректирует уровни значимости последовательно, от наименьшего p -значения к наибольшему. В табл. 2 показаны полученные результаты с учетом поправки.

Можно заметить, что, начиная с некоторого числа групп разбиения (различного для разных типов данных), получаемые обоими методами векторы оценок становятся достаточно близкими. Жирным шрифтом в табл. 2 выделены значения отношения `result`, не превышающие 0,05. Число групп меньше 50 и более 350 не

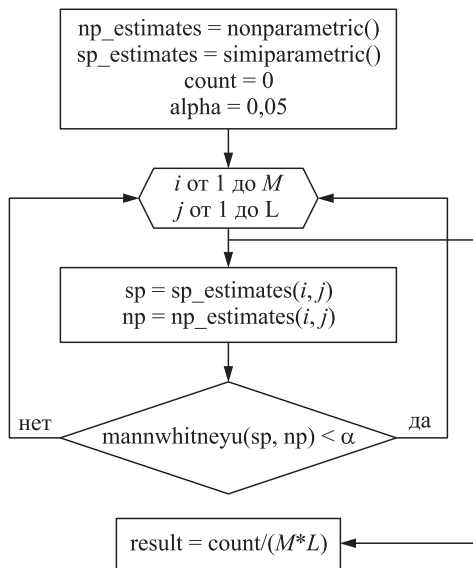


Рис. 7 Блок-схема алгоритма подсчета отношения result

Таблица 2 Значения отношения result для оценок коэффициентов a и b для различных данных после применения поправки Холма–Бонферрони

Группы	Синтетика		Явный поток		Скрытый поток		Давление	
	a	b	a	b	a	b	a	b
50	0,06	0,77	0,89	1,00	0,00	1,00	0,12	1,00
100	0,04	0,93	0,08	0,05	0,00	0,00	0,00	0,80
150	0,03	0,89	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
200	0,02	0,52	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
250	0,01	0,38	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
300	0,01	0,24	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
350	0,00	0,31	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

рассматривалось, так как в обоих случаях нарушается логика работы каждого из методов: в группе оказывается либо слишком большое, либо слишком малое число элементов, что приводит к излишнему усреднению результатов по области или к невозможности адекватно применить алгоритмы следующих шагов на слишком маленьких выборках соответственно.

5.3 Техническая реализация

Расчеты оценок коэффициентов a и b выполнялись на высокопроизводительном кластере в индивидуальной вычислительной среде на основе техноло-

гии виртуальной контейнеризации Docker. После выполнения всех расчетов для рассматриваемых величин на локальной машине были отрисованы графики в формате карт с последующей сборкой в видеофайлы формата mp4 продолжительностью около часа каждое. Программная реализация была выполнена на языке Python 3.7 с использованием библиотек Matplotlib, NumPy, Pandas, SciPy, Skimage, Seaborn, Xarray (для чтения grib-файлов) и др. Полный программный код доступен в Github-репозитории https://github.com/Alandriya/Ocean_components.

Исходные данные измерений явного и скрытого потока представляли собой 2 файла формата grib из открытой базы ERA5¹, каждый из которых содержал в себе ежедневные измерения с шагом в 6 ч за период 01.01.1979–31.12.2025 на сетке с шагом в $0,5^\circ$ со значениями широты в пределах $[-90, 0]$ и долготы в интервале $[0^\circ, 80^\circ]$. Для расчета коэффициентов данные были перегруппированы в numpy-массивы по десятилетиям (1979–1989 гг., 1989–1999 гг., 1999–2009 гг., 2009–2019 гг. и 2019–2025 гг.) с уменьшением размерности сетки до 1° . Затем для выполнения расчетов с шагом в 1 день данные были усреднены по 4 подряд идущих измерения за каждый день. Благодаря свойствам марковости рассматриваемых процессов стало возможно реализовать параллельный расчет на нескольких процессах-нити с последующей сборкой результатов и обработкой границ интервалов родительским процессом, где параллелизм выполнялся по координате времени.

6 Заключение

Данная работа продолжает исследование непараметрического и полупараметрического методов оценивания случайных коэффициентов СДУ Ито (1). В статье анализируется влияние числа групп на этапе дискретизации данных на итоговую точность оценок, а также приводятся результаты применения статистического критерия Уилкоксона–Манна–Уитни для проверки гипотезы о различии их распределений. Дополнительно выполнен расчет отношения result с предварительной корректировкой вектора р-значений с помощью поправки Холма–Бонферрони, что позволило устранить эффект множественных сравнений.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что начиная с некоторого числа групп результаты обоих методов становятся достаточно статистически близки, чтобы можно было использовать любой из методов для получения оценок. Это свидетельствует об идентичном характере поведения получаемых оценок, что открывает возможности для переноса свойств, доказанных для одного из методов, на другой при выполнении определенных условий на минимальное число групп, используемых на этапе дискретизации данных.

Дальнейшим направлением исследований представляется выявление явного вида зависимостей коэффициентов a и b от процесса X для рассматриваемого

¹<https://www.ecmwf.int/en/forecasts/datasets/reanalysis-datasets/era5>.

типа данных. Это позволит выписать решение соответствующего СДУ Ито (1) уравнения Фоккера–Планка с целью получения в явном виде стационарного распределения исследуемого процесса.

Литература

1. *Tian F., von Storch J. S., Hertwig E.* Air–sea fluxes in a climate model using hourly coupling between the atmospheric and the oceanic components // *Clim. Dynam.*, 2017. Vol. 48. Iss. 9–10. P. 2819–2836. doi: 10.1007/s00382-016-3228-y.
2. *Small R. J., Bryan F. O., Bishop S. P., Tomas R. A.* Air–sea turbulent heat fluxes in climate models and observational analyses: What drives their variability? // *J. Climate*, 2019. Vol. 32. Iss. 8. P. 2397–2421. doi: 10.1175/JCLI-D-18-0576.1.
3. *Синицын И. Н.* Методы вероятностного и статистического моделирования неявных стохастических систем // *Системы и средства информатики*, 2024. Т. 34. Вып. 3. С. 48–66. doi: 10.14357/08696527240305. EDN: RTNRUZ.
4. *Синицын И. Н., Синицын В. И., Корепанов Э. Р., Конашенкова Т. Д.* Алгоритм моделирования векторного стохастического процесса посредством его канонического разложения на основе многослойной вейвлет-нейронной сети // *Системы и средства информатики*, 2025. Т. 35. Вып. 2. С. 17–30. doi: 10.14357/08696527250202. EDN: TFDTXJ.
5. *Nielsen J. N., Madsen H., Young P. C.* Parameter estimation in stochastic differential equations: an overview // *Annu. Rev. Control*, 2000. Vol. 24. P. 83–94. doi: 10.1016/S1367-5788(00)90017-8.
6. *Ella-Mintsa E.* Nonparametric estimation of the diffusion coefficient from i.i.d. S.D.E. paths // *Statistical Inference Stochastic Processes*, 2024. Vol. 27. Iss. 3. P. 585–640. doi: 10.1007/s11203-024-09310-9.
7. *Gulev S. K., Belyaev K. P.* Probability distribution characteristics for surface air–sea turbulent heat fluxes over the global ocean // *J. Climate*, 2012. Vol. 25. Iss. 1. P. 184–206. doi: 10.1175/2011JCLI4211.1.
8. *Беляев К. П., Горшенин А. К., Королев В. Ю., Плеханов А. Д.* Статистический анализ внутри- и межгодовой изменчивости экстремальных значений явных и скрытых потоков тепла в Северной Атлантике за 1979–2021 гг. // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*, 2022. Т. 58. Вып. 6. С. 720–736. doi: 10.31857/S0002351522060049. EDN: CCHYME.
9. *Gorshenin A. K., Osipova A. A., Belyaev K. P.* Stochastic analysis of air–sea heat fluxes variability in the North Atlantic in 1979–2022 based on reanalysis data // *Comput. Geosci.*, 2023. Vol. 181. Art. 105461. 16 p. doi: 10.1016/j.cageo.2023.105461. EDN: FTOTNM.
10. *Belyaev K., Gorshenin A., Korolev V., Osipova A.* Comparison of statistical approaches for reconstructing random coefficients in the problem of stochastic modeling of air–sea heat flux increments // *Mathematics*, 2024. Vol. 12. Iss. 2. Art. 288. 21 p. doi: 10.3390/math12020288. EDN: OEMJJSN.
11. *Гухман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977. 568 с.

12. *MacFarland T. W., Yates J. M* Mann–Whitney U test // Introduction to non-parametric statistics for the biological sciences using R. — Cham: Springer, 2016. P. 103–132. doi: 10.1007/978-3-319-30634-6_4.
13. *Королев В. Ю.* Вероятностно-статистические методы декомпозиции волатильности хаотических процессов. — М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2011. 512 с. EDN: RBBHRB.
14. *McLachlan G. J., Krishnan T.* The EM algorithm and extensions. — Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2007. 368 p.
15. *Hersbach H., Bell B., Berrisford P., et al.* The ERA5 global reanalysis // Q. J. Roy. Meteor. Soc., 2020. Vol. 146. Iss. 730. P. 1999–2049. doi: 10.1175/2011JCLI4002.1.
16. *Mahajan S., Zhang R., Delworth T. L.* Impact of the Atlantic meridional overturning circulation (AMOC) on Arctic surface air temperature and sea ice variability // J. Climate, 2011. Vol. 24. Iss. 24. P. 6573–6581. doi: 10.1175/2011JCLI4002.1.
17. *Wang Z., Bovik A. C., Sheikh H. R., Simoncelli E. P.* Image quality assessment: From error visibility to structural similarity // IEEE T. Image Process., 2004. Vol. 13. Iss. 4. P. 600–612. doi: 10.1109/TIP.2003.819861.

Поступила в редакцию 02.03.2026

Принята к публикации 15.04.2026

STATISTICAL ANALYSIS OF THE EQUIVALENCE OF ALGORITHMS FOR ESTIMATING PARAMETERS OF DYNAMICAL-STOCHASTIC MODELS OF TURBULENT HEAT EXCHANGE BETWEEN THE OCEAN AND ATMOSPHERE

A. A. Osipova

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The paper presents a statistical analysis of the equivalence between nonparametric and semiparametric approaches to estimating the random coefficients of an Ito stochastic differential equation which is employed to model turbulent heat fluxes between the ocean and atmosphere. The Wilcoxon–Mann–Whitney test was utilized to evaluate the performance of these estimators as a function of the number of bins used during the input data discretization phase. The study was conducted using both synthetic data sets with predefined parameters and empirical ERA5 reanalysis data for the North Atlantic. The results indicate that as the number of bins increases, the accuracy of the nonparametric method deteriorates for the drift coefficient but improves for the diffusion coefficient, whereas the semiparametric method demonstrates high stability. Based on statistical testing with the Holm–Bonferroni correction for multiple hypotheses testing, a threshold number of bins (approximately 200–250) was identified, beyond which the distributions of estimates from both methods become statistically indistinguishable. This confirms their practical equivalence for the analysis of geophysical data.

Keywords: Ito stochastic differential equation; random coefficients; EM algorithm

DOI: 10.14357/08696527260203

EDN: YAHNFS

Acknowledgments

The research was supported by the Russian Science Foundation, project No. 25-21-00448, <https://rscf.ru/project/25-21-00448/>.

References

1. Tian, F., J. S. von Storch, and E. Hertwig. 2017. Air–sea fluxes in a climate model using hourly coupling between the atmospheric and the oceanic components. *Clim. Dynam.* 48(9–10):2819–2836. doi: 10.1007/s00382-016-3228-y.
2. Small, R. J., F. O. Bryan, S. P. Bishop, and R. A. Tomas. 2019. Air–sea turbulent heat fluxes in climate models and observational analyses: What drives their variability? *J. Climate* 32(8):2397–2421. doi: 10.1175/JCLI-D-18-0576.1.
3. Sinitsyn, I. N. 2024. Metody veroyatnostnogo i statisticheskogo modelirovaniya neyavnykh stokhasticheskikh sistem [Probabilistic and statistical modeling methods for implicit stochastic systems]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 34(3):48–66. doi: 10.14357/08696527240305. EDN: RTNRUZ.
4. Sinitsyn, I. N., V. I. Sinitsyn, E. R. Korepanov, and T. D. Konashenkova. 2025. Algoritm modelirovaniya vektornogo stokhasticheskogo protsessa posredstvom ego kanonicheskogo razlozheniya na osnove mnogosloynnoy veyvlet-neyronnoy seti [Modeling algorithms for vector stochastic process by canonical expansions based on multilayer wavelet neural network]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 35(2):17–30. doi: 10.14357/08696527250202. EDN: TFDTXJ.
5. Nielsen, J. N., H. Madsen, and P. C. Young. 2000. Parameter estimation in stochastic differential equations: An overview. *Annu. Rev. Control* 24:83–94. doi: 10.1016/S1367-5788(00)90017-8.
6. Ella-Mintsa, E. 2024. Nonparametric estimation of the diffusion coefficient from i.i.d. S.D.E. paths. *Statistical Inference Stochastic Processes* 27(3):585–640. doi: 10.1007/s11203-024-09310-9.
7. Gulev, S. K., and K. P. Belyaev. 2012. Probability distribution characteristics for surface air–sea turbulent heat fluxes over the global ocean. *J. Climate* 25(1):184–206. doi: 10.1175/2011JCLI4211.1.
8. Belyaev, K. P., A. K. Gorshenin, V. Yu. Korolev, and A. D. Plekhanov. 2022. Statistical analysis of intra- and interannual variability of extreme values of sensible and latent heat fluxes in the North Atlantic in 1979–2021. *Izv. Atmos. Ocean. Phy.* 58(6):609–624. doi: 10.1134/s0001433822060044. EDN: MZDEXI.
9. Gorshenin, A. K., A. A. Osipova, and K. P. Belyaev. 2023. Stochastic analysis of air–sea heat fluxes variability in the North Atlantic in 1979–2022 based on reanalysis data. *Comput. Geosci.* 181:105461. 16 p. doi: 10.1016/j.cageo.2023.105461. EDN: FTOTNM.
10. Belyaev, K., A. Gorshenin, V. Korolev, and A. Osipova. 2024. Comparison of statistical approaches for reconstructing random coefficients in the problem of stochastic

- modeling of air–sea heat flux increments. *Mathematics* 12(2):288. 21 p. doi: 10.3390/math12020288. EDN: OEMJSN.
11. Gikhman, I. I., and A. V. Skorokhod. 1996. *Introduction to the theory of random processes*. Dover Publications. 516 p.
 12. MacFarland, T. W., and J. M. Yates. 2016. Mann–Whitney U test. *Introduction to nonparametric statistics for the biological sciences using R*. Cham: Springer. 103–132. doi: 10.1007/978-3-319-30634-6_4.
 13. Korolev, V. Yu. 2011. *Veroyatnostno-statisticheskie metody dekompozitsii volatil'nosti khaoticheskikh protsessov* [Probabilistic and statistical methods of decomposition of volatility of chaotic processes]. Moscow: Moscow University Publishing House. 512 p. EDN: RBBHRB.
 14. McLachlan, G. J., and T. Krishnan. 2007. *The EM algorithm and extensions*. 2nd ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. 368 p.
 15. Hersbach, H., B. Bell, P. Berrisford, et al. 2020. The ERA5 global reanalysis. *Q. J. Roy. Meteor. Soc.* 146(730):1999–2049. doi: 10.1002/qj.3803.
 16. Mahajan, S., R. Zhang, and T. L. Delworth. 2011. Impact of the Atlantic meridional overturning circulation (AMOC) on Arctic surface air temperature and sea ice variability. *J. Climate* 24(24):6573–6581. doi: 10.1175/2011JCLI4002.1.
 17. Wang, Z., A. C. Bovik, H. R. Sheikh, and E. P. Simoncelli. 2004. Image quality assessment: From error visibility to structural similarity. *IEEE T. Image Process.* 13(4):600–612. doi: 10.1109/TIP.2003.819861.

Received March 2, 2026

Accepted April 15, 2026

Contributor

Osipova Anastasiia A. (b. 1997) — junior scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; osipova.anastasiya.2020@gmail.com

BALANCING POWER DEMAND AND PERFORMANCE IN A DELAYED DEACTIVATION $M/G/1$ -TYPE MODEL

A. S. Golovin¹, E. V. Morozov², and A. S. Rumyantsev³

Abstract: An $M/G/1$ -type model with deactivation and activation periods following a hot-standby period in the empty state is considered where all periods possess general distributions. The model is treated as an exceptional first service system and, together with regenerative arguments, it allows one to obtain the stationary performance (workload, response time) distributions (in the transform domain) as well as the average power demand in explicit form. The optimal value of the hot-standby parameter which minimizes the average power demand (under restricted performance degradation) is obtained. It is shown that the constant-time hot-standby policy is sufficient to guarantee optimality. These results are useful to study power and performance tradeoffs in larger models such as a heterogeneous server pool as shown by a numerical study.

Keywords: delayed deactivation; energy efficiency; exceptional first service; performance monotonicity; Laplace transform order; optimal policy

DOI: 10.14357/08696527260204

EDN: OCWTSM

1 Introduction

The substantial power demand of information and communication technology (ICT) infrastructure strongly motivates research in the field of energy efficiency. Significant focus is placed on various aspects of power saving across a wide spectrum of ICT devices, ranging from small battery-powered equipment used in the Internet of Things [1, 2] to large-scale server farms [3, 4].

¹Laboratory for Stochastic Modeling of Information-Computing and Telecommunication Systems, Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences, 11 Pushkinskaya Str., Petrozavodsk 185910, Karelia Republic, Russian Federation; Department of Applied Mathematics and Cybernetics, Petrozavodsk State University, 33 Lenina Prosp., Petrozavodsk 185910, Karelia Republic, Russian Federation, golovin@krc.karelia.ru

²Laboratory for Stochastic Modeling of Information-Computing and Telecommunication Systems, Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences, 11 Pushkinskaya Str., Petrozavodsk 185910, Karelia Republic, Russian Federation; Department of Applied Mathematics and Cybernetics, Petrozavodsk State University, 33 Lenina Prosp., Petrozavodsk 185910, Karelia Republic, Russian Federation, emorozov@karelia.ru

³Laboratory for Stochastic Modeling of Information-Computing and Telecommunication Systems, Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences, 11 Pushkinskaya Str., Petrozavodsk 185910, Karelia Republic, Russian Federation; Department of Applied Mathematics and Cybernetics, Petrozavodsk State University, 33 Lenina Prosp., Petrozavodsk 185910, Karelia Republic, Russian Federation, ar0@krc.karelia.ru

In a single-server system, power demand can be decreased using various techniques such as dynamic voltage and frequency scaling [5], demand response methods [6], or low-power/sleep/*inactive* modes [7]. In these states (known as Advanced Configuration and Power Interface sleeping states (ACPI S-states), data processing is normally suspended. However, a part of the system may be ready to trigger system activation. Mathematically, many of these systems can be modeled by the so-called vacation queues (see, e. g. [8]).

The cost of transitions to/from the inactive mode (i. e., *deactivation* and *activation*, respectively) is usually rather high both in terms of performance and power demand [9]. The energy-performance tradeoff in such systems may be achieved by means of a delayed deactivation (further in the text called *hot-standby*), that is, the time period before switching the server to the inactive state if no customers arrive during this period. Typically, such a tradeoff is studied by means of Markov chain analysis [10, 11], matrix-analytic methods [12–14], mean-field approximation [15], and Markov decision processes [16] both in single server and multiserver case. The exact analysis is usually performed under the exponential assumptions of the governing random sequences (with a notable exception [16]), whereas in the general case, simulation is performed (see, e. g., [17]). An extension towards general distributions may be rather challenging, although necessity is motivated by workload data [18]. We address this challenge in the present paper.

We generalize three most relevant studies [11, 13, 16] towards an $M/G/1$ -type queue with generally distributed de/activation and hot-standby times. The main elements of our analysis are (i) the interpretation of the system as an exceptional first service $M/G/1$ model, and (ii) the treatment of the hot-standby duration as a *policy* under various optimization criteria. The exceptional first service model has been studied in pioneering work [19] followed by significant extensions obtained in [20, 21].

In the present work, we address minimization of the average stationary power demand under constrained performance degradation where the performance is treated as the average stationary workload or response time. We establish the monotonicity of the performance measures and provide the optimal hot-standby policy in a single-server queue. However, in a more realistic environment, many servers are used, e. g., in a server pool with heterogeneous servers. For such a case, we supplement the theoretical analysis with a simulation.

The key contributions of the present research are as follows:

- explicit analysis of the *distribution of workload/response times* (in transform domain) is performed for the $M/G/1$ -type system with generally distributed hot-standby, deactivation, and activation times, using exceptional first service model and regenerative technique;
- *Laplace transform monotonicity* is established for the system performance (stationary workload/response times) with respect to the hot-standby policy;

- *optimal policy* is obtained explicitly for the minimized power demand under constrained performance degradation; and
- applicability of the results to larger models such as *heterogeneous server pool* is demonstrated by numerical study.

The structure of the paper is as follows. Section 2 contains notation, model description, and problem statement. Section 3 contains some necessary results for the single-server queue with the exceptional first service. In Section 4, we derive the results for the delayed deactivation $M/G/1$ -type system. The results of the simulation of a server pool model are given in Section 5. We complete the paper with a conclusion.

2 Model Description and Problem Statement

We start with some notations used through the paper: the indicator function $I(A)$ of an event A ; the sign \sim connects a random variable (r.v.) X and its cumulative distribution function (CDF) F_X . For the r.v. X , we denote $\varphi_X(s) = \mathbb{E}e^{-sX}$ ($s \geq 0$) its Laplace–Stieltjes transform (LST). (For the purpose of this research, it suffices to consider only $X \geq 0$.) For the r.v. $X \geq 0$ with $\mathbb{E}X < \infty$, the *integrated-tail* CDF $F_{X^{(e)}}$ of an r.v. $X^{(e)}$ is defined as

$$F_{X^{(e)}}(x) = \frac{1}{\mathbb{E}X} \int_0^x \bar{F}_X(y) dy$$

where $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ is the tail CDF. (The r.v. $X^{(e)}$ is sometimes called an equilibrium version of X [22].) It is straightforward to check that

$$\varphi_{X^{(e)}}(s) = \frac{1 - \varphi_X(s)}{s\mathbb{E}X} \tag{1}$$

and provided that $\mathbb{E}X^2 < \infty$,

$$\mathbb{E}X^{(e)} = \frac{\mathbb{E}X^2}{2\mathbb{E}X}. \tag{2}$$

The serial index denoting the generic element of independent and identically distributed (i.i.d.) r.v.'s is omitted.

A detailed description of the delayed deactivation $M/G/1$ -type model studied in this paper is presented below. The arrivals follow the Poisson process with rate λ , interarrival times $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, the iid service times have CDF F_S with finite mean $\mathbb{E}S =: 1/\mu$ and LST $\varphi_S(s)$. A customer leaving the system empty initiates the

hot-standby period $\Gamma \sim F_\Gamma$ followed by a *deactivation* period $B \sim F_B$ if the system is still empty at the end of hot-standby period. The first customer arriving during the deactivation period (if any) cannot interrupt it but triggers an (uninterruptible) *activation* period $A \sim F_A$ right after the end of deactivation. Otherwise, if no customers arrive during the deactivation period, the server becomes *inactive*. If a customer arrives at the inactive system, the activation period starts. During both the deactivation and activation periods as well as in the inactive state, no customers are served.

The hot-standby duration Γ is treated as a system policy parameter aiming to strike a balance between the minimization of power demand and the degradation of system performance. Notably, $\Gamma = \infty$ provides the conventional $M/G/1$ system (without power demand management), while $\Gamma = 0$ corresponds to the system with an instant transition to deactivation. In the following section, the power demand optimization problem is formally defined.

To reflect the mechanism of inactivity, system states are defined as pairs (s, j) where $s \in \{0, b\}$ represents the queue status and $j \in \{1, 2, 3\}$ indicates the server state. More exactly, if $s = 0$, there are no customers in the system and simultaneously, the server may be in one of the following states (enumerated by j): $j = 1$ — inactive; $j = 2$ — hot-standby; or $j = 3$ — deactivation. If $s = b$, the system is not empty (busy) and the server may be in one of the following states: $j = 1$ — activation; $j = 2$ — active; or $j = 3$ — deactivation.

Let $P_{s,j}$ denote the corresponding stationary probabilities (provided they exist) and $d_{s,j}$ represent the respective power demands. The goal is to determine the policy Γ that minimizes the mean stationary power demand

$$\mathcal{E}_{(\Gamma)} := \sum_{s \in \{0, b\}} \sum_{j=1}^3 d_{s,j} P_{s,j} \rightarrow \min_{\Gamma \geq 0}, \quad (3)$$

subject to the following constraint on the mean stationary workload $EW_{(\Gamma)}$,

$$EW_{(\Gamma)} \leq (1 + \varepsilon)EW_{(\infty)}, \quad (4)$$

or on the mean stationary response (sojourn) time $EV_{(\Gamma)}$,

$$EV_{(\Gamma)} \leq (1 + \varepsilon)EV_{(\infty)}, \quad (5)$$

for a predefined $\varepsilon > 0$. To solve these problems, an $M/G/1$ -type system with exceptional first service is employed as described in the next section.

3 Exceptional First Service $M/G/1$ System Revisited

The key element of the analysis presented in the research is the interpretation of the model under consideration as an exceptional first service $M/G/1$ -type system. The

remaining deactivation and activation periods are interpreted as an addendum to the (basic) service time of the first customer in a busy cycle. Notably, the workload $W_{(\Gamma)}$ in this a case also contains fictitious work induced by server deactivation and activation periods, during which the server cannot serve customers but is considered busy. For this reason, the main results from [19], which are crucial for the subsequent analysis, are summarized below.

Consider an $M/G/1$ -type queueing system with Poisson input and i.i.d. (exponential) interarrival times $\{T_n\}_{n \geq 1}$ with rate λ . Customers who arrive in the empty system start new busy periods and have i.i.d. service times $\{\widehat{S}_n\}$ with $\widehat{S} \sim F_{\widehat{S}}$, while customers arriving within busy periods have i.i.d. service times $\{S_n\}$ with *generic* service time $S \sim F_S$. In general, $F_{\widehat{S}} \neq F_S$ and such a system is called the system with the *exceptional* first service (see, for instance, [19–21]). By (1), the LSTs of the original r.v.'s and their equilibrium versions are connected as

$$\varphi_{S^{(e)}}(s) = \mathbb{E}e^{-sS^{(e)}} = \frac{1 - \varphi_S(s)}{s\mathbb{E}S}; \quad \varphi_{\widehat{S}^{(e)}}(s) = \mathbb{E}e^{-s\widehat{S}^{(e)}} = \frac{1 - \varphi_{\widehat{S}}(s)}{s\mathbb{E}\widehat{S}}. \quad (6)$$

The workload (remaining work) W_n seen by the n th customer upon arrival satisfies a (slightly) modified Lindley recursion:

$$W_{n+1} = \left(W_n + S_n - T_n + \left(\widehat{S}_n - S_n \right) I(W_n = 0) \right)^+$$

where $(\cdot)^+ = \max(0, \cdot)$, and the response time of customer n is

$$V_n = W_n + S_n + \left(\widehat{S}_n - S_n \right) I(W_n = 0), \quad n \geq 1.$$

The objective is to determine the (limiting) CDF F_W and F_V of the *stationary* workload W and response times V , respectively.

Regenerative structure of the system. To develop an explicit stationary performance analysis of the system for general distributions of Γ , A , and B , a regenerative approach is utilized, since the workload process (and other related processes) are regenerative. Standard regenerations occur when a new customer meets an idle system (see, e. g., [23, 24]). However, to analyze the model with generally distributed Γ , B , and A , the regenerative structure is modified to eliminate the dependence of the future workload process on the attained hot-standby time at the arrival instance. Let $\{d_n\}$ denote the customer departure instances from the system and let \widetilde{W}_n represent the workload at the instant d_n , $n \geq 1$. The regeneration points of the workload process $\{\widetilde{W}_n\}$ are defined as the departure instances that leave the system empty:

$$\theta_{n+1} := \min(k > \theta_n : \widetilde{W}_k = 0), \quad n \geq 0 \quad (\theta_0 := 0).$$

Since the input process is Poisson, it is evident that $\{\theta_{n+1} - \theta_n\}$ are i.i.d. regeneration period lengths, counting the arrivals between two adjacent regeneration times. Let θ denote the generic regeneration period length. It is evident that θ also equals the length of a (conventional) regeneration period generated by nonwaiting customer arrivals.

According to [19] (and can be easily established by regenerative argument, see, e. g., [24, Ch. 2]), the stability condition of this model is given by

$$\rho := \lambda ES < 1$$

which is assumed to be fulfilled in what follows. In particular, it guarantees the existence of the stationary workload W and the response time V as the weak limits $W_n \Rightarrow W$ and $V_n \Rightarrow V$, respectively, as $n \rightarrow \infty$ (see, e. g., [23]). (Although the weak limit of \tilde{W}_n also exists, it is not utilized in the reminder of this paper.)

Performance analysis. It follows from [19, Theorem 4] that

$$\varphi_W(s) = \mathbb{E}e^{-sW} = P_0 \frac{s - \lambda(\varphi_{\hat{S}}(s) - \varphi_S(s))}{s - \lambda(1 - \varphi_S(s))}. \quad (7)$$

Here, P_0 is the stationary idle probability

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho + \hat{\rho}} \quad (8)$$

where

$$\hat{\rho} = \lambda E\hat{S}.$$

It is worth mentioning that, by the property PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages), P_0 is both the limiting fraction of idle time of the server and the fraction of customers meeting idle server (in steady-state regime). Using Eqs. (6) and (8), Eq. (7) can be written as follows:

$$\varphi_W(s) = P_0 \left(1 + \frac{\lambda(1 - \varphi_{\hat{S}}(s))}{s - \lambda(1 - \varphi_S(s))} \right) = P_0 \left(1 + \frac{\hat{\rho}\varphi_{\hat{S}(e)}(s)}{1 - \rho\varphi_{S(e)}(s)} \right) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &= P_0 + P_0 \hat{\rho} \varphi_{\hat{S}(e)}(s) \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k (\varphi_{S(e)}(s))^k \\ &= P_0 + (1 - P_0) \varphi_{\hat{S}(e)}(s) \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \rho) \rho^k (\varphi_{S(e)}(s))^k. \end{aligned} \quad (10)$$

It follows from Eq. (9) that

$$F_W(x) = P_0 + (1 - P_0) \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \rho) \rho^k (F_{\hat{S}(e)} * F_{S(e)}^{*k})(x)$$

where $*$ denotes the convolution operator; and $F_{S^{(e)}}^{*k}$ is the k -fold convolution of $F_{S^{(e)}}$ with itself. It follows from (10) that the mean stationary workload

$$EW = -\varphi'_W(0) = (1 - P_0) \left[E\widehat{S}^{(e)} + \frac{\rho}{1 - \rho} ES^{(e)} \right] \quad (11)$$

which becomes the Pollaczek–Khintchine formula for a standard $M/G/1$ system if $\widehat{S} = S$. Expression (11) can be rewritten using Eq. (2) as follows:

$$EW = (1 - P_0) \left(\frac{E\widehat{S}^2}{2E\widehat{S}} + \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{ES^2}{2ES} \right). \quad (12)$$

By the known relation $E\theta = 1/P_0$, we find from expression (8) that

$$E\theta = 1 + \frac{\widehat{\rho}}{1 - \rho}. \quad (13)$$

The parameter $\widehat{\rho}$ is the mean number of arrivals during the first service time within a busy period, while the term $1/(1 - \rho)$ denotes the mean number of arrivals during a ‘standard’ busy period in the conventional stationary $M/G/1$ system [23]. (Equivalently, $1/(1 - \rho)$ signifies the mean discrete regeneration period length.) Thus, an intuitive interpretation of expression (13) can be established using the LIFO (Last-In-First-Out) service discipline: the mean regeneration period length $E\theta$ comprises the first customer and the mean number $\widehat{\rho}$ of standard regeneration cycle lengths (each equal to $1/(1 - \rho)$) generated (under the LIFO rule) by arrivals during the first service. Based on the PASTA property, the mean continuous-time regeneration cycle length is obtained as follows:

$$ET E\theta = \frac{1}{\lambda P_0} = \frac{1}{\lambda} + \frac{E\widehat{S}}{1 - \rho} = \frac{1 - \rho + \widehat{\rho}}{\lambda(1 - \rho)}. \quad (14)$$

Remark 1. In [19, Theorem 3], the following relation is obtained:

$$\varphi_W(s)\varphi_S(s) + (\varphi_{\widehat{S}}(s) - \varphi_S(s)) P_0 = \varphi_V(s) \quad (15)$$

where $\varphi_V(s)$ is the LST of the stationary response time V . Substituting Eq. (10) into Eq. (15) yields:

$$\varphi_V(s) = P_0\widehat{\varphi}_S(s) + (1 - P_0)\varphi_S(s)\varphi_{\widehat{S}^{(e)}}(s) \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \rho)\rho^k (\varphi_{S^{(e)}}(s))^k. \quad (16)$$

Expression (16) admits the following intuitive interpretation: with probability P_0 , the response time (for the first customer in a busy cycle) equals \widehat{S} ; otherwise, it is a sum of the (nonzero) workload and the ‘standard’ service time S . Based on Eq. (11), the mean response time is derived as

$$EV = -\varphi'_V(0) = EW + ES + P_0(E\widehat{S} - ES) = EW + P_0E\widehat{S} + (1 - P_0)ES. \quad (17)$$

Equation (8) directly implies that

$$\lambda \left(P_0E\widehat{S} + (1 - P_0)ES \right) = 1 - P_0 \quad (18)$$

which represents a particular case of Little’s law since $P_0E\widehat{S} + (1 - P_0)ES$ is the mean service time of a generic customer.

Remark 2. The result (10) gives the following procedure for sampling from (in general unknown) stationary distribution F_W in the exceptional first service $M/G/1$ -type system (using arguments similar to [24, p. 43]).

1. Toss a coin with the success probability P_0 , and output $W = 0$ upon success.
2. Otherwise, with probability $1 - P_0$, sample an r.v. Q geometrically distributed with a success probability $1 - \rho$, and the output

$$W = \widehat{S}^{(e)} + \sum_{k=1}^Q S_k^{(e)}$$

with i.i.d. $S_k^{(e)} \sim F_{S^{(e)}}$, $k = \overline{1, Q}$, and $\widehat{S}^{(e)} \sim F_{\widehat{S}^{(e)}} (\sum_{\emptyset} := 0)$.

The importance of this procedure is that it allows one to simulate the (stationary) paths of the workload process starting in steady state.

4 Balancing Power Demand and Performance

In this section, the problems stated in Section 2 are solved. The results obtained herein align with those derived in [13, 25] for the M/M -type model with exponentially distributed hot-standby, deactivation, and activation times and extend those from [16] to the nonzero deactivation times.

Distribution of the First Service Time. For convenience, let T_0 denote the remaining interarrival time at (any) instant θ_n . Recall that $T_0 \sim \text{Exp}(\lambda)$.

To determine the distribution of the service time \widehat{S} of the first customer in a given regenerative period, three (mutually exclusive) events are defined, H_I , H_D , and H_S :

(i) $H_I = \{T_0 < \Gamma\}$. Then, with probability

$$p_I := \mathbf{P}\{T_0 < \Gamma\} = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda x}) dF_{\Gamma}(x) = 1 - \varphi_{\Gamma}(\lambda), \quad (19)$$

the new customer starts the busy period immediately and has service time $\widehat{S} = S$. Let now $\overline{H}_I = \{T_0 \geq \Gamma\}$ hold good. This event occurs with probability

$$\mathbf{P}\{\overline{H}_I\} = 1 - p_I = \varphi_{\Gamma}(\lambda)$$

and is split into two cases, H_S and H_D .

(ii) $H_S = \{T_0 \geq \Gamma + B\}$, that is, the first customer arrives during the inactivity period. This event occurs with probability

$$p_S := \mathbf{P}\{H_S\} = \mathbf{E}e^{-\lambda(\Gamma+B)} = \varphi_{\Gamma}(\lambda)\varphi_B(\lambda)$$

and immediately triggers an activation period A , in which case the service time $\widehat{S} = A + S \sim F_A * F_S$; and

(iii) finally, $H_D = \{\Gamma \leq T_0 < \Gamma + B\} = \overline{H}_I \setminus H_S$, that is, the first customer arrives during the deactivation period, which happens with probability

$$p_D := \mathbf{P}\{H_D\} = \mathbf{P}\{\overline{H}_I\} - \mathbf{P}\{H_S\} = \varphi_{\Gamma}(\lambda)(1 - \varphi_B(\lambda)). \quad (20)$$

In this case, the service time \widehat{S} of the first customer consists of the remaining deactivation period $\tilde{B} = \Gamma + B - T_0$ followed by the activation period A and the standard service time S .

Based on the analysis above, the first service time can be represented as

$$\begin{aligned} \widehat{S} &= SI(H_I) + (\tilde{B} + A + S)I(H_D) + (A + S)I(H_S) \\ &= S + AI(\overline{H}_I) + \tilde{B}I(H_D). \end{aligned} \quad (21)$$

Now, using (2) and taking into account the dependence between \tilde{B} and $I(H_D)$, one obtains, after some straightforward algebra,

$$\mathbf{E}\widehat{S} = \mathbf{E}S + \varphi_{\Gamma}(\lambda) \left(\mathbf{E}A + \mathbf{E}B - \frac{1 - \varphi_B(\lambda)}{\lambda} \right) \quad (22)$$

where, in particular, we use

$$\mathbf{E}(\tilde{B}I(H_D)) = \varphi_{\Gamma}(\lambda) \left(\mathbf{E}B - \frac{1 - \varphi_B(\lambda)}{\lambda} \right).$$

Similarly, using (21), one obtains

$$E\widehat{S}^2 = ES^2 + \varphi_\Gamma(\lambda)(EA^2 + 2ES EA) + 2E(\tilde{B} I(H_D))(ES + EA) + E(\tilde{B}^2 I(H_D))$$

where

$$E(\tilde{B}^2 I(H_D)) = \varphi_\Gamma(\lambda)EB^2 - \frac{2}{\lambda} E\left(\tilde{B} I(H_D)\right).$$

To derive the LST of \widehat{S} , representation (21) is used. Taking into account the dependence of $I(\overline{H}_I)$ and $I(H_D)$ on \tilde{B} , one obtains, after some algebra,

$$\varphi_{\widehat{S}}(s) = \varphi_S(s) \left(1 - \varphi_\Gamma(\lambda) \left[1 - \frac{(s\varphi_B(\lambda) - \lambda\varphi_B(s))\varphi_A(s)}{s - \lambda} \right] \right). \quad (23)$$

It is easy to check from (23) that, as expected, $-\varphi'_{\widehat{S}}(0)$ gives (22).

System Performance. The target performance metrics can be determined in an explicit form, emphasizing the dependence on Γ in the notation such as $W_{(\Gamma)}$ for the stationary workload. By (22), using (8), one gets

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 + c_2\varphi_\Gamma(\lambda)}$$

where

$$c_2 = \lambda(EA + EB) - (1 - \varphi_B(\lambda)) \geq 0. \quad (24)$$

The nonnegativity of c_2 holds good since one has, using (1),

$$\lambda EB - (1 - \varphi_B(\lambda)) = \lambda EB(1 - \varphi_{B(e)}(\lambda)) \geq 0.$$

To get EW as a function of $\varphi_\Gamma(\lambda)$, we use (22)–(24) in (12). It follows that

$$EW_{(\Gamma)} = c_1 + \frac{c_3\varphi_\Gamma(\lambda)}{1 + c_2\varphi_\Gamma(\lambda)} \quad (25)$$

where

$$c_1 = EW_{(\infty)} = \frac{\lambda ES^2}{2(1 - \rho)};$$

$$c_3 = c_2 ES + (\lambda EA - 1) \left(EB - \frac{1 - \varphi_B(\lambda)}{\lambda} \right) + \frac{\lambda EB^2}{2} + \frac{\lambda EA^2}{2}.$$

Note that c_1 is the mean stationary workload (delay) in the conventional $M/G/1$ system. On the other hand,

$$EW_{(0)} = c_1 + \frac{c_3}{1 + c_2}.$$

Similar results can be obtained for the response time. It follows from (17) that the difference $EV_{(\Gamma)} - EW_{(\Gamma)}$ (i. e., the mean service time, see (18)) is

$$EV_{(\Gamma)} - EW_{(\Gamma)} = \frac{1 - P_0}{\lambda} = \frac{ES + \varphi_{\Gamma}(\lambda)c_2/\lambda}{1 + c_2\varphi_{\Gamma}(\lambda)}. \quad (26)$$

Thus, by (26) and (25),

$$EV_{(\Gamma)} = c_1 + ES + \frac{(c_3 + c_2(1 - \rho)/\lambda)\varphi_{\Gamma}(\lambda)}{1 + c_2\varphi_{\Gamma}(\lambda)}. \quad (27)$$

Note that (27) in case $B = 0$ aligns with [16, Section 5].

The following theorem states the monotonicity of the stationary performance metrics with respect to the policy Γ in terms of the so-called Laplace transform order [26], that is, $X \geq_{Lt} Y$ if the order $\varphi_X(s) \leq \varphi_Y(s)$ holds for all $s \geq 0$.

Theorem 1. *Let $W_{(\Gamma_1)}$ and $W_{(\Gamma_2)}$ denote the stationary workloads and let $V_{(\Gamma_1)}$ and $V_{(\Gamma_2)}$ represent the stationary response times in two systems where, ceteris paribus, the following relation holds:*

$$\varphi_{\Gamma_1}(\lambda) \geq \varphi_{\Gamma_2}(\lambda) \geq 0.$$

Then,

$$W_{(\Gamma_1)} \geq_{Lt} W_{(\Gamma_2)}, \quad V_{(\Gamma_1)} \geq_{Lt} V_{(\Gamma_2)}.$$

Proof. Using (23) in (10), one has, after some algebra,

$$\varphi_W(s) = P_0 \left(1 + \frac{\lambda(1 - \varphi_{\hat{S}}(s))}{s - \lambda(1 - \varphi_S(s))} \right) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho\varphi_{S(e)}(s)} \frac{1 + \tilde{c}_2(s)\varphi_{\Gamma}(\lambda)\varphi_S(s)}{1 + c_2\varphi_{\Gamma}(\lambda)} \quad (28)$$

where one has, for $s \geq 0$,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_2(s) &= \frac{\lambda}{s} \left[1 - \frac{s}{s - \lambda} \varphi_B(\lambda)\varphi_A(s) + \frac{\lambda}{s - \lambda} \varphi_B(s)\varphi_A(s) \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - s} [\lambda(EA\varphi_{A(e)}(s) + EB\varphi_A(s)\varphi_{B(e)}(s)) - (1 - \varphi_B(\lambda)\varphi_A(s))] \leq c_2. \end{aligned}$$

The latter inequality follows from (24) and assures $\varphi_W(s)$ is decreasing with $\varphi_{\Gamma}(\lambda)$. The analysis for φ_V is similar and is based on the representation (16).

Remark 3. Since the Laplace ordering implies ordering of expectations (see [26, p. 234]), then under the conditions of Theorem 1,

$$EW_{(\Gamma_1)} \geq EW_{(\Gamma_2)}.$$

Remark 4. Stochastic ordering $\Gamma_1 \leq_{st} \Gamma_2$ implies $\Gamma_1 \leq_{Lt} \Gamma_2$ [26, Th. 5.A.16], and both these orderings are sufficient for Theorem 4 to hold.

Remark 5. It is clear from the proof of Theorem 1 that φ_W and φ_V depend on Γ only through a single value $\varphi_\Gamma(\lambda)$. It then follows from Remarks 3 and 4 that $\Gamma = \infty$ (corresponding to conventional $M/G/1$ system) and $\Gamma = 0$ imply the smallest and the largest average stationary workload, respectively. Thus, the quality degradation in (4) is upper bounded as

$$1 + \varepsilon \leq \frac{EW_{(0)}}{EW_{(\infty)}} = 1 + \frac{c_3}{c_1(1 + c_2)}.$$

Power Demand Optimization. To compute the mean stationary power demand (3), the probabilities $P_{s,j}$, $s \in \{0, b\}$, $j = 1, 2, 3$, are determined below. Since P_0 is the probability of a customer entering an empty system and using the probabilities (19) and (20) and the property PASTA, the fractions of time that the empty system spends in the inactive, hot-standby, and deactivation states are obtained as

$$P_{0,1} = p_S P_0; \quad P_{0,2} = p_I P_0; \quad P_{0,3} = p_D P_0. \quad (29)$$

The stationary probabilities $P_{b,1}$, $P_{b,2}$, and $P_{b,3}$ of the nonempty system being in activation, busy, and deactivation states, respectively, are determined next. By a regenerative argument, the fraction of time that the system serves the first (exceptional) customer is (see (14) and (22))

$$\frac{E\hat{S}}{ET E\theta} = \lambda P_0 \left(ES + \varphi_\Gamma(\lambda) EA + \varphi_\Gamma(\lambda) \left(EB - \frac{1 - \varphi_B(\lambda)}{\lambda} \right) \right).$$

Since $P_{b,1}$ and $P_{b,3}$ correspond to the activation and deactivation periods, respectively, then, using regenerative arguments,

$$P_{b,1} = \frac{E(AI(\overline{H}_I))}{E\theta ET} = \lambda P_0 \varphi_\Gamma(\lambda) EA;$$

$$P_{b,3} = \frac{E(\tilde{B}I(H_D))}{E\theta ET} = \lambda P_0 \varphi_\Gamma(\lambda) \left(EB - \frac{1 - \varphi_B(\lambda)}{\lambda} \right),$$

and, taking into account Eqs. (8) and (22),

$$P_{b,2} = 1 - P_0 - P_{b,1} - P_{b,3} = \rho. \quad (30)$$

Notably, while $P_{b,2}$ is the (stationary) busy probability in the conventional $M/G/1$ system, the probabilities $P_{b,1}$ and $P_{b,3}$ correspond to the activation and deactivation states, respectively.

From (29) and (30), one gets, after some algebra,

$$\mathcal{E}_{(\Gamma)} = \frac{\varkappa\varphi_{\Gamma}(\lambda)}{1 + c_2\varphi_{\Gamma}(\lambda)} + (1 - \rho)d_{0,2} + \rho d_{b,2}$$

where

$$\begin{aligned} \varkappa = (1 - \rho) [& d_{0,1}\varphi_B(\lambda) + (d_{0,3} - d_{b,3})(1 - \varphi_B(\lambda)) \\ & + d_{b,1}\lambda EA + d_{b,3}\lambda EB - d_{0,2}(1 + c_2)]. \end{aligned}$$

Depending on the sign of \varkappa , the mean power demand $\mathcal{E}_{(\Gamma)}$ is monotone with respect to $\varphi_{\Gamma}(\lambda)$. In particular, if $\varkappa < 0$, using Eq. (25), one can check that minimum in Eq. (3) is attained from *equality* (4) as

$$\varphi_{\Gamma}(\lambda) = \varphi_{\Gamma}^W(\lambda) := \frac{\varepsilon c_1}{c_3 - \varepsilon c_1 c_2}. \quad (31)$$

Similarly, solving the *equality* (5) and applying Eq. (27), the corresponding value is obtained as

$$\varphi_{\Gamma}(\lambda) =: \varphi_{\Gamma}^V(\lambda) = \frac{\varepsilon(c_1 + ES)}{c_3 + c_2(1 - \rho)/\lambda - \varepsilon(c_1 + ES)c_2}.$$

If $\varkappa > 0$, the minimum power demand is attained at $\varphi_{\Gamma}(\lambda) = 0$, e. g., for $\Gamma = \infty$ (conventional $M/G/1$ system). For $\varkappa = 0$, the power demand does not depend on Γ and is the same as for the (conventional) $M/G/1$ system.

Remark 6. Due to Remark 5, two systems with policies Γ_1 and Γ_2 having different distributions (e. g., exponential vs. deterministic) will have exactly the same workload (response time) *distributions* and exactly the same mean stationary power demands. This allows one to use, for simplicity, the deterministic (constant) hot-standby duration where the optimal $\Gamma = \Gamma_W$ can be obtained from (31) as

$$\Gamma_W = \frac{\log(c_3 - \varepsilon c_1 c_2) - \log(c_1 \varepsilon)}{\lambda}.$$

In essence, the optimal policy among all possible hot-standby strategies can be chosen as a “threshold-type policy”: deactivate if no arrival happens during constant-time hot-standby period Γ_W .

5 Energy/Performance Tradeoff in a Server Pool

In this section, the theoretical results derived in Sections 3 and 4 are applied to a server pool model inspired by [25]. In this heterogeneous system, there are two

server pools of sizes N_1 and N_2 , respectively. The (Poisson, rate λ) input customers are dispatched (by tossing a coin) to the first pool with probability p_1 . Within each pool, the servers are identical and a random server assignment policy is used for the input. Consequently, each server in pool $i \in \{1, 2\}$ receives a Poisson input having rate $\lambda p_i / N_i$ where $p_2 = 1 - p_1$. The superscript (i) is employed to denote the driving sequences for the pool $i = 1, 2$.

The service, deactivation, and activation times follow a (type-II) Pareto distribution $\text{ParetoII}(\kappa, x_0)$ with a shape parameter κ and a scale parameter x_0 defined (for some r.v. $X \sim F_X$) by

$$F_X(x) = 1 - \frac{x_0^\kappa}{(x + x_0)^\kappa}, \quad \kappa > 2, \quad x \geq 0.$$

So, one may check

$$EX = \frac{x_0}{\kappa - 1}, \quad EX^2 = \frac{2x_0^2}{(\kappa - 1)(\kappa - 2)} < \infty.$$

The following parameters are used inspired by the performance/power demand of ORACLE server X9_1 (Intel Xeon Gold 6354 18c at 3.0 GHz, 2×32 GB RAM, NVME) and ORACLE server X8_1 (Intel Xeon 8260 at 2.4 GHz, 32 GB RAM, SSD) for pool 1 and pool 2, respectively:

$$\begin{aligned} S^{(1)} &\sim \text{ParetoII}(3, 5); & A^{(1)} &\sim \text{ParetoII}(3, 1); & B^{(1)} &\sim \text{ParetoII}(3, 1), \\ S^{(2)} &\sim \text{ParetoII}(4, 10); & A^{(2)} &\sim \text{ParetoII}(4, 3); & B^{(2)} &\sim \text{ParetoII}(4, 3). \end{aligned}$$

Throughout the section, the power demands are defined as follows:

$$\begin{aligned} d_{0,1}^{(1)} &= 10; & d_{0,2}^{(1)} &= 71; & d_{b,1}^{(1)} &= d_{b,2}^{(1)} = d_{b,3}^{(1)} = d_{0,3}^{(1)} = 304; \\ d_{0,1}^{(2)} &= 15; & d_{0,2}^{(2)} &= 97; & d_{b,1}^{(2)} &= d_{b,2}^{(2)} = d_{b,3}^{(2)} = d_{0,3}^{(2)} = 267. \end{aligned}$$

These parameters are obtained from the corresponding hardware specifications (power demand for active/idle/inactive states), whereas the ratio of the average service times matches the (benchmark) performance ratio of the two aforementioned server models. The parameters for the activation and deactivation phases are chosen to provide an average duration of 0.5 (say, minute) for the first pool and 1 for the second pool.

The system is investigated under a light load, $\lambda = 0.1 (N_1/ES^{(1)} + N_2/ES^{(2)})$. Furthermore, the policies Γ_i are assumed to be deterministic for $i = 1, 2$.

Within the experiment, the *sensitivity* of the server pool model to the dispatching parameter p_1 and the policies Γ_1 and Γ_2 is investigated, while optimality of such

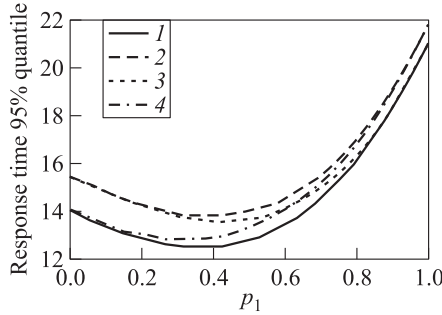


Figure 1 Response time 95% quantile vs. dispatching policy p_1 for the server pool model with $20 + 80 M/G/1$ -type servers with parameters defined in Section 5 for various (deterministic) hot-standby times Γ_i , $i = 1, 2$: 1 — $\Gamma_1 = \infty$, $\Gamma_2 = \infty$; 2 — $\Gamma_1 = 10^{-2}$, $\Gamma_2 = 10^{-2}$; 3 — $\Gamma_1 = 10^2$, $\Gamma_2 = 10^{-2}$; and 4 — $\Gamma_1 = 10^{-2}$, $\Gamma_2 = 10^2$

a system is beyond the scope of this paper. We vary $p_1 \in (0, 1)$ and evaluate the 95% response time quantile (by plugging (28) and (23) into (15) and numerical LST inversion at 300 points) and average power demand for the model with the setup tuple $(p_1, \Gamma_1, \Gamma_2)$ where $\Gamma_i \in \{0.01, 100\}$. As a baseline for comparison, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \infty$ is utilized.

Figure 1 depicts the 95% response time quantile vs. the dispatching policy p_1 . The U-shape curve 1 corresponds to the baseline model, whereas the curve 2 is for $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 10^{-2}$. Interestingly, the curve 3 coincides with the curve 2 for small values of p_1 and converges to curve 1 for large values of p_1 , while the opposite behavior is observed for curve 4. This is due to the fact that for $p_1 \approx 1$, almost all traffic is routed to the first pool, and the policy $\Gamma_1 = 100$ for the curve 2, which almost never lets the system stay inactive. On the other hand, for $p_1 \approx 0$, the traffic is routed to the second pool, and the policy Γ_2 is exactly the same for the systems represented by curves 2 and 3.

Figure 2 depicts the average power demand. Since line 1 represents a pool of conventional $M/G/1$ systems, the average power demand can be calculated explicitly. Namely, for $p_1 = 1$, all the traffic is routed to the first pool, and one can check $\rho^{(1)} = \lambda ES^{(1)} / N_1 = 0.4$. Consequently, the mean power demand in the system with the setup tuple $(1, \infty, \infty)$ equals

$$N_1 \left[\rho^{(1)} d_{b,2}^{(1)} + (1 - \rho^{(1)}) d_{0,2}^{(1)} \right] + N_2 d_{0,2}^{(2)} = 11\,044.$$

Similarly, for $p_1 = 0$, one has $\rho^{(2)} = \lambda ES^{(2)} / N_2 = 0.133$, and the mean power demand in the system with the setup tuple $(0, \infty, \infty)$ equals

$$N_1 d_{0,2}^{(1)} + N_2 \left[\rho^{(2)} d_{b,2}^{(2)} + (1 - \rho^{(2)}) d_{0,2}^{(2)} \right] = 10\,989.$$

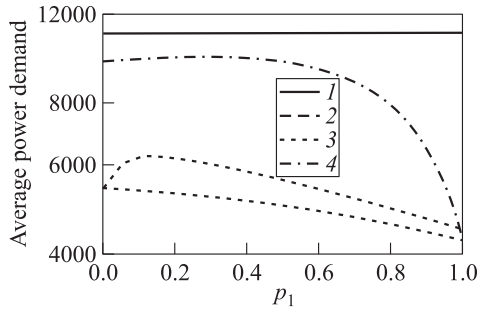


Figure 2 Average power demand vs. dispatching policy p_1 for the server pool model with $20 + 80$ $M/G/1$ -type servers with parameters defined in Section 5 for various (deterministic) hot-standby times Γ_i , $i = 1, 2$: 1 — $\Gamma_1 = \infty$, $\Gamma_2 = \infty$; 2 — $\Gamma_1 = 10^{-2}$, $\Gamma_2 = 10^{-2}$; 3 — $\Gamma_1 = 10^2$, $\Gamma_2 = 10^{-2}$; and 4 — $\Gamma_1 = 10^{-2}$, $\Gamma_2 = 10^2$. The logarithmic scale is used on y axis

For this reason, the line 1 seems almost constant. One may also note the nonlinear dependence of the average power demand on the dispatching probability.

6 Concluding Remarks and Discussion

In summary, an $M/G/1$ -type model with deactivation and activation periods following a hot-standby period (all having arbitrary distributions), was investigated. The stationary workload and response time distributions were derived explicitly in the LST form by using the exceptional first service model. Laplace transform monotonicity for the workload and response time distributions (with respect to the hot-standby policy) was established. It was demonstrated that these distributions depend on the single value of LST of the hot-standby distribution, and thus, in practice, it is sufficient to implement a deterministic hot-standby duration to minimize the average stationary power demand. An explicit expression for this optimal policy was also presented.

The explicit results for $EW_{(\Gamma)}$, $EV_{(\Gamma)}$, and $\mathcal{E}_{(\Gamma)}$ were obtained; so, one can also use these expressions to obtain various policies that use combinations of these metrics, such as the Energy-Response Weighted Sum (ERWS) [27] or the Energy-Response Product (ERP) [27], Performance-per-Watt (PPW) [12] or normalized PPW [28].

Moreover, as demonstrated in Section 5, one may also solve optimization problems where performance is defined by the CDF itself, say, by imposing restrictions on the quantile of the performance CDF, as those given by the so-called green service level agreement (green SLA) [6, 25] in a heterogeneous pool of fog nodes or within a cloud environment. Addressing such optimization problems might be a promising direction for future research.

Acknowledgments

The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the Agreement No. 075-15-2025-345.

References

1. Oma, R., S. Nakamura, D. Duolikun, T. Enokido, and M. Takizawa. 2018. An energy-efficient model for fog computing in the Internet of Things (IoT). *Internet of Things* 1-2:14–26. doi: 10.1016/j.iot.2018.08.003.
2. Ever, E., P. Shah, L. Mostarda, F. Omondi, and O. Gemikonakli. 2019. On the performance, availability and energy consumption modelling of clustered IoT systems. *Computing* 101(12):1935–1970. doi: 10.1007/s00607-019-00720-9.
3. Tang, C.-J., M.-R. Dai, C.-C. Chuang, and Y.-S. Chiu. 2016. Energy management for the homogeneous server clusters offering web services. *Energ. Effic.* 9(5):1115–1144. doi: 10.1007/s12053-015-9412-9.
4. Fournneau, J.-M. 2020. Modeling green data-centers and jobs balancing with energy packet networks and interrupted poisson energy arrivals. *SN Computer Science* 1:28. 6 p. doi: 10.1007/s42979-019-0029-5.
5. Kuehn, P. J., and M. Mashaly. 2019. DVFS-power management and performance engineering of data center server clusters. *15th Annual Conference on Wireless On-demand Network Systems and Services Proceedings*. IEEE. 91–98. doi: 10.23919/WONS.2019.8795470.
6. Basmadjian, R., J. F. Botero, G. Giuliani, X. Hesselbach, S. Klingert, and H. De Meer. 2018. Making data centers fit for demand response: Introducing GreenSDA and GreenSLA contracts. *IEEE T. Smart Grid* 9(4):3453–3464. doi: 10.1109/TSG.2016.2632526.
7. Kuehn, P. J., and M. E. Mashaly. 2015. Automatic energy efficiency management of data center resources by load-dependent server activation and sleep modes. *Ad Hoc Netw.* 25:497–504. doi: 10.1016/j.adhoc.2014.11.013.
8. Tian, N., and Z. G. Zhang. 2006. *Vacation queueing models: Theory and applications*. New York, NY: Springer. 386 p.
9. Gómez, B., S. Bayhan, E. Coronado, J. Villalón, and A. Garrido. 2024. LESS-ON: Load-aware edge server shutdown for energy saving in cellular networks. *Comput. Netw.* 252:110675. 15 p. doi: 10.1016/j.comnet.2024.110675.
10. Deng, Y., W. J. Braun, and Y. Q. Zhao. 1999. $M/M/1$ queueing system with delayed controlled vacation. *Operations Research Transactions* 4(1):17–30.
11. Herlich, M., N. Bredendals, and H. Karl. 2016. Delayed (de-)activation in servers with a sleep mode. *Sustain. Comput. — Infor.* 10:48–55. doi: 10.1016/j.suscom.2016.04.002.
12. Gandhi, A., S. Doroudi, M. Harchol-Balter, and A. Scheller-Wolf. 2014. Exact analysis of the $M/M/k/setup$ class of Markov chains via recursive renewal reward. *Queueing Syst.* 2014. 77(2):177–209. doi: 10.1007/s11134-014-9409-7.

13. Golovin, A., and A. Rumyantsev. 2022. Energy efficiency of a single-server with inactive state by matrix-analytic method. *Information technologies and mathematical modelling. Queueing theory and applications*. Eds. A. Dudin, A. Nazarov, and A. Moiseev. Communications in computer and information science ser. Cham: Springer. 1605:172–184. doi: 10.1007/978-3-031-09331-9_14.
14. Le-Anh, T., and T. Phung-Duc. 2025. Energy-performance tradeoffs in server farms with batch services and setup times. *Perform. Evaluation* 168:102468. 20 p. doi: 10.1016/j.peva.2025.102468.
15. Pender, J., and T. Phung-Duc. 2016. A Law of large numbers for $M/M/c$ /Delayoff-Setup queues with nonstationary arrivals. *Analytical and stochastic modelling techniques and applications*. Eds. S. Wittevrongel and T. Phung-Duc. Lecture notes in computer science ser. Cham: Springer. 9845:253–268. doi: 10.1007/978-3-319-43904-4_18.
16. Hyytiä, E., D. Down, P. Lassila, and S. Aalto. 2018. Dynamic control of running servers. *Measurement, modelling and evaluation of computing systems*. Eds. R. German, K.-S. Hielscher, and U. R. Krieger. Cham: Springer. 127–141. doi: 10.1007/978-3-319-74947-1_9.
17. Le-Anh, T., K. Ishiguro, and T. Phung-Duc. 2023. Performance analysis of multi-server queueing systems with batch services and setup times. *Computer performance engineering and stochastic modelling*. Eds. M. Iacono, M. Scarpa, E. Barbierato, S. Serrano, D. Cerotti, and F. Longo. Lecture notes in computer science ser. Cham: Springer. 14231:111–122. doi: 10.1007/978-3-031-43185-2_8.
18. Feitelson, D. G. 2015. *Workload modeling for computer systems performance evaluation*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press. 551 p. doi: 10.1017/CBO9781139939690.
19. Welch, P. D. 1964. On a generalized $M/G/1$ queueing process in which the first customer of each busy period receives exceptional service. *Oper. Res.* 12(5):736–752. doi: 10.1287/opre.12.5.736.
20. Kengaku, H., and M. Miyazawa. 2000. A regenerative cycle approach to an $M/G/1$ queue with exceptional service. *J. Oper. Res. Soc. Jpn.* 43(4):486–504. doi: 10.15807/jorsj.43.486.
21. Bischof, W. 2001. Analysis of $M/G/1$ -queues with setup times and vacations under six different service disciplines. *Queueing Syst.* 39(4):265–301. doi: 10.1023/A:1013992708103.
22. Sigman, K. 1999. Appendix: A primer on heavy-tailed distributions. *Queueing Syst.* 33(1):261–275. doi: 10.1023/A:1019180230133.
23. Asmussen, S. 2003. *Applied probability and queues*. New York, NY: Springer. 438 p.
24. Morozov, E., and B. Steyaert. 2021. *Stability analysis of regenerative queueing models: Mathematical methods and applications*. Cham: Springer. 233 p. doi: 10.1007/978-3-030-82438-9.
25. Golovin, A., R. Basmadjian, S. Astafiev, and A. Rumyantsev. 2023. Little’s law in a single-server system with inactive state for demand-response in data centers with Green SLAs. *14th ACM Conference (International) on Future Energy Systems Companion Proceedings*. New York, NY: ACM. 91–97. doi: 10.1145/3599733.3600255. EDN: QJSTML.

26. Shaked, M., and J. G. Shanthikumar. 2007. *Stochastic orders*. New York, NY: Springer. 473 p. doi: 10.1007/978-0-387-34675-5.
27. Gebrehiwot, M. E., S. Aalto, and P. Lassila. 2014. Optimal sleep-state control of energy-aware $M/G/1$ queues. *EAI Endorsed Transactions Internet of Things* 1(4):82–89. doi: 10.4108/icst.Valuetools.2014.258149.
28. Williams, J. K., M. Harchol-Balter, and W. Wang. 2022. The $M/M/k$ with deterministic setup times. *Proceedings ACM Measurement Analysis Computing Systems* 6(3):1–45. doi: 10.1145/3570617.

Received March 3, 2026

Accepted April 15, 2026

Contributors

Golovin Alexander S. (b. 1982) — junior researcher, laboratory for stochastic modeling of information-computing and telecommunication systems, Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre of the Russian Academy of Science, 11 Pushkinskaya Str., Petrozavodsk 185910, Republic of Karelia, Russian Federation; lecturer, Department of Applied Mathematics and Cybernetics, Petrozavodsk State University, 33 Lenina Pr., Petrozavodsk 185910, Republic of Karelia, Russian Federation; golovin@krc.karelia.ru

Morozov Evsey V. (b. 1947) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, main researcher, laboratory for stochastic modeling of information-computing and telecommunication systems, Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre of the Russian Academy of Science, 11 Pushkinskaya Str., Petrozavodsk 185910, Republic of Karelia, Russian Federation; professor, Department of Applied Mathematics and Cybernetics, Petrozavodsk State University, 33 Lenina Pr., Petrozavodsk 185910, Republic of Karelia, Russian Federation; emorozov@karelia.ru

Rumyantsev Alexander S. (b. 1986) — Doctor of Science in physics and mathematics, leading researcher, laboratory for stochastic modeling of information-computing and telecommunication systems, Institute of Applied Mathematical Research of Karelian Research Centre of the Russian Academy of Science, 11 Pushkinskaya Str., Petrozavodsk 185910, Republic of Karelia, Russian Federation; professor, Department of Applied Mathematics and Cybernetics, Petrozavodsk State University, 33 Lenina Pr., Petrozavodsk 185910, Republic of Karelia, Russian Federation; ar0@krc.karelia.ru

БАЛАНС ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ И ПОТРЕБЛЯЕМОЙ МОЩНОСТИ В СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ $M/G/1$ С ОТЛОЖЕННОЙ ОСТАНОВКОЙ И РАЗОГРЕВОМ*

А. С. Головин^{1,2}, *Е. В. Морозов*^{1,2}, *А. С. Румянцев*^{1,2}

¹Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра Российской академии наук

²Петрозаводский государственный университет

Аннотация: Рассматривается система обслуживания $M/G/1$ с периодами остановки, разогрева и ожидания остановки в условиях, когда указанные периоды имеют произвольные распределения. Модель рассматривается как односерверная система обслуживания с исключительным первым обслуживанием. С использованием регенеративного анализа найден явный вид (в форме преобразований) стационарных распределений нагрузки и времени отклика, а также стационарная средняя потребляемая мощность. Получено решение задачи минимизации стационарной средней потребляемой мощности при контролируемой деградации качества обслуживания за счет выбора длительности ожидания остановки. Показано, что константной длительности ожидания остановки достаточно для обеспечения оптимальности. Численно исследован баланс между потребляемой мощностью и ключевыми характеристиками производительности в более крупных моделях, таких как гетерогенный пул серверов.

Ключевые слова: ожидание остановки; энергоэффективность; особое первое обслуживание; монотонность характеристик производительности; упорядоченность преобразований Лапласа; оптимальная политика

DOI: 10.14357/08696527260204

EDN: OCWTSM

Литература

1. *Oma R., Nakamura S., Duolikun D., Enokido T., Takizawa M.* An energy-efficient model for fog computing in the Internet of Things (IoT) // *Internet of Things*, 2018. Vol. 1-2. P. 14–26. doi: 10.1016/j.iot.2018.08.003.
2. *Ever E., Shah P., Mostarda L., Omondi F., Gemikonakli O.* On the performance, availability and energy consumption modelling of clustered IoT systems // *Computing*, 2019. Vol. 101. Iss. 12. P. 1935–1970. doi: 10.1007/s00607-019-00720-9.
3. *Tang C.-J., Dai M.-R., Chuang C.-C., Chiu Y.-S.* Energy management for the homogeneous server clusters offering web services // *Energ. Effic.*, 2016. Vol. 9. Iss. 5. P. 1115–1144. doi: 10.1007/s12053-015-9412-9.

*Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по Соглашению № 075-15-2025-345.

4. Fourneau J.-M. Modeling green data-centers and jobs balancing with energy packet networks and interrupted poisson energy arrivals // SN Computer Science, 2020. Vol. 1. Art. 28. 6 p. doi: 10.1007/s42979-019-0029-5.
5. Kuehn P. J., Mashaly M. DVFS-power management and performance engineering of data center server clusters // 15th Annual Conference on Wireless On-demand Network Systems and Services Proceedings. — IEEE, 2019. P. 91–98. doi: 10.23919/WONS.2019.8795470.
6. Basmadjian R., Botero J. F., Giuliani G., Hesselbach X., Klingert S., De Meer H. Making data centers fit for demand response: Introducing GreenSDA and GreenSLA contracts // IEEE T. Smart Grid, 2018. Vol. 9. Iss. 4. P. 3453–3464. doi: 10.1109/TSG.2016.2632526.
7. Kuehn P. J., Mashaly M. E. Automatic energy efficiency management of data center resources by load-dependent server activation and sleep modes // Ad Hoc Netw., 2015. Vol. 25. P. 497–504. doi: 10.1016/j.adhoc.2014.11.013.
8. Tian N., Zhang Z. G. Vacation queueing models: Theory and applications. — New York, NY, USA: Springer, 2006. 386 p.
9. Gómez B., Bayhan S., Coronado E., Villalón J., Garrido A. LESS-ON: Load-aware edge server shutdown for energy saving in cellular networks // Comput. Netw., 2024. Vol. 252. Art. 110675. 15 p. doi: 10.1016/j.comnet.2024.110675.
10. Deng Y., Braun W. J., Zhao Y. Q. $M/M/1$ queueing system with delayed controlled vacation // Operations Research Transactions, 1999. Vol. 4. No. 1. P. 17–30.
11. Herlich M., Bredenbals N., Karl H. Delayed (de-)activation in servers with a sleep mode // Sustain. Comput. — Infor., 2016. Vol. 10. P. 48–55. doi: 10.1016/j.suscom.2016.04.002.
12. Gandhi A., Doroudi S., Harchol-Balter M., Scheller-Wolf A. Exact analysis of the $M/M/k$ /setup class of Markov chains via recursive renewal reward // Queueing Syst., 2014. Vol. 77. Iss. 2. P. 177–209. doi: 10.1007/s11134-014-9409-7.
13. Golovin A., Rumyantsev A. Energy efficiency of a single-server with inactive state by matrix-analytic method // Information technologies and mathematical modelling. Queueing theory and applications / Eds. A. Dudin, A. Nazarov, A. Moiseev. — Communications in computer and information science ser. — Cham: Springer, 2022. Vol. 1605. P. 172–184. doi: 10.1007/978-3-031-09331-9_14.
14. Le-Anh T., Phung-Duc T. Energy-performance tradeoffs in server farms with batch services and setup times // Perform. Evaluation, 2025. Vol. 168. Art. 102468. 20 p. doi: 10.1016/j.peva.2025.102468.
15. Pender J., Phung-Duc T. A law of large numbers for $M/M/c$ /Delayoff-Setup queues with nonstationary arrivals // Analytical and stochastic modelling techniques and applications / Eds. S. Wittevrongel, T. Phung-Duc. — Lecture notes in computer science ser. — Cham: Springer, 2016. Vol. 9845. P. 253–268. doi: 10.1007/978-3-319-43904-4_18.
16. Hyttiä E., Down D., Lassila P., Aalto S. Dynamic control of running servers // Measurement, modelling and evaluation of computing systems / Eds. R. German, K.-S. Hielscher, U. R. Krieger. — Cham: Springer, 2018. P. 127–141. doi: 10.1007/978-3-319-74947-1_9.

17. *Le-Anh T., Ishiguro K., Phung-Duc T.* Performance analysis of multi-server queueing systems with batch services and setup times // Computer performance engineering and stochastic modelling / Eds. M. Iacono, M. Scarpa, E. Barbierato, S. Serrano, D. Cerotti, F. Longo. — Lecture notes in computer science ser. — Cham: Springer, 2023. Vol. 14231. P. 111–122. doi: 10.1007/978-3-031-43185-2_8.
18. *Feitelson D. G.* Workload modeling for computer systems performance evaluation. — Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2015. 551 p. doi: 10.1017/CBO9781139939690.
19. *Welch P. D.* On a generalized $M/G/1$ queueing process in which the first customer of each busy period receives exceptional service // Oper. Res., 1964. Vol. 12. Iss. 5. P. 736–752. doi: 10.1287/opre.12.5.736.
20. *Kengaku H., Miyazawa M.* A regenerative cycle approach to an $M/G/1$ queue with exceptional service // J. Oper. Res. Soc. Jpn., 2000. Vol. 43. Iss. 4. P. 486–504. doi: 10.15807/jorsj.43.486.
21. *Bischof W.* Analysis of $M/G/1$ -queues with setup times and vacations under six different service disciplines // Queueing Syst., 2001. Vol. 39. Iss. 4. P. 265–301. doi: 10.1023/A:1013992708103.
22. *Sigman K.* Appendix: A primer on heavy-tailed distributions // Queueing Syst., 1999. Vol. 33. Iss. 1. P. 261–275. doi: 10.1023/A:1019180230133.
23. *Asmussen S.* Applied probability and queues. — New York, NY, USA: Springer, 2003. 438 p.
24. *Morozov E., Steyaert B.* Stability analysis of regenerative queueing models: Mathematical methods and applications. — Cham: Springer, 2021. 233 p. doi: 10.1007/978-3-030-82438-9.
25. *Golovin A., Basmadjian R., Astafiev S., Rumyantsev A.* Little’s law in a single-server system with inactive state for demand-response in data centers with Green SLAs // 14th ACM Conference (International) on Future Energy Systems Companion Proceedings. — New York, NY, USA: ACM, 2023. P. 91–97. doi: 10.1145/3599733.3600255. EDN: QJSTML.
26. *Shaked M., Shanthikumar J. G.* Stochastic orders. — New York, NY, USA: Springer, 2007. 473 p. doi: 10.1007/978-0-387-34675-5.
27. *Gebrehiwot M. E., Aalto S., Lassila P.* Optimal sleep-state control of energy-aware $M/G/1$ queues // EAI Endorsed Transactions Internet of Things, 2014. Vol. 1. Iss. 4. P. 82–89. doi: 10.4108/icst.Valuetools.2014.258149.
28. *Williams J. K., Harchol-Balter M., Wang W.* The $M/M/k$ with deterministic setup times // Proceedings ACM Measurement Analysis Computing Systems, 2022. Vol. 6. Iss. 3. P. 1–45. doi: 10.1145/3570617.

Поступила в редакцию 03.03.2026

Принята к публикации 15.04.2026

МНОГОМЕРНЫЕ КВАЗИСТЕПЕННЫЕ СМЕШАННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ*

М. А. Иванов¹, В. Ю. Королев²

Аннотация: Вводится и исследуется класс многомерных эллиптически контурированных распределений, таких что каждая одномерная проекция случайного вектора с таким распределением имеет квазистепенное смешанное нормальное распределение, совпадающее с распределением случайной величины $|QX|^\gamma \text{sign} X$, где $\gamma > 0$; Q — некоторая положительная случайная величина; X — случайная величина со стандартным нормальным распределением, независимая от Q . При $\gamma > 1$ плотности многомерных квазистепенных смешанных нормальных распределений в нуле бесконечны. Это свойство позволяет использовать многомерные квазистепенные смешанные нормальные распределения с $\gamma > 1$ в качестве моделей статистических закономерностей поведения приращений многомерных процессов, у которых относительно продолжительные периоды, когда процесс либо не изменяется, либо мало изменяется, чередуются с периодами, когда наблюдаются довольно большие скачки. Но в отличие от «чистых» квазистепенных нормальных распределений квазистепенные смешанные нормальные распределения имеют более тяжелые хвосты, что может быть полезным, если исследуемый процесс иногда демонстрирует очень большие скачки. Приводятся предельные теоремы о сходимости распределений многомерных статистик, построенных по выборкам случайного объема, в том числе случайных сумм, к многомерным квазистепенным смешанным нормальным распределениям. В качестве примера рассматривается многомерное эллиптически контурированное квазистепенное логистическое распределение.

Ключевые слова: квазистепенное нормальное распределение; масштабная смесь нормальных законов; эллиптически контурированное распределение; предельная теорема; случайная сумма

DOI: 10.14357/08696527260205

EDN: QAQWAA

1 Введение

В данной статье вводится и исследуется класс многомерных эллиптически контурированных распределений, таких что каждая одномерная проекция случайно-

*Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по Соглашению № 075-15-2025-345.

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, ivanovma1@my.msu.ru

²Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, vkorolev@cs.msu.ru

го вектора с таким распределением имеет квазистепенное смешанное нормальное распределение. Одномерные квазистепенные смешанные нормальные распределения введены в работе [1]. Интерес к этой проблеме восходит к Ю. В. Прохорову, который в конце 1980-х гг. предложил задачу: при каких показателях степени распределения степеней нормально распределенных случайных величин представляют собой масштабные смеси нормальных законов. Эта задача была частично решена учеником Ю. В. Прохорова Э. Б. Багириным [2, 3]. Исчерпывающее решение этой задачи получено в работах [4, 5].

Возможность представления вероятностного распределения в виде смеси нормальных законов полезна по следующим соображениям. Если какое-либо распределение вероятностей можно представить в виде масштабной смеси нормальных законов, то, как показано в работе [6], такое распределение может быть предельным для случайных сумм независимых случайных величин или более общих статистик, построенных по выборкам случайного объема, а наличие такого свойства, в свою очередь, может служить обоснованием применения такого распределения в качестве асимптотической аппроксимации в задачах анализа данных или описательной статистики (подробнее об этом см. [7]). В работе [1] показано, что если распределение некоторой случайной величины Y допускает представление в виде масштабной смеси нормальных распределений, то операция «возведения в квазистепень» не выводит ее распределение за пределы семейства масштабных смесей нормальных распределений. Поэтому распределения квазистепеней случайных величин, распределения которых представляют собой масштабные смеси нормальных законов, также могут быть предельными для случайных сумм и вполне обоснованно использоваться в качестве асимптотических аппроксимаций в задачах прикладной статистики.

В данной статье результаты работы [1] обобщаются на многомерный случай с использованием подхода, реализованного в статье [8] для определения многомерного эллиптически контурированного логистического распределения. При этом в качестве примера рассматривается многомерное квазистепенное логистическое распределение.

2 Обозначения

Пусть $r \in \mathbb{N}$. Обозначение \mathbf{x} используется для вектор-столбца $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)^\top$. Вектор со всеми нулевыми координатами будет обозначаться $\mathbf{0}$. Будем считать, что все случайные величины и случайные векторы заданы на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Распределения случайной величины Y или r -мерного случайного вектора \mathbf{Y} относительно вероятностной меры \mathbb{P} будут обозначаться $\mathcal{L}(Y)$ и $\mathcal{L}(\mathbf{Y})$ соответственно. Под векторами подразумеваются вектор-столбцы.

Сходимость по распределению, совпадение распределений и сходимость по вероятности будут соответственно обозначаться символами \implies , $\stackrel{d}{=}$ и $\xrightarrow{\mathbb{P}}$. Про-

извлечение *независимых* случайных элементов будет обозначаться символом \circ . Символ \square означает конец доказательства. Будем говорить, что $N_n \rightarrow \infty$ по вероятности, если $P(N_n \geq K) \rightarrow 1$ для любого $K \in (0, \infty)$.

В дальнейшем для удобства обозначений и краткости доказательств изложение будет вестись в терминах случайных величин, хотя фактически будут подразумеваться их распределения.

Любая случайная величина со стандартной нормальной функцией распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

будет обозначаться X .

Пусть Σ — симметричная положительно определенная матрица размера $r \times r$. Нормальное распределение в \mathbb{R}^r с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей Σ будет обозначаться $\mathfrak{N}_{r,\Sigma}$. Это распределение задается лебеговой плотностью

$$\varphi_{r,\Sigma}(\mathbf{x}) = \frac{\exp\{-(1/2)\mathbf{x}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{x}\}}{(2\pi)^{r/2} |\Sigma|^{1/2}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r.$$

Характеристическая функция $f_{\mathbf{X}_{r,\Sigma}}(\mathbf{t})$ случайного вектора $\mathbf{X}_{r,\Sigma} = (X_1, \dots, X_r)^\top$, такого что $\mathcal{L}(\mathbf{X}_{r,\Sigma}) = \mathfrak{N}_{r,\Sigma}$, имеет вид:

$$f_{\mathbf{X}_{r,\Sigma}}(\mathbf{u}) \equiv E \exp\{i\mathbf{u}^\top \mathbf{X}_{r,\Sigma}\} = \exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \Sigma \mathbf{u}\right\}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^r. \quad (1)$$

Плотность строго устойчивого распределения с характеристическим показателем α и параметром формы θ , соответствующую характеристической функции

$$s_{\alpha,\theta}(t) = \exp\left\{-|t|^\alpha \exp\left\{-\frac{1}{2} i\pi\theta\alpha \operatorname{sign} t\right\}\right\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $0 < \alpha \leq 2$ и $|\theta| \leq \min\{1, 2/\alpha - 1\}$, будем обозначать $s_{\alpha,\theta}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (см., например, [9, теорема В.4]).

Значения $\theta = 1$ и $0 < \alpha \leq 1$ соответствуют односторонним строго устойчивым законам, сосредоточенным на неотрицательной полуоси. Пары $\alpha = 1$, $\theta = \pm 1$ соответствуют распределениям, вырожденным в ± 1 соответственно. В частности, $P(S_{1,1} = 1) = 1$. Остальные устойчивые распределения абсолютно непрерывны. Явные выражения устойчивых плотностей в терминах элементарных функций отсутствуют за четырьмя исключениями (нормальный закон ($\alpha = 2$, $\theta = 0$), распределение Коши ($\alpha = 1$, $\theta = 0$), распределение Леви ($\alpha = 1/2$, $\theta = 1$) и распределение, симметричное к распределению Леви ($\alpha = 1/2$, $\theta = -1$)). Выражения устойчивых плотностей в терминах функций Фокса (обобщенных G -функций Мейера) можно найти в [10, 11].

3 Одномерные квазистепенные нормальные распределения

Пусть \mathfrak{A} — класс случайных величин Y , распределения которых представимы в виде масштабных смесей нормальных законов. Это значит, что для каждой случайной величины $Y \in \mathfrak{A}$ существует случайная величина $Q_Y \geq 0$, обеспечивающая представление

$$Y \stackrel{d}{=} X \circ Q_Y. \quad (2)$$

Заметим, что все случайные величины класса \mathfrak{A} имеют симметричные распределения ввиду симметричности нормального распределения.

Пусть \mathfrak{B} — класс случайных величин $M \geq 0$, таких что $M^{(s)} \equiv M - M' \in \mathfrak{A}$, где случайные величины M и M' независимы и одинаково распределены. В работах [2, 3] были доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $Y \in \mathfrak{A}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $Y^{2k} \in \mathfrak{B}$.

Следствие 1. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда $X^{2k-1} \in \mathfrak{A}$. Иными словами, распределение нормально распределенной случайной величины, возведенной в нечетную степень, представимо в виде масштабной смеси нормальных распределений.

В развитие результатов Э. Б. Багирова в статье [4] введено понятие *квазистепенного нормального распределения*.

Определение 1. Случайная величина X_γ имеет *квазистепенное нормальное распределение* с параметром $\gamma > 0$, если

$$|X_\gamma| \stackrel{d}{=} |X|^\gamma,$$

а плотность X_γ имеет вид

$$p_\gamma(x) = \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}} |x|^{1/\gamma-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} |x|^{2/\gamma} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Несложно видеть, что при $0 < \gamma \leq 1$ плотности квазистепенных нормальных распределений имеют конечный максимум в нуле. При $\gamma > 1$ плотности квазистепенных нормальных распределений в нуле бесконечны. Это свойство позволяет использовать квазистепенные нормальные распределения с $\gamma > 1$, например в качестве моделей статистических закономерностей поведения приращений процессов, у которых относительно продолжительные периоды, когда процесс либо не изменяется, либо мало изменяется, чередуются с периодами, когда наблюдаются довольно большие скачки.

В [4] также доказано, что при $\gamma \geq 2$ распределение случайной величины X_γ можно представить в виде масштабной смеси нормальных законов с некоторой смешивающей случайной величиной A_γ :

$$X_\gamma \stackrel{d}{=} A_\gamma \circ X.$$

Легко видеть, что при $\gamma = 1$ плотность (3) совпадает с плотностью стандартного нормального распределения, т. е. становится тривиальной смесью нормальных распределений. Поэтому логично предположить, что представление в виде такого рода смеси возможно и при $\gamma \in [1, 2)$. В работе [5] показано, что это действительно так (см. также [12]), а именно: справедлив следующий результат.

Теорема 2. Пусть $\gamma > 0$. Уравнение $|X_\gamma| \stackrel{d}{=} |X| \circ A_\gamma$ разрешимо относительно неотрицательной случайной величины A_γ тогда и только тогда, когда $\gamma \geq 1$. При этом

$$A_\gamma \stackrel{d}{=} 2^{(\gamma-1)/2} U_{2,1/\gamma}^{-1/2} \circ B_{1/2,(\gamma-1)/2}^{\gamma/2}, \quad (4)$$

где случайная величина $U_{\alpha,\alpha'}$ определена для $\alpha > 0$ и $\alpha' \in (0, 1]$, причем $P(U_{\alpha,1} = 1) = 1$, а при $0 < \alpha' < 1$ случайная величина $U_{\alpha,\alpha'}$ имеет плотность

$$u_{\alpha,\alpha'}(x) = \frac{\alpha' \Gamma(1/\alpha)}{\Gamma(1/(\alpha\alpha'))} \frac{s_{\alpha',1}(x)}{x^{1/\alpha}}, \quad x \geq 0.$$

Случайная величина $B_{\alpha,\beta}$ определена для $\alpha, \beta > 0$ и имеет бета-распределение с плотностью

$$b_{\alpha,\beta}(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, \quad 0 < x < 1.$$

Здесь $B(\alpha,\beta)$ — бета-функция:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Эту теорему можно сформулировать иначе: распределение случайной величины X_γ представимо в виде масштабной смеси нормального распределения тогда и только тогда, когда $\gamma \geq 1$, причем смешивающая случайная величина имеет вид (4).

Следствие 2. $X_\gamma \in \mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда $\gamma \geq 1$.

Что касается свойств распределения случайной величины $U_{\alpha,\alpha'}$, то, как показано в работе [13], для $\alpha \in (0, 2]$, $\alpha' \in (0, 1]$ при $x \rightarrow \infty$ выполнено соотношение $P(U_{\alpha,\alpha'} > x) = O(x^{\alpha'+1/\alpha})$; моменты случайной величины $U_{\alpha,\alpha'}$ порядков $\delta \geq 1/\alpha + \alpha'$ не существуют, тогда как при $\delta < 1/\alpha + \alpha'$

$$EU_{\alpha,\alpha'}^\delta = \frac{\alpha' \Gamma(1/\alpha) \Gamma((\alpha(\alpha' - \delta) + 1)/(\alpha\alpha'))}{\Gamma(1/(\alpha\alpha')) \Gamma(1 - \delta + 1/\alpha)}.$$

Более того, при $\delta \geq -1/\alpha$ справедливо соотношение

$$EU_{\alpha,\alpha'}^{-\delta} = \frac{\Gamma(1/\alpha) \Gamma((\delta\alpha + 1)/(\alpha\alpha'))}{\Gamma(1/(\alpha\alpha')) \Gamma((\delta\alpha + 1)/\alpha)}. \quad (5)$$

4 Одномерные квазистепенные смешанные нормальные распределения

В работе [1] понятие квазистепени обобщено на случайные величины, распределения которых представляют собой масштабные смеси нормальных законов, и исследованы некоторые свойства распределений таких случайных величин, названных квазистепенными смешанными нормальными.

Определение 2. Пусть $\gamma > 0$, $Y \in \mathfrak{A}$, Y_γ — случайная величина с симметричным распределением, такая что $|Y_\gamma| \stackrel{d}{=} |Y|^\gamma$. Распределение случайной величины Y_γ называется квазистепенным *смешанным* нормальным с показателем γ .

Определение 3. Пусть $\gamma > 0$. Введем класс $\mathfrak{A}_\gamma = \{Y_\gamma : |Y_\gamma| = |Y|^\gamma, Y \in \mathfrak{A}\}$. Класс \mathfrak{A}_γ состоит из всех случайных величин с квазистепенными смешанными нормальными распределениями с показателем γ .

В указанной работе доказаны следующие утверждения.

Теорема 3. Если $\gamma \geq 1$, то $\mathfrak{A}_\gamma \subset \mathfrak{A}$, т. е. все квазистепенные смешанные нормальные распределения с $\gamma \geq 1$ представимы в виде масштабных смесей нормальных распределений. Более того, если $Y_\gamma \in \mathfrak{A}_\gamma$, то

$$Y_\gamma \stackrel{d}{=} (Q_Y^\gamma \circ A_\gamma) \circ X, \quad (6)$$

где A_γ — случайная величина, введенная в (4), т. е. случайная величина Y_γ имеет смешанное нормальное распределение со случайным масштабом $Q_Y^\gamma \circ A_\gamma$. При $\gamma \in (0, 1)$ существует случайная величина $Y_\gamma \in \mathfrak{A}_\gamma$, такая что $Y_\gamma \in \mathfrak{A}$.

Теорема 4. Пусть $\gamma \geq 2$, $Y_\gamma \in \mathfrak{A}_\gamma$. Тогда $|Y_\gamma| \in \mathfrak{B}$.

В работе [1] также показано, что при $\gamma \geq 2$, $Y_\gamma \in \mathfrak{A}_\gamma$ распределения случайных величин $Y_\gamma \in \mathfrak{A}_\gamma$ и $|Y_\gamma|$ безгранично делимы.

При $\gamma > 1$ плотности квазистепенных смешанных нормальных распределений в нуле бесконечны. Это свойство также позволяет использовать квазистепенные смешанные нормальные распределения с $\gamma > 1$ в качестве моделей статистических закономерностей поведения приращений процессов, у которых относительно продолжительные периоды, когда процесс либо не изменяется, либо мало изменяется, чередуются с периодами, когда наблюдаются довольно большие скачки. Но в отличие от «чистых» квазистепенных нормальных распределений квазистепенные смешанные нормальные распределения имеют более тяжелые хвосты, что может быть полезным, если исследуемый процесс иногда демонстрирует *очень* большие скачки.

5 Многомерные квазистепенные смешанные нормальные распределения

В этом разделе будем рассматривать многомерные эллиптически контурированные квазистепенные смешанные нормальные распределения по аналогии с тем,

как это было сделано в работах [8, 14] для многомерного логистического распределения, используя свойство последнего быть масштабной смесью нормальных законов, в которой смешивающим распределением служит распределение Колмогорова [15, 16].

Введем класс \mathfrak{A}^r случайных векторов \mathbf{Y} , распределения которых представимы в виде скалярных масштабных смесей r -мерных нормальных законов. Это означает, что для каждого случайного вектора $\mathbf{Y} \in \mathfrak{A}^r$ существует случайная величина $Q_{\mathbf{Y}} \geq 0$, обеспечивающая представление

$$\mathbf{Y} \stackrel{d}{=} Q_{\mathbf{Y}} \circ \mathbf{X}_{r,\Sigma}.$$

Заметим, что все случайные векторы класса \mathfrak{A}^r имеют эллиптически контурированные распределения.

Цель — построить такой многомерный эллиптически контурированный аналог квазистепенного смешанного нормального распределения, который обладает специальным свойством: все одномерные проекции случайного вектора с таким распределением должны иметь одномерные квазистепенные смешанные нормальные распределения того же типа. Для этого необходимо соблюсти условие состоятельности (consistency condition), сформулированное в работе [17]: маргинальные распределения многомерного эллиптически контурированного распределения принадлежат к тому же типу тогда и только тогда, когда смешивающее распределение в стохастическом представлении, аналогичном (2), не зависит от размерности r . Чтобы это сделать, формально перенесем свойство (6) одномерного квазистепенного смешанного нормального распределения быть масштабной смесью нормальных законов на многомерный случай. Поскольку скалярные масштабные смеси нормальных законов эллиптически контурированы [18–20], полученное таким образом многомерное квазистепенное нормальное распределение будет эллиптически контурированным. Таким образом, приходим к следующему определению.

Определение 4. Пусть $\gamma > 0$, Σ — положительно определенная матрица размера $r \times r$, Q — положительная случайная величина. Распределение r -мерного случайного вектора $\mathbf{Y}_{r,\gamma,\Sigma} = (Y_1, \dots, Y_r)^\top$, определяемого как

$$\mathbf{Y}_{r,\gamma,\Sigma} = (Q^\gamma \circ A_\gamma) \circ \mathbf{X}_{r,\Sigma}, \tag{7}$$

где A_γ — случайная величина, введенная в (4), называется *многомерным эллиптически контурированным квазистепенным Q -смешанным нормальным распределением* с параметрами γ и Σ .

Здесь случайная величина Q играет роль случайного масштаба в «исходной» одномерной масштабной смеси нормальных законов, определяя ее тип, равно как и тип ее многомерного аналога, введенного в (7).

Обозначим $D_{\gamma,Q} = Q^\gamma \circ A_\gamma$ и $K_{\gamma,Q}(x) = \mathbf{P}(D_{\gamma,Q} < x)$ для $x \in \mathbb{R}$.

Так как матрица Σ положительно определена, понятно, что $\mathbf{x}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{x} \geq 0$. Обозначим $y^2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{x}$. Тогда

$$\varphi_{r,\Sigma}(\mathbf{x}) = \frac{\exp\{-(1/2)y^2(\mathbf{x})\}}{(2\pi)^{r/2}|\Sigma|^{1/2}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r.$$

Лебегова плотность $f_{r,\gamma,\Sigma}(\mathbf{x})$ случайного вектора $\mathbf{Y}_{r,\gamma,\Sigma}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} f_{r,\Sigma}(\mathbf{x}) &= \int_0^\infty \frac{1}{z} \varphi_{r,\Sigma}\left(\frac{y(\mathbf{x})}{z}\right) dK_{\gamma,Q}(z) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{r/2}|\Sigma|^{1/2}} \int_0^\infty \frac{1}{z} \exp\left\{-\frac{y^2(\mathbf{x})}{2z^2}\right\} dK_{\gamma,Q}(z), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r. \end{aligned}$$

Найдем моментные характеристики случайного вектора $\mathbf{Y}_{r,\gamma,\Sigma}$ в предположении, что $\gamma \geq 1$. Несложно видеть, что

$$\mathbf{E}\mathbf{Y}_{r,\gamma,\Sigma} = \mathbf{0}.$$

Пусть $\sigma_{i,j}$ — элемент ковариационной матрицы Σ , т. е. $\sigma_{i,j} = \text{Cov}(X_i, X_j)$. Тогда, используя (5), получим

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_i, Y_j) &= \mathbf{E}Y_i Y_j = \mathbf{E}(D_{\gamma,Q} \circ X_i)(D_{\gamma,Q} \circ X_j) = \\ &= \mathbf{E}(X_i X_j) \int_0^\infty u^2 dK_{\gamma,Q}(u) = \sigma_{i,j} \mathbf{E}D_{\gamma,Q}^2 = \sigma_{i,j} \mathbf{E}A_{\gamma,2}^2 \mathbf{E}Q^{2\gamma} = \\ &= 2^{\gamma-1} \sigma_{i,j} \mathbf{E}Q^{2\gamma} \mathbf{E}U_{2,1/\gamma}^{-1} \mathbf{E}B_{1/2,(\gamma-1)/2}^\gamma = \\ &= \frac{2^\gamma \Gamma(\gamma) \mathbf{B}(\gamma+1/2, (\gamma-1)/2)}{\Gamma(\gamma/2) \mathbf{B}(1/2, (\gamma-1)/2)} \mathbf{E}Q^{2\gamma} \sigma_{i,j} = \frac{2^{\gamma+1} \Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma+1/2)}{\gamma \sqrt{\pi} \Gamma(\gamma/2)} \mathbf{E}Q^{2\gamma} \sigma_{i,j}. \quad (8) \end{aligned}$$

Другими словами, ковариационная матрица случайного вектора $\mathbf{Y}_{r,\gamma,\Sigma}$ имеет вид:

$$\text{Cov } \mathbf{Y}_{r,\gamma,\Sigma} = c_\gamma \mathbf{E}Q^{2\gamma} \Sigma,$$

где

$$c_\gamma = \frac{2^{\gamma+1} \Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma+1/2)}{\gamma \sqrt{\pi} \Gamma(\gamma/2)}. \quad (9)$$

Следующие утверждения описывают некоторые свойства введенных таким образом многомерных эллиптически контурированных квазистепенных Q -смешанных нормальных распределений.

Теорема 5. Пусть $p \in \mathbb{N}$, $p \leq r$, Σ — симметричная положительно определенная матрица размера $r \times r$, V — матрица размера $p \times r$ ранга p , Q — положительная случайная величина, $\gamma \geq 1$, $\mathbf{Y}_{r,\gamma,\Sigma}$ — r -мерный случайный вектор с эллиптически контурированным квазистепенным Q -смешанным нормальным распределением с матричным параметром Σ . Тогда случайный вектор $V\mathbf{Y}_{r,\gamma,\Sigma}$ имеет эллиптически контурированное квазистепенное Q -смешанное нормальное распределение с матричным параметром $V\Sigma V^\top$, т. е. $V\mathbf{Y}_{r,\gamma,\Sigma} \stackrel{d}{=} \mathbf{Y}_{p,\gamma,V\Sigma V^\top}$.

Доказательство. Из определения многомерного эллиптически контурированного квазистепенного Q -смешанного нормального распределения с учетом хорошо известного свойства линейно преобразованных случайных векторов с многомерным нормальным распределением (см., например, [21, теорема 2.4.4]) имеем

$$\begin{aligned} V\mathbf{Y}_{r,\gamma,\Sigma} &\stackrel{d}{=} V(D_{\gamma,Q} \circ \mathbf{X}_{r,\Sigma}) \stackrel{d}{=} D_{\gamma,Q} \circ (V\mathbf{X}_{r,\Sigma}) \stackrel{d}{=} \\ &\stackrel{d}{=} D_{\gamma,Q} \circ \mathbf{X}_{p,V\Sigma V^\top} \stackrel{d}{=} \mathbf{Y}_{p,\gamma,V\Sigma V^\top}. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 6. Пусть $\gamma \geq 1$, Q — положительная случайная величина, такая что $\mathbb{E}Q^{2\gamma} < \infty$. Случайный вектор имеет r -мерное эллиптически контурированное квазистепенное Q -смешанное нормальное распределение тогда и только тогда, когда каждая линейная комбинация его координат имеет одномерное квазистепенное Q -смешанное нормальное распределение.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ — произвольный вектор, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Предположим, что случайный вектор \mathbf{U} имеет r -мерное эллиптически контурированное Q -смешанное нормальное распределение с некоторой положительно определенной матрицей Σ , т. е. $\mathbf{U} \stackrel{d}{=} \mathbf{Y}_{r,\gamma,\Sigma}$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\top \mathbf{U} &\stackrel{d}{=} \mathbf{x}^\top \mathbf{Y}_{r,\gamma,\Sigma} \stackrel{d}{=} \mathbf{x}^\top (D_{\gamma,Q} \circ \mathbf{X}_{r,\Sigma}) \stackrel{d}{=} D_{\gamma,Q} \circ (\mathbf{x}^\top \mathbf{X}_{r,\Sigma}) \stackrel{d}{=} \\ &\stackrel{d}{=} \sqrt{\mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x}} \cdot (D_{\gamma,Q} \circ X) \stackrel{d}{=} \sqrt{\mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x}} Y_{\gamma,Q}, \end{aligned}$$

где $Y_{\gamma,Q}$ — случайная величина с одномерным квазистепенным смешанным нормальным распределением. Таким образом, с точностью до скалярного «масштабного» множителя $\sqrt{\mathbf{x}^\top \Sigma \mathbf{x}}$ распределение линейной комбинации $\mathbf{x}^\top \mathbf{U}$ координат вектора \mathbf{U} (проекция \mathbf{U} на направление \mathbf{x}) представляет собой одномерное квазистепенное смешанное нормальное распределение. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть \mathbf{U} — r -мерный случайный вектор с $\mathbb{E}\mathbf{U} = \mathbf{0}$ и некоторой ковариационной матрицей C , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ — произвольный вектор. Рассмотрим линейную комбинацию $\mathbf{x}^\top \mathbf{U}$ координат вектора \mathbf{U} . Очевидно, имеем $\mathbb{E}\mathbf{x}^\top \mathbf{U} = \mathbf{0}$ и $D(\mathbf{x}^\top \mathbf{U}) = \mathbf{x}^\top C \mathbf{x}$. В соответствии с условием эта комбинация с точностью до

некоторого неслучайного параметра масштаба $\sigma > 0$ имеет одномерное квазистепенное Q -смешанное нормальное распределение, т. е. $\mathbf{x}^\top \mathbf{U} \stackrel{d}{=} \sigma Y_{\gamma, Q}$. С учетом соотношений (6), (4) и (8) имеем

$$\begin{aligned} DY_{\gamma, Q} &= D(Q^\gamma \circ A_\gamma \circ X) = E(Q^\gamma \circ A_\gamma \circ X)^2 = EQ^{2\gamma}EA_\gamma^2 = \\ &= 2^{\gamma-1}EQ^{2\gamma}E\left(U_{2,1/\gamma}^{-1} \circ B_{1/2,(\gamma-1)/2}^\gamma\right) = c_\gamma EQ^{2\gamma}, \end{aligned}$$

где константа c_γ введена в (9). Это означает, что

$$\mathbf{x}^\top C\mathbf{x} = D(\mathbf{x}^\top \mathbf{U}) = \sigma^2 DY_{\gamma, Q} = c_\gamma \sigma^2 EQ^{2\gamma},$$

откуда получаем

$$\sigma^2 = \frac{\mathbf{x}^\top C\mathbf{x}}{c_\gamma EQ^{2\gamma}} = k_\gamma \mathbf{x}^\top C\mathbf{x}, \quad (10)$$

где $k_\gamma = (c_\gamma EQ^{2\gamma})^{-1}$. Теперь рассмотрим характеристическую функцию $\mathfrak{h}(t)$ случайной величины $\mathbf{x}^\top \mathbf{U}$. В силу предположения и с учетом (10) имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(t) &= Ee^{it\mathbf{x}^\top \mathbf{U}} = Ee^{it\sigma Y_{\gamma, Q}} = E \exp\{it\sigma(D_{\gamma, Q} \circ X)\} = \\ &= \int_0^\infty E \exp\{it\sigma y X\} dK_{\gamma, Q}(y) = \int_0^\infty e^{-2t^2\sigma^2 y^2} dK_{\gamma, Q}(y) = \\ &= \int_0^\infty \exp\left\{k_\gamma t^2 y^2 (\mathbf{x}^\top C\mathbf{x})\right\} dK_{\gamma, Q}(y), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (11) \end{aligned}$$

Соотношение (11) справедливо для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$. Полагая в (11) $t = 1$ и принимая во внимание (1), замечаем, что (11) превращается в характеристическую функцию $\mathfrak{h}_U(\mathbf{x})$ случайного вектора \mathbf{U} :

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_U(\mathbf{x}) &= Ee^{i\mathbf{x}^\top \mathbf{U}} = \int_0^\infty \exp\left\{-k_\gamma y^2 (\mathbf{x}^\top C\mathbf{x})\right\} dK_{\gamma, Q}(y) = \\ &= \int_0^\infty E \exp\left\{i\mathbf{x}^\top (y\mathbf{X}_{r, k_\gamma C})\right\} dK_{\gamma, Q}(y) = E \exp\left\{i\mathbf{x}^\top (D_{\gamma, Q} \circ \mathbf{X}_{r, k_\gamma C})\right\} = \\ &= E \exp\{i\mathbf{x}^\top \mathbf{Y}_{r, \gamma, k_\gamma C}\}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r. \end{aligned}$$

Таким образом, случайный вектор \mathbf{U} имеет r -мерное эллиптически контурированное квазистепенное Q -смешанное нормальное распределение с матричным параметром $k_\gamma C = (c_\gamma EQ^{2\gamma})^{-1}C$. \square

6 Многомерное эллиптически контурированное квазистепенное Q -смешанное нормальное распределение как предельное для случайных сумм случайных векторов

В данном разделе рассмотрим предельные теоремы для многомерных статистик (измеримых функций от имеющихся данных), построенных по выборкам случайного объема, в которых многомерное эллиптически контурированное квазистепенное Q -смешанное нормальное распределение является предельным.

Как сказано в книге [22], *познавательная ценность теории вероятностей раскрывается только предельными теоремами*. В развитие этого тезиса в книге [23] высказана мысль о том, что в предельных теоремах теории вероятностей для сумм случайных величин или более общих статистик, когда в рассматриваемую схему вводится некоторый бесконечно большой (или бесконечно малый) параметр, например объем доступной выборки (или вероятность «редкого» события), проявляется принцип максимума энтропии, играющий фундаментальную роль в современной теории интеллектуальных систем. По-видимому, именно поэтому в прикладной теории вероятностей принято считать, что ту или иную вероятностную модель можно считать в достаточной мере адекватной только тогда, когда она оказывается *асимптотической аппроксимацией*, т. е. когда существует довольно простая предельная схема (например, схема суммирования или схема максимума) и соответствующая предельная теорема, в которой рассматриваемая модель выступает в качестве предельного распределения.

Начнем со схемы случайного суммирования.

Напомним, что символ \implies обозначает сходимость по распределению. Борелевскую σ -алгебру подмножеств \mathbb{R}^r обозначим \mathcal{B}_r .

Рассмотрим последовательность независимых необязательно одинаково распределенных случайных векторов $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$, принимающих значения в \mathbb{R}^r . Для натурального $n \geq 1$ положим

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_n.$$

Пусть N_1, N_2, \dots — последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин, определенных на том же вероятностном пространстве, так что при каждом $n \geq 1$ случайная величина N_n независима от последовательности $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$. Для определенности считаем, что $\sum_{j=1}^0 = 0$.

Лемма 1. *Предположим, что случайные векторы $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots$ удовлетворяют условию*

$$\mathcal{L} \left(b_n^{-1/2} \mathbf{S}_n \right) \implies \mathfrak{N}_{r, \Sigma} \quad (12)$$

при $n \rightarrow \infty$, где $\{b_n\}_{n \geq 1}$ — неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел; Σ — некоторая симметричная положительно определенная матрица. Другими словами, пусть

$$b_n^{-1/2} \mathbf{S}_n \implies \mathbf{X}_{r, \Sigma} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Пусть $\{d_n\}_{n \geq 1}$ — неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел. Тогда распределение F на \mathcal{B}_r , такое что

$$\mathcal{L}(d_n^{-1/2} \mathbf{S}_{N_n}) \Longrightarrow F \quad (n \rightarrow \infty),$$

существует тогда и только тогда, когда существует функция распределения $H(x)$, удовлетворяющая условиям:

- (i) $H(x) = 0$ при $x < 0$;
- (ii) для любого $A \in \mathcal{B}_r$

$$F(A) = \int_0^\infty \mathfrak{N}_{r, u\Sigma}(A) dH(u);$$

- (iii) $P(b_{N_n} < d_n x) \Longrightarrow H(x), n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Это утверждение — частный случай более общей теоремы, доказанной в работе [24]. \square

Теорема 7. Предположим, что случайные векторы $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ удовлетворяют условию (12) с некоторой неограниченно возрастающей последовательностью $\{b_n\}_{n \geq 1}$ положительных чисел и некоторой симметричной положительно определенной матрицей Σ . Пусть $\gamma \geq 1$, Q — некоторая положительная случайная величина, $\{d_n\}_{n \geq 1}$ — некоторая неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел. Тогда распределения случайных сумм \mathbf{S}_{N_n} независимых случайных векторов, нормированных числами d_n , сходятся к r -мерному эллиптически контурированному квазистепенному Q -смешанному нормальному распределению, т. е.

$$d_n^{-1} \mathbf{S}_{N_n} \Longrightarrow \mathbf{Y}_{r, \gamma, \Sigma} \quad (n \rightarrow \infty)$$

тогда и только тогда, когда

$$d_n^{-1} b_{N_n} \Longrightarrow D_{\gamma, Q}^2 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Доказательство. Заметим, что в рассматриваемом случае в качестве $F(A)$ в лемме 1 можно взять $F(A) = P(\mathbf{Y}_{r, \gamma, \Sigma} \in A)$, $A \in \mathcal{B}_r$. Далее, в силу (7) имеем

$$\begin{aligned} F(A) &= P(\mathbf{Y}_{r, \gamma, \Sigma} \in A) = P(D_{\gamma, Q} \circ \mathbf{X}_{r, \Sigma} \in A) = \\ &= \int_0^\infty \mathfrak{N}_{r, u\Sigma}(A) dP(D_{\gamma, Q}^2 < u), \quad A \in \mathcal{B}_r. \end{aligned}$$

Поэтому теорема 7 оказывается непосредственным следствием леммы 1 с $H(x) = P(D_{\gamma, Q}^2 < x)$. \square

7 Многомерное эллиптически контурированное квазистепенное Q -смешанное нормальное распределение как предельное для статистик, построенных по выборкам случайного объема

Теперь рассмотрим необходимые и достаточные условия сходимости распределений более общих многомерных статистик, построенных по выборкам случайного объема, к многомерным эллиптически контурированным квазистепенным Q -смешанным нормальным распределениям.

Формальная схема такова. Пусть $\{\mathbf{X}_n\}_{n \geq 1}$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в \mathbb{R}^r , $r \in \mathbb{N}$. Для $n \in \mathbb{N}$ пусть $\mathbf{T}_n = \mathbf{T}_n(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$ — статистика, т. е. измеримая функция случайных векторов $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ со значениями в \mathbb{R}^m , $m \in \mathbb{N}$. Пусть $\theta \in \mathbb{R}^m$. Предположим, что статистика \mathbf{T}_n асимптотически нормальна в том смысле, что

$$\sqrt{n}(\mathbf{T}_n - \theta) \implies \mathbf{X}_{m, \Sigma} \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (13)$$

где $\mathbf{X}_{m, \Sigma}$ — случайный вектор, имеющий m -мерное нормальное распределение с ковариационной матрицей Σ размера $m \times m$. Примеры статистик, удовлетворяющих (13), хорошо известны. Это выборочные квантили, оценки максимального правдоподобия многомерного параметра и т. д.

Пусть N_1, N_2, \dots — последовательность неотрицательных случайных величин, определенных на том же вероятностном пространстве так, что при каждом $n \geq 1$ случайная величина N_n независима от последовательности $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$. Для каждого $n \geq 1$ определим случайный вектор \mathbf{T}_{N_n} , полагая

$$\mathbf{T}_{N_n}(\omega) \equiv \mathbf{T}_{N_n(\omega)}(\mathbf{X}_1(\omega), \dots, \mathbf{X}_{N_n(\omega)}(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

Пусть $\gamma \geq 1$, Q — некоторая положительная случайная величина. В данном разделе рассмотрим условия, гарантирующие сходимость распределений m -мерных случайных векторов $\mathbf{L}_n = \sqrt{n}(\mathbf{T}_{N_n} - \theta)$ к m -мерному эллиптически контурированному квазистепенному Q -смешанному нормальному распределению $\mathcal{L}(\mathbf{Y}_{m, \gamma, \Sigma})$.

Как правило, в предельных теоремах теории вероятностей и математической статистики центрирование и нормирование случайных величин и векторов применяются для того, чтобы получить нетривиальные предельные распределения. Особо следует отметить, что для того, чтобы получить разумную асимптотическую аппроксимацию для распределения рассматриваемых случайных величин или векторов (в данном случае это \mathbf{T}_{N_n}), нормировка должна быть неслучайной. В противном случае аппроксимирующее распределение само становится случайным, так что задача вычисления его квантилей или критических значений становится бессмысленной. Поэтому, определяя вектор \mathbf{U}_n , нормируем статистику \mathbf{T}_{N_n} , построенную по выборке случайного объема, не корнем квадратным из объема выборки $\sqrt{N_n}$, а величиной \sqrt{n} . При этом n можно считать равным какому-либо параметру положения случайной величины N_n , например ее математическому ожиданию или медиане.

Лемма 2. *Предположим, что $N_n \rightarrow \infty$ по вероятности и статистика \mathbf{T}_n асимптотически нормальна в том смысле, что выполнено условие (13). Тогда случайный вектор \mathbf{U} , такой что*

$$\mathbf{U}_n = \sqrt{n}(\mathbf{T}_{N_n} - \theta) \implies \mathbf{U} \quad (n \rightarrow \infty),$$

существует тогда и только тогда, когда существует функция распределения $H(x)$ ($x \in \mathbb{R}$), такая что

- (i) $H(x) = 0$ при $x < 0$;
- (ii) для любого $A \in \mathcal{B}_r$

$$P(\mathbf{U} \in A) = \int_0^\infty \mathfrak{N}_{m, u\Sigma}(A) dH(u);$$

- (iii) $P(nN_n^{-1} < x) \implies H(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Данная лемма — частный случай более общего утверждения, доказанного в [25] и усиленного в [26] (см. теорему 8 в указанной работе). \square

Теорема 8. *Предположим, что $N_n \xrightarrow{P} \infty$ и статистика \mathbf{T}_n асимптотически нормальна в смысле (13). Пусть $\gamma \geq 1$, Q — некоторая положительная случайная величина. Для того чтобы распределение случайного вектора \mathbf{U}_n слабо сходилось при $n \rightarrow \infty$ к m -мерному эллиптически контурированному квазистепенному Q -смешанному нормальному распределению с той же самой матрицей Σ , которая фигурирует в условии (13), т. е.*

$$\mathbf{U}_n = \sqrt{n}(\mathbf{T}_{N_n} - \theta) \implies \mathbf{Y}_{m, \gamma, \Sigma},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$n^{-1}N_n \implies D_{\gamma, Q}^{-2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из леммы 2 с учетом (7) и определения случайной величины $D_{\gamma, Q}$. \square

8 Пример: многомерное эллиптически контурированное квазистепенное логистическое распределение

Одномерное логистическое распределение задается его функцией распределения

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

которая имеет почти такую же форму, как и нормальная функция распределения, но имеет более тяжелые хвосты и существенно проще вычисляется. Следует отметить, что равномерное расстояние (расстояние Колмогорова) между нормальной

функцией распределения и логистической функцией распределения со специально подобранными параметрами не превышает 0,01 [27] (однако, как известно, равномерное расстояние плохо оценивает различие в поведении хвостов функций распределения).

Логистическое распределение применяется во многих областях и имеет большую историю. Еще в 1830–1840 гг. это распределение было получено П.-Ф. Верхульстом (P.-F. Verhulst) в качестве решения некоторого дифференциального уравнения, описывающего рост популяции [28, 29]. Многие полезные свойства логистического распределения описаны в работах [8, 30].

В контексте задач, рассматриваемых в настоящей работе, ключевую роль играет следующее свойство логистического распределения. В 1974 г. в работе [15] было отмечено, что логистическое распределение представляет собой масштабную смесь нормальных законов, в которой смешивающее распределение соответствует квадрату случайной величины, имеющей хорошо известное в статистике распределение Колмогорова:

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 + e^{-x}} = \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{x}{2z}\right) dK(z), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

где

$$K(x) = 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \exp\{-j^2 x^2\}, \quad x \geq 0 \quad (16)$$

(см. пример 4.3 в [15]). Подробное доказательство этого результата приведено в статье [16].

Пусть L и D — случайные величины с функциями распределения (14) и (16) соответственно. Тогда соотношение (15) можно записать в следующем виде:

$$L \stackrel{d}{=} Q \circ X, \quad (17)$$

где $Q = 2D$ (ср. с (2)).

Пусть $r \in \mathbb{N}$, Σ — некоторая положительно определенная матрица размера $r \times r$. Соотношение (17) позволило в статье [8] ввести многомерное логистическое распределение как распределение случайного вектора

$$\mathbf{L}_{r,\Sigma} = 2D \circ \mathbf{X}_{r,\Sigma}.$$

Ясно, что распределение вектора $\mathbf{L}_{r,\Sigma}$ эллиптически контурировано.

Введем одномерное квазистепенное логистическое распределение как распределение случайной величины L^γ , где $\gamma > 0$. Несложно показать, что при $\gamma \geq 1$ это распределение представляет собой масштабную смесь нормальных законов:

$$L^\gamma \stackrel{d}{=} (2D)^\gamma \circ A_\gamma \circ X,$$

где A_γ — положительная случайная величина, введенная в (4).

Пусть $\gamma \geq 1$. Определим r -мерное квазистепенное логистическое распределение как распределение случайного вектора

$$\mathbf{L}_{r,\gamma,\Sigma} = (2D)^\gamma \circ A_\gamma \circ \mathbf{X}_{r,\Sigma}.$$

Ясно, что распределение вектора $\mathbf{L}_{r,\gamma,\Sigma}$ также эллиптически контурировано.

В обозначениях разд. 6 и 7 утверждения о сходимости случайных сумм независимых случайных векторов и статистик, построенных по выборкам случайного объема, являющиеся следствиями теорем 7 и 8, имеют следующий вид.

Следствие 3. Предположим, что случайные векторы $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ удовлетворяют условию (12) с некоторой неограниченно возрастающей последовательностью $\{b_n\}_{n \geq 1}$ положительных чисел и некоторой симметричной положительно определенной матрицей Σ . Пусть $\gamma \geq 1$, $\{d_n\}_{n \geq 1}$ — некоторая неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел. Тогда распределения случайных сумм \mathbf{S}_{N_n} независимых случайных векторов, нормированных числами d_n , сходятся к r -мерному квазистепенному логистическому распределению с тем же самым матричным параметром Σ , который фигурирует в (12), т. е.

$$d_n^{-1} \mathbf{S}_{N_n} \Longrightarrow \mathbf{L}_{r,\gamma,\Sigma} \quad (n \rightarrow \infty)$$

тогда и только тогда, когда

$$d_n^{-1} b_{N_n} \Longrightarrow (2D)^{2\gamma} \circ A_\gamma^2 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Следствие 4. Предположим, что $N_n \xrightarrow{P} \infty$ и статистика \mathbf{T}_n асимптотически нормальна в смысле (13). Пусть $\gamma \geq 1$. Для того чтобы распределение случайного вектора \mathbf{U}_n слабо сходилось при $n \rightarrow \infty$ к m -мерному квазистепенному логистическому распределению с той же самой матрицей Σ , которая фигурирует в условии (13), т. е.

$$\mathbf{U}_n = \sqrt{n}(\mathbf{T}_{N_n} - \theta) \Longrightarrow \mathbf{L}_{m,\gamma,\Sigma},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$n^{-1} N_n \Longrightarrow (2D)^{-2\gamma} \circ A_\gamma^{-2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Литература

1. *Иванов М. А., Королев В. Ю.* Квазистепенные смешанные нормальные распределения // Теория вероятностей и ее применения, 2026. Т. 71. № 2. С. 320–329.
2. *Багиров Э. Б.* Некоторые замечания о смесях нормальных законов // Теория вероятностей и ее применения, 1988. Т. 33. Вып. 4. С. 762–764.

3. Багиров Э. Б. Метод смесей и его применение к выводу нижних оценок для распределений функций от нормальных случайных величин: Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. — М.: МИ АН СССР, 1988. 101 с.
4. Korolev V., Zeifman A. Quasi-exponentiated normal distributions: Mixture representations and asymmetrization // *Mathematics*, 2023. Vol. 11. No. 17. Art. 3797. 14 p. doi: 10.3390/math11173797. EDN: LAQRCF.
5. Хомутов Ю. К. Об условиях представления вероятностных распределений в виде масштабных смесей с заданными ядрами // *Теория вероятностей и ее применения*, 2026 (в печати).
6. Королев В. Ю. Обобщенные гиперболические распределения как предельные распределения для случайных сумм // *Теория вероятностей и ее применения*, 2013. Т. 58. Вып. 1. С. 117–132. doi: 10.4213/tvp4496. EDN: RLSFET.
7. Королев В. Ю., Шевцова И. Г., Шестаков О. В. Асимптотические и аналитические свойства смешанных вероятностных моделей и их применение к анализу сложных систем // *Вестник Московского университета. Сер. 15: Вычислительная математика и кибернетика*, 2024. Вып. 4. С. 102–148. doi: 10.55959/MSU/0137-0782-15-2024-47-4-102-148.
8. Korolev V. Y., Khokhlov Y. S., Garkavenko A. V. On some multivariate generalizations of the logistic distributions and their properties // *Sankhya Ser. A*, 2025. 24 p. doi: 10.1007/s13171-025-00397-7. EDN: WZUZHG.
9. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. — М: Наука, 1983. 304 с.
10. Schneider W. R. Stable distributions: Fox function representation and generalization // *Stochastic processes in classical and quantum systems* / Eds. S. Albeverio, G. Casati, D. Merlini. — Lecture notes in physics. — Berlin: Springer, 1986. Vol. 262. P. 497–511. doi: 10.1007/3540171665_92.
11. Uchaikin V. V., Zolotarev V. M. Chance and stability. — Utrecht: VSP, 1999. 570 p.
12. Korolev V. Yu., Homutov Yu. K. Normal mixture representations and analogs of the multiplication theorem for some distributions // *Moscow University Computational Mathematics Cybernetics*, 2026 (in press). Special Issue.
13. Korolev V. Some properties of univariate and multivariate exponential power distributions and related topics // *Mathematics*, 2020. Vol. 8. No. 11. Art. 1918. 27 p. doi: 10.3390/math8111918. EDN: TBCBVN.
14. Hudson-Curtis B. L. Generalizations of the multivariate logistic distribution with applications to Monte Carlo importance sampling: PhD Thesis. — Raleigh, NC, USA: North Carolina State University, 2001. 180 p.
15. Andrews D. F., Malloves C. L. Scale mixtures of normal distributions // *J. Roy. Stat. Soc. B Met.*, 1974. Vol. 36. No. 1. P. 99–102. doi: 10.1111/j.2517-6161.1974.tb00989.x.
16. Stefanski L. A. A normal scale mixture representation of the logistic distribution // *Stat. Probabil. Lett.*, 1990. Vol. 11. P. 69–70. doi: 10.1016/0167-7152(91)90181-P.
17. Kano Y. Consistency property of elliptic probability density functions // *J. Multivariate Anal.*, 1994. Vol. 51. No. 1. P. 139–147. doi: 10.1006/jmva.1994.1054.
18. Cambanis S., Huang S., Simons G. On the theory of elliptically contoured distributions // *J. Multivariate Anal.*, 1981. Vol. 11. No. 3. P. 365–385. doi: 10.1016/0047-259X(81)90082-8.

19. *Fang K., Zhang Y.* Generalized multivariate analysis. — Beijing: Science Press; Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1990. 232 p.
20. *Fang K. T., Kotz S., Ng K. W.* Symmetric multivariate and related distributions. — London: Chapman and Hall, 1990. 230 p.
21. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ / Пер. с англ. — М: ГИФМЛ, 1963. 500 с. (*Anderson T.* An introduction to multivariate statistical analysis. — New York: Wiley & Sons; London: Chapman & Hall, 1958. 374 p.)
22. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. — М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. 264 с.
23. *Gnedenko B. V., Korolev V. Y.* Random summation: Limit theorems and applications. — Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 1996. 288 p.
24. *Корчагин А. Ю.* О сходимости случайных сумм независимых случайных векторов к многомерным обобщенным дисперсионным гамма-распределениям // Системы и средства информатики, 2015. Т. 25. № 1. С. 127–141. doi: 10.14357/08696527150108. EDN: UCMGUT.
25. *Korolev V. Yu., Zeifman A. I.* On normal variance-mean mixtures as limit laws for statistics with random sample sizes // J. Stat. Plan. Infer., 2016. Vol. 169. P. 34–42. doi: 10.1016/j.jspi.2015.07.007. EDN: WPFAPH.
26. *Khokhlov Yu., Korolev V., Zeifman A.* Multivariate scale-mixed stable distributions and related limit theorems // Mathematics, 2020. Vol. 8. No. 5. Art. 749. 29 p. doi: 10.3390/math8050749. EDN: TLNENN.
27. *Hillier F. S., Liberman G. J.* Introduction to operations research. — 7th ed. — New York, NY, USA: McGraw-Hill, 2001. 1214 p.
28. *Verhulst P.-F.* Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement // Correspondance Mathématique Physique, 1838. Vol. 10. P. 113–121.
29. *Verhulst P.-F.* Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population // Nouveaux Memoires l'Academie Royale Sciences Belles Lettres Bruxelles, 1845. Vol. 18. P. 1–42. doi: 10.3406/marb.1845.3438.
30. *Korolev V. Yu.* The logistic distribution as a limit law for random sums and statistics constructed from samples with random sizes // Mathematics, 2024. Vol. 12. No. 23. Art. 3775. doi: 10.3390/math12233775. EDN: UUNDGD.

Поступила в редакцию 02.02.2026

Принята к публикации 15.04.2026

MULTIVARIATE QUASI-EXPONENTIATED MIXED NORMAL DISTRIBUTIONS

M. A. Ivanov¹ and V. Yu. Korolev^{1,2}

¹Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation

²Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Voscov 119333, Russian Federation

Abstract: A class of multivariate elliptically contoured distributions is introduced and studied. Each one-dimensional projection of such a distribution has the quasi-exponentiated normal distribution that coincides with the distribution of the random variable $|QX|^\gamma \text{sign} X$ where $\gamma > 0$; Q is the positive random variable; and X is the random variable with the standard normal distribution independent of Q . For $\gamma > 1$, the densities of the multivariate mixed normal distributions are infinite in zero. This property makes it possible to use multivariate quasi-exponentiated mixed power distributions with $\gamma > 1$ as models of statistical regularities in the behavior of multivariate stochastic processes with rather long periods within which the process either does not change or changes insignificantly, alternate with the periods when variations with rather large jumps are observed. Unlike “pure” quasi-exponentiated distributions, quasi-exponentiated mixed normal distributions possess heavy tails that may be useful in the case of very large jumps of the process under consideration. Some limit theorems are presented on convergence of the distributions of multivariate statistics constructed from samples with random sizes, including random sums, to multivariate quasi-exponentiated mixed normal distributions. As an example, multivariate elliptically contoured quasi-exponentiated logistic distribution is considered.

Keywords: quasi-exponentiated normal distribution; normal scale mixture; elliptically contoured distribution; limit theorem; random sum

DOI: 10.14357/08696527260205

EDN: QAQWAA

Acknowledgments

The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the Agreement No. 075-15-2025-345.

References

1. Ivanov, M. A., and V. Yu. Korolev. 2026. Kvazistepennnye smeshannyye normal'nye raspredeleniya [Quasi-exponentiated mixed normal distributions]. *Theor. Probab. Appl.* 71(2):320–329.

2. Bagirov, E. B. 1988. Some remarks on mixtures of normal distributions. *Theor. Probab. Appl.* 33(4):709–710. doi: 10.1137/1133106.
3. Bagirov, E. B. 1988. Metod smesey i ego primeneniye k vyvodu nizhnikh otsenok dlya raspredeleniy funktsiy ot normal'nykh sluchaynykh velichin [The method of mixtures and its application to the construction of lower bounds for functions of normal random variables]. Moscow: Steklov Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences. PhD Thesis. 101 p.
4. Korolev, V., and A. Zeifman. 2023. Quasi-exponentiated normal distributions: Mixture representations and asymmetrization. *Mathematics* 11(17):3797. 14 p. doi: 10.3390/math11173797. EDN: LAQRCF.
5. Homutov, Yu. K. 2026 (in press). On conditions for the representability of probability distributions as scale mixtures with given kernels. *Theor. Probab. Appl.* 71.
6. Korolev, V. Yu. 2014. Generalized hyperbolic laws as limit distributions for random sums. *Theor. Probab. Appl.* 58(1):63–75. doi: 10.1137/S0040585X97986400. EDN: SKOBGF.
7. Korolev, V. Y., I. G. Shevtsova, and O. V. Shestakov. 2024. Asymptotic and analytic properties of mixture probability models and their application to the analysis of complex systems. *Moscow University Computational Mathematics Cybernetics* 48(4):317–360. doi: 10.3103/S0278641924700213. EDN: SHMYTD.
8. Korolev, V. Y., Y. S. Khokhlov, and A. V. Garkavenko. 2025. On some multivariate generalizations of the logistic distributions and their properties. *Sankhya Ser. A.* 24 p. doi: 10.1007/s13171-025-00397-7. EDN: WZUZHG.
9. Zolotarev, V. M. 1986. *One-dimensional stable distributions*. Providence, RI: American Mathematical Society. 284 p.
10. Schneider, W. R. 1986. Stable distributions: Fox function representation and generalization. *Stochastic processes in classical and quantum systems*. Eds. S. Albeverio, G. Casati, and D. Merlini. Lecture notes in physics. Berlin: Springer. 262:497–511. doi: 10.1007/3540171665_92.
11. Uchaikin, V. V., and V. M. Zolotarev. 1999. *Chance and stability*. Utrecht: VSP. 570 p.
12. Korolev, V. Yu., and Yu. K. Homutov. 2026 (in press). Normal mixture representations and analogs of the multiplication theorem for some distributions. *Moscow University Computational Mathematics Cybernetics*. Special Issue.
13. Korolev, V. 2020. Some properties of univariate and multivariate exponential power distributions and related topics. *Mathematics* 8(11):1918. 27 p. doi: 10.3390/math8111918. EDN: TBCBVN.
14. Hudson-Curtis, B. L. 2001. Generalizations of the multivariate logistic distribution with applications to Monte Carlo importance sampling. Raleigh, NC: North Carolina State University. PhD Thesis. 180 p.
15. Andrews, D. F., and C. L. Mallows. 1974. Scale mixtures of normal distributions. *J. Roy. Stat. Soc. B Met.* 36(1):99–102. doi: 10.1111/j.2517-6161.1974.tb00989.x.
16. Stefanski, L. A. 1990. A normal scale mixture representation of the logistic distribution. *Stat. Probabil. Lett.* 11(1):69–70. doi: 10.1016/0167-7152(91)90181-P.

17. Kano, Y. 1994. Consistency property of elliptic probability density functions. *J. Multivariate Anal.* 51(1):139–147. doi: 10.1006/jmva.1994.1054.
18. Cambanis, S., S. Huang, and G. Simons. 1981. On the theory of elliptically contoured distributions. *J. Multivariate Anal.* 11(3):365–385. doi: 10.1016/0047-259X(81)90082-8.
19. Fang, K., and Y. Zhang. 1990. *Generalized multivariate analysis*. Beijing: Science Press; Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag. 232 p.
20. Fang, K. T., S. Kotz, and K. W. Ng. 1990. *Symmetric multivariate and related distributions*. London: Chapman & Hall. 230 p.
21. Anderson, T. 1958. *An introduction to multivariate statistical analysis*. New York: Wiley & Sons; London: Chapman & Hall. 374 p.
22. Gnedenko, B. V., and A. N. Kolmogorov. 1954. *Limit distributions for sums of independent random variables*. Cambridge, MA: Addison-Wesley. 264 p.
23. Gnedenko, B. V., and V. Yu. Korolev. 1996. *Random summation: Limit theorems and applications*. Boca Raton, FL: CRC Press. 288 p.
24. Korchagin, A. Yu. 2015. O skhodimosti sluchaynykh summ nezavisimyykh sluchaynykh vektorov k mnogomernym obobshchennym dispersionnym gamma-raspredeleniyam [On convergence of random sums of independent random vectors to multivariate generalized variance-gamma distributions]. *Sistemy i Sredstva Informatiki — Systems and Means of Informatics* 25(1):127–141. doi: 10.14357/08696527150108. EDN: UCMGUT.
25. Korolev, V. Yu., and A. I. Zeifman. 2016. On normal variance-mean mixtures as limit laws for statistics with random sample sizes. *J. Stat. Plan. Infer.* 169:34–42. doi: 10.1016/j.jspi.2015.07.007. EDN: WPFAPH.
26. Khokhlov, Yu., V. Korolev, and A. Zeifman. 2020. Multivariate scale-mixed stable distributions and related limit theorems. *Mathematics* 8(5):749. 29 p. doi: 10.3390/math8050749. EDN: TLNENN.
27. Hiller, F. S., and G. J. Liberman. 2001. *Introduction to operations research*. 7th ed. New York, NY: McGraw-Hill. 1214 p.
28. Verhulst, P.-F. 1838. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance Mathématique Physique* 10:113–121.
29. Verhulst, P.-F. 1845. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux Memoires l'Academie Royale Sciences Belles Lettres Bruxelles* 18:1–42. doi: 10.3406/marb.1845.3438.
30. Korolev, V. Yu. 2024. The logistic distribution as a limit law for random sums and statistics constructed from samples with random sizes. *Mathematics* 12(23):3775. 9 p. doi: 10.3390/math12233775. EDN: UUNDGD.

Received February 2, 2026

Accepted April 15, 2026

Contributors

Ivanov Mikhail A. (b. 1998) — PhD student, Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov

Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; ivanovma1@my.msu.ru

Korolev Victor Yu. (b. 1954) — Doctor of Science in physics and mathematics, professor, head of Department of Mathematical Statistics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, M. V. Lomonosov Moscow State University, 1-52 Leninskie Gory, GSP-1, Moscow 119991, Russian Federation; leading scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; vkorolev@cs.msu.ru

РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕСТОВ ЕДИНИЧНОГО КОРНЯ ДЛЯ МАЛЫХ ВЫБОРОК

*М. П. Кривенко*¹

Аннотация: Широкое применение при анализе стационарности временного ряда нашли критерии единичного корня. Известно развернутое обоснование вариантов подобных тестов, за которыми в математической статистике закрепилось наименование критериев Дики–Фуллера. Действенность предлагаемых приемов для описания предельных распределений применяемых статистик было подтверждено в ходе множества исследований, но они оказались непродуктивными при конечных значениях времени наблюдения T . Поэтому пришлось обращаться к методу статистических испытаний (МСИ), с помощью которого для отдельных значений T были построены таблицы процентилей. Кроме того, что их оказалось явно недостаточно, фактически ради удобства использования заранее построенных статистических таблиц исследователь был вынужден обращаться к простой модели данных в совокупности с фиксированным набором искусственно подобранных конкурирующих гипотез. В результате единственным решением проблемы применения на практике критериев единичного корня для малых T остается привлечение МСИ. Ранее автором данной статьи применительно к задачам эконометрики рассматривалось использование коинтеграционного анализа при ранжировании множества объектов на основе единственного показателя — степени связанности составляющих наблюдаемого многомерного временного ряда. Заново построенные статистические таблицы для $T = 8$ позволили подтвердить корректность замены критериев единичного корня на критерии стационарности общего характера. В пользу продуктивности имитации в практике анализа данных говорят возможности современных процессоров, допускающих многозадачность, а также перспективы использования платформы **R**.

Ключевые слова: коинтеграционный анализ; критерии единичного корня; тесты Дики–Фуллера; коэффициент связанности; региональная экономика; инвестиции; валовой региональный продукт; тесты стационарности; статистика с **R**

DOI: 10.14357/08696527260206

EDN: QIYQXH

1 Тесты единичного корня

Анализ стационарности временного ряда может опираться на специфические свойства его параметрической модели и заключаться, в частности, в исследовании корней характеристического уравнения для авторегрессионной модели. Широкое применение в этой связи, и в первую очередь в области эконометрики, нашли критерии единичного корня.

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, mkrivenko@ipiran.ru

Если процесс генерации данных (DGP, data-generation process) имеет вид:

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t, \quad y_0 = 0, \quad (1)$$

где u_t суть независимые и одинаково распределенные случайные величины, то для проверки истинности гипотезы $H_0 : \rho = \rho_0$ при $|\rho_0| < 1$ используется регрессионная оценка $\hat{\rho}$. Тогда критерий может принимать вид t -статистики $(\hat{\rho} - \rho_0 / \text{SE}(\hat{\rho}))$, которая асимптотически имеет стандартное нормальное распределение и может сравниваться с таблицами значимых точек для $N(0, 1)$. Для небольших выборок статистика примерно t -распределена, а оценка коэффициента ρ немного смещена вниз. Однако для $\rho_0 = 1$ эти результаты не действуют. Распределение тестовой статистики $\hat{\rho}$ не является асимптотически нормальным и даже симметричным. Таблицы соответствующих критических значений для этого случая были опубликованы в [1], где в разд. 8.5 в связи с этими таблицами была дана отсылка на неопубликованную рукопись: *Dickey D. A. Hypothesis testing for nonstationary time series: Unpublished manuscript. — Ames, IA: Iowa State University, 1975.* В более поздней работе [2], к которой есть доступ, дается развернутое обоснование вариантов теста единичного корня и приводятся уточненные по сравнению с [1] таблицы критических значений. За указанными тестами и таблицами в математической статистике закрепилось наименование критериев Дики–Фуллера. Они широко применяются на практике, дали толчок развитию методов контроля стационарности анализируемых процессов. Взяв за основу [2], дадим краткую характеристику сути методов и сформулируем возникающие затруднения при их применении.

Уточним (1), рассмотрев авторегрессионный процесс первого порядка

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

где $Y_0 = 0$; $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{\infty}$ — это последовательность нормальных независимых $(0, \sigma^2)$ случайных величин. Заметим, что

$$Y_t = \varepsilon_t + \rho \varepsilon_{t-1} + \dots + \rho^{t-1} \varepsilon_1,$$

поэтому если $|\rho| < 1$, то Y_t сходится к стационарному процессу при $t \rightarrow \infty$ (в частности, $\text{var}(Y_t) \rightarrow \sigma^2 / (1 - \rho^2)$). Если $|\rho| > 1$, то $\text{var}(Y_t)$ растет с увеличением t без ограничений и такой процесс называют взрывным. При заданной реализации процесса y_1, y_2, \dots, y_n авторегрессий первого порядка интерес представляют оценки ρ и тесты нулевой гипотезы $H_0 : \rho = 1$. В качестве альтернативы выступает одна из трех моделей интерпретации данных:

- (a) $Y_t = \rho_a Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_0 = 0$ для $|\rho| < 1$;
- (b) $Y_t = \alpha + \rho_b Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_0 = 0$ для $|\rho| < 1$;
- (c) $Y_t = \alpha + \beta t + \rho_c Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_0 = 0$ для $|\rho| < 1$.

В качестве оценок параметров моделей принимаются соответствующие коэффициенты регрессии: для $\hat{\rho}_a$ — это регрессия Y_t по Y_{t-1} , для $\hat{\rho}_b$ — Y_t по 1 и Y_{t-1} , $\hat{\rho}_c$ — Y_t по 1, t и Y_{t-1} . На их основе по аналогии с t -статистиками строятся отвечающие перечисленным альтернативам показатели τ_a , τ_b и τ_c критерия единичного корня. Следует напомнить, что нулевая гипотеза соответствует наличию нестационарности, а ее отвержение — стационарности наблюдаемого процесса.

Статистики τ_a , τ_b и τ_c имеют вид дробей, и их распределения при нулевой гипотезе получаются в асимптотическом виде при $t \rightarrow \infty$. Для этого последовательно проводится обоснование следующих шагов:

- получение моментов первого и второго порядка для пары числитель–знаменатель дробного представления статистик [2, таблица моментов 3.4];
- получение спектрального представления для квадратичной формы наблюдаемых значений, характеризуемого несколькими доминантными собственными значениями [2, подраздел разд. IV];
- получение предельных распределений статистик критериев, выражаемых через бесконечные взвешенные суммы нормально распределенных случайных величин [2, следствия 4.1 и 4.2];
- замещение на основе согласования первых двух моментов бесконечных сумм на конечные путем статистических испытаний [2, соотношения (4.77) и (4.78)];
- описание распределений статистик для допредельных значений длительности исследуемого процесса T с помощью МСИ, что позволяет построить таблицы процентилей для отдельных значений вероятностей (это 1%, 2,5%, 5%, 10%, 90%, 95%, 97,5% и 99%) и длительности исследуемого процесса $T = 25, 50, 100, 250, 500$ и ≥ 750 .

В приведенных обоснованиях критериев Дики–Фуллера можно выделить три момента, наиболее важных для реализации тестов единичного корня.

Во-первых, налицо действительность предлагаемых приемов для описания предельных распределений. Это дополнительно подтвердилось в ходе последующих исследований по расширению области применения предлагаемых критериев единичного корня, но оказалось непродуктивным при конечных значениях T . Поэтому авторам тестов единичного корня пришлось обращаться к МСИ, с помощью которого были построены таблицы процентилей для отдельных значений длительности исследуемого процесса, которых явно недостаточно (см., например, [3] для $T < 25$).

Во-вторых, желание ограничиться тестами Дики–Фуллера, служащими подобными критериями (т. е. теми, для которых распределение тестовой статистики по нулевой гипотезе не зависит от мешающих параметров в DGP), оставляет необеспеченными менее упрощенные и более практичные, чем (1), модели DGP. Фактически ради удобства использования заранее построенных статистических таблиц исследователь вынужден обращаться к простой модели данных в совокупности с фиксированным набором искусственно подобранных конкурирующих гипотез.

В-третьих, для случая малых объемов данных привлечение упрощенной авторегрессионной модели данных, конечно, находится в русле принципа бритвы Оккама, но может в случае тестов Дики–Фуллера стать источником необоснованных выводов.

Для исследования эффекта, порождаемого присутствием мешающих параметров в модели данных, был проведен ряд экспериментов, которые потребовали определиться со способом оценивания точности формируемых таблиц критериев, зависящей от N_{exp} — числа повторений в ходе статистических испытаний.

Обозначим через $F(u|V)$ функцию распределения статистики некоторого критерия при нулевой гипотезе для определенного набора V параметров модели. Пусть $q(P_q|V)$ — квантиль порядка P_q , т. е. $F(q(P_q|V)|V) = P_q$. Если как-то изменить V и получить \tilde{V} , то для сравнения $q(P_q|\tilde{V})$ с $q(P_q|V)$ необходимо проделать следующее:

- построить для модели \tilde{V} эмпирическую функцию распределения $F^*(u|\tilde{V})$;
- оценить по ней $q^*(P_q|\tilde{V})$;
- сравнить $q^*(P_q|\tilde{V})$ и $q(P_q|V)$, для чего достаточно сопоставить $F^*(q^*(P_q|\tilde{V})|\tilde{V})$ и $F^*(q(P_q|V)|\tilde{V})$; последнее эквивалентно сличению P_q и $F^*(q(P_q|V)|\tilde{V})$, для чего необходимо проверить гипотезу о параметре биномиального распределения, а именно: проведены N_{exp} испытаний по построению эмпирической функции распределения для модели \tilde{V} , в них наблюдалось $N_+ = F^*(q(P_q|V)|\tilde{V}) \times N_{\text{exp}}$ успехов (число случаев, когда значение статистики при \tilde{V} не превосходит $q(P_q|V)$), что в итоге позволяет оценить критический уровень значимости α^* (p -value) при проверке гипотезы, равняется ли доля успехов значению P_q .

Эксперименты, общее число которых $N_{\text{exp}} = 10^4$, проводились для модели DGP вида (1) и тестов Дики–Фуллера типов (а), (b) и (c) при $N = 5, 10$ и 25 с различными значениями σ . Кроме того, отдельно подвергалось изменениям начальное заполнение авторегрессии y_0 . Примеры соответствующих результатов приведены в табл. 1 и 2, демонстрирующих как отсутствие веских оснований для вывода о влиянии мешающего параметра σ (в нижней строке табл. 1 не доминируют малые значения α^*), так и ярко выраженную тенденцию необходимости коррекции табличных данных критерия в связи с ростом y_0 (нижняя строка табл. 2). Общие выводы таковы:

- нет причин для отказа от использования асимптотического результата о независимости распределений статистик критериев Дики–Фуллера от дисперсии ошибки измерения данных;
- предположение о начальном значении авторегрессии для теста Дики–Фуллера типа (а) существенно и его при моделировании данных тем или иным способом необходимо учитывать; судя по обработке множества выборочных ситуаций, предположения типа (b) и (c) нейтрализуют вариативность моделей относительно y_0 , но безоговорочно утверждать это, естественно, нельзя.

Таблица 1 Значения характеристик теста Дики–Фуллера типа (а) при $N = 10$, $y_0 = 0$, $P_q = 0,1$ и различных σ

σ	$q^*(0,1 \sigma)$	α^*
0,010	-1,645	0,433
0,032	-1,645	0,453
0,100	-1,655	0,803
0,316	-1,642	0,395
1,000	-1,657	0,881
3,162	-1,666	0,739
10,000	-1,664	0,841
31,623	-1,647	0,377
100,000	-1,690	0,089

Таблица 2 Значения характеристик теста Дики–Фуллера типа (а) при $N = 10$, $\sigma = 1$, $P_q = 0,1$ и различных y_0

y_0	$q^*(0,1 \sigma)$	α^*
0	-1,654	0,701
2	-1,682	0,205
4	-1,658	0,881
6	-1,706	0,037
8	-1,610	0,023
10	-1,588	0,000
12	-1,514	0,000
14	-1,492	0,000

Таблица 3 Расширения модели данных и соответствующие модели, приводящие к уже табулированным тестам Дики–Фуллера

DGP (модели данных)	Модели, дающие подобные тесты (модели интерпретации)
$Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_0 = 0$	(а), (b), (с)
$Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$, произвольное Y_0	(b), (с)
$Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$, произвольное Y_0	(с)
$Y_t = \alpha + \beta t + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$, произвольное Y_0	Необходимо расширение (с)

Принципиальным оказывается то, что критические значения в таблицах зависят не только от предположений об исходных данных, но и от модели, с помощью которой они анализируются. Это порождает большое число исследований (см., например, [4–9]), проведенных в рамках определенных комбинаций моделей данных и их интерпретации, а также преимущественно опирающихся на привлечение МСИ. Соответствующие результаты [10, разд. 4] можно резюмировать в виде табл. 3.

Как результат, затрудняется выбор подходящих решений и фактически остается необходимость проведения дополнительных экспериментов. В качестве иллюстрации необходимости расширения предположений при применении тестов Дики–Фуллера можно привести реальную ситуацию, когда модель данных есть $Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$ при произвольном значении Y_0 , а модель интерпретации — (b).

2 Верификация количественного анализа инвестиций и валового продукта

В [3] применительно к задачам эконометрики рассматривалось использование коинтеграционного анализа при ранжировании множества объектов на основе

единственного показателя — степени связанности составляющих наблюдаемого многомерного временного ряда. Данные для экспериментов содержали детализированные по регионам характеристики инвестиционной деятельности: инвестиции в основной капитал (Inv), валовой региональный продукт (Prod), численность занятых человек. Для нахождения коинтегрирующего вектора для данных каждого субъекта строилась регрессия процесса Prod по Inv, для которой коэффициент при Inv можно интерпретировать как коэффициент связанности r процессов инвестиций и валового регионального продукта с последующим использованием данной характеристики в качестве показателя эффективности экономической деятельности.

Исходные данные включали информацию о 82-х субъектах за 8 лет. Графический анализ данных Inv и Prod свидетельствовал о том, что соответствующим процессам свойственна изменчивость (преимущественно рост) значений во времени. Для формального подтверждения этого в рамках коинтеграционного анализа обычно используется критерий единичного корня Дики–Фуллера (конкретизация критерия здесь и далее осуществляется указанием соответствующей функции платформы **R**, в данном случае это **tseries::adf.test**). Соответствующая процедура основывается на известных таблицах [2], построенных для объемов выборки $T \geq 25$, что для обработки имеющихся данных не подходит, поэтому в [3] пришлось отказаться от использования критерия Дики–Фуллера и обратиться к критерию стационарности общего характера Манна–Кендалла (**randtests::rank.test**). При этом фактически произошел отказ от необходимости различать разностно-стационарную и тренд-стационарную модели данных. Но на предварительном этапе коинтеграционного анализа было важнее определиться относительно нестационарности рядов, а не дать ответ на вопрос, какое именно распределение обеспечивает лучшее приближение малой выборки.

В данной работе возобновлен подход на основе традиционного критерия единичного корня, что потребовало оценки соответствующих табличных данных. После $N_{\text{exp}} = 10^5$ экспериментов для $T = 8$ была получена табл. 4 (при указании модели интерпретации в скобках приведено обозначение соответствующего типа теста Дики–Фуллера в использованной процедуре **urca::ur.df**).

После получения табличных данных стало возможным провести сравнительный анализ результатов предварительного анализа временных рядов Inv и Prod для 82-х субъектов. Учитывая выводы, полученные в начале данной

Таблица 4 Квантили распределения статистики критерия Дики–Фуллера при $T = 8$

Модель интерпретации	Порядок квантиля	
	5%	10%
(a) (none)	-2,249	-1,735
(b) (drift)	-4,207	-3,225
(c) (trend)	-7,054	-4,953

Таблица 5 Таблица сопряженности результатов применения критериев для Inv

МК	DF	
	<i>N</i>	<i>S</i>
<i>N</i>	66	1
<i>S</i>	15	0

Таблица 6 Таблица сопряженности результатов применения критериев для Prod

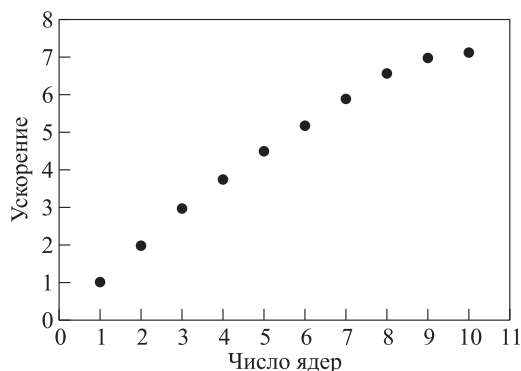
МК	DF	
	<i>N</i>	<i>S</i>
<i>N</i>	80	0
<i>S</i>	0	2

работы, и содержание табл. 3 (учет произвольного y_0), для обработки привлекался тест Дики–Фуллера типа (b) (drift), т. е. в качестве альтернативы для авторегрессии с единичным корнем выступало случайное блуждание с дрейфом. Результаты одновременного применения тестов Дики–Фуллера (обозначены как DF) и Манна–Кендалла (МК) отражены в виде таблиц сопряженности (табл. 5 и 6), где приняты обозначения: *S* — принятие гипотезы о стационарности, *N* — ее отвержение. Из них видна высокая (см. табл. 5) вплоть до полной (см. табл. 6) степень совпадения результатов применения тестов, а также то, что с точки зрения последующего коинтеграционного анализа отнесение нестационарных рядов с позиций теста Дики–Фуллера к стационарным с помощью теста Манна–Кендалла не представляет собой помеху. Кроме того, надо помнить, что большинство критериев стационарности могут подсказать характер изменений, если они есть.

Таким образом, все результаты [3] остаются в силе.

3 Заключение

Систематическое воплощение критериев Дики–Фуллера и им подобных с помощью МСИ оправдано, но может вызывать настороженность из-за своей трудоемкости. Частично сомнения отпадают, если ориентироваться на малые объемы выборок. Более сильным доводом в пользу имитации становятся возможности современных процессоров, допускающих многозадачность, а также перспективы использования платформы **R**. При этом надо признать, что написание кода с помощью языка **R** поддается с трудом. Кроме того, от увеличения числа задействованных ядер не следует ожидать прямолинейной отдачи. Применительно к задаче моделирования распределения статистики критерия единичного корня был построен прототип соответствующего сценария на языке **R** [11]. Анализ с его помощью зависимости времени проведения статистических испытаний от роста числа используемых ядер (см. рисунок) показал, что ускорение с ростом числа ядер налицо, но оказывается меньше ожидаемого. Законченное осуществление идеи распараллеливания процесса построения таблиц критериев на основе платформы **R** требует дополнительных исследований, включающих выбор конкретного пакета, реализацию эффективной передачи информации ядрным



Относительное ускорение времени проведения статистических испытаний при росте числа используемых ядер на примере процессора 13th Gen Intel® Core™ i7-1355U, 1700 МГц, 10 ядер

обработчикам, рациональное объединение результатов работы отдельных ядер, надежный контроль процесса испытаний.

Литература

1. Fuller W. A. Introduction in statistical time series. — Hoboken, NY, USA: Wiley, 1976. 470 p.
2. Dickey D. A. Estimation and hypothesis testing in nonstationary time series: PhD Diss. — Ames, IA, USA: Iowa State University Digital Repository, 1976. 128 p. doi: 10.31274/rtd-180813-2848.
3. Кривенко М. П. Упорядочение многомерных лонгитюдных данных на основе коинтеграционного анализа // Информатика и её применения, 2026. Т. 20. Вып. 1. С. 64–72. doi: 10.14357/19922264260108. EDN: KCLPVN.
4. Evans G. B. A., Savin N. E. Testing for unit roots: 1 // *Econometrica*, 1981. Vol. 49. No. 3. P. 753–779. doi: 10.2307/1911521.
5. Evans G. B. A., Savin N. E. Testing for unit roots: 2 // *Econometrica*, 1984. Vol. 52. No. 5. P. 1241–1269. doi: 10.2307/1910998.
6. Nankervis J. C., Savin N. E. Testing the autoregressive parameter with the t statistic // *J. Econometrics*, 1985. Vol. 27. Iss. 2. P. 143–161. doi: 10.1016/0304-4076(85)90084-3.
7. Bhargava A. On the theory of testing for unit roots in observed time series // *Rev. Econ. Stud.*, 1986. Vol. 53. Iss. 3. P. 369–384. doi: 10.2307/2297634.
8. Nankervis J. C., Savin N. E. Finite sample distributions of t and F statistics in an AR(1) model with an exogenous variable // *Economet. Theor.*, 1987. Vol. 3. Iss. 3. P. 387–408.
9. Kiviet J., Phillips G. D. A. Exact similar tests for unit roots and cointegration // *Oxford B. Econ. Stat.*, 1992. Vol. 54. Iss. 3. P. 349–367.

10. *Banerjee A., Dolado J. J., Galbraith J. W., Hendry D. F.* Co-integration, error correction, and the econometric analysis of non-stationary data. — Oxford: Oxford University Press, 1993. 329 p. doi: 10.1093/0198288107.001.0001.
11. *Eddelbuettel D.* High-performance and parallel computing with R (version 2026-02-18). <https://cran.r-project.org/web/views/HighPerformanceComputing.html>.

Поступила в редакцию 03.02.2026

Принята к публикации 15.04.2026

IMPLEMENTING UNIT ROOT TESTS FOR SMALL SAMPLES

M. P. Krivenko

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract: The criteria of the unit root are widely used in the analysis of the stationarity of a time series. There is a detailed substantiation of the variants of such tests which in mathematical statistics are called the Dickey–Fuller criteria. The efficacy of the proposed methods for describing the limiting distributions of the statistics used has been confirmed in the course of many studies but they turned out to be unproductive at the finite values of the observation time T . Therefore, it was necessary to turn to the method of statistical trials (MST), with the help of which percentile tables were constructed for individual T values. In addition to the fact that they were clearly insufficient, in fact, for the convenience of using preconstructed statistical tables, the researcher was forced to turn to a simple data model in conjunction with a fixed set of artificially selected competing hypotheses. As a result, the only solution to the problem of applying the unit root criteria for small T in practice is the use of MST. Earlier, the author of this article considered the use of cointegration analysis in the ranking of a set of objects on the basis of a single indicator — the degree of connectivity of the components of the observed multidimensional time series. The newly constructed statistical tables for $T = 8$ made it possible to confirm the correctness of the replacement of the unit root criteria due to small T with the stationarity criteria of a general nature. The capabilities of modern processors that allow multitasking as well as the prospects for using the **R** platform speak in favor of the productivity of simulation in the practice of data analysis.

Keywords: cointegration analysis; testing for a unit root; Dickey–Fuller test; relate coefficient; regional economy; investments; gross regional product; tests for stationarity; statistics with R

DOI: 10.14357/08696527260206

EDN: QIYQXH

References

1. Fuller, W. A. 1976. *Introduction in statistical time series*. Hoboken, NY: Wiley. 470 p.

2. Dickey, D. A. 1976. Estimation and hypothesis testing in nonstationary time series. Ames, IA: Iowa State University Digital Repository. PhD Diss. 128 p. doi: 10.31274/rtd-180813-2848.
3. Krivenko, M. P. 2026. Uporyadochenie mnogomernykh longityudnykh dannykh na osnove kointegratsionnogo analiza [Ordering of multivariate longitudinal data based on cointegration analysis]. *Informatika i ee Primeneniya — Inform. Appl.* 20(1):64–72. doi: 10.14357/19922264260108. EDN: KCLPVN.
4. Evans, G. B. A., and N. E. Savin. 1981. Testing for unit roots: 1. *Econometrica* 49(3):753–779. doi: 10.2307/1911521.
5. Evans, G. B. A., and N. E. Savin. 1984. Testing for unit roots: 2. *Econometrica* 52(5):1241–1269. doi: 10.2307/1910998.
6. Nankervis, J. C., and N. E. Savin. 1985. Testing the autoregressive parameter with the t statistic. *J. Econometrics* 27(2):143–161. doi: 10.1016/0304-4076(85)90084-3.
7. Bhargava, A. 1986. On the theory of testing for unit roots in observed time series. *Rev. Econ. Stud.* 53(3):369–384. doi: 10.2307/2297634.
8. Nankervis, J. C., and N. E. Savin. 1987. Finite sample distributions of t and F statistics in an AR(1) model with an exogenous variable. *Economet. Theor.* 3(3):387–408.
9. Kiviet, J., and G. D. A. Phillips. 1992. Exact similar tests for unit roots and cointegration. *Oxford B. Econ. Stat.* 54(3):349–367.
10. Banerjee, A., J. J. Dolado, J. W. Galbraith, and D. F. Hendry. 1993. *Co-integration, error correction, and the econometric analysis of non-stationary data*. Oxford: Oxford University Press. 329 p. doi: 10.1093/0198288107.001.0001.
11. Eddelbuettel, D. 2026. High-performance and parallel computing with R (version 2026-02-18). Available at: <https://cran.r-project.org/web/views/HighPerformanceComputing.html> (accessed April 30, 2026).

Received February 3, 2026

Accepted April 15, 2026

Contributor

Krivenko Michail P. (b. 1946) — Doctor of Science in technology, professor, leading scientist, Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44-2 Vavilov Str., Moscow 119333, Russian Federation; mkrivenko@ipiran.ru

АЛГОРИТМ ГЕНЕРАЦИИ СИНТЕТИЧЕСКИХ ДАННЫХ ДЛЯ СИСТЕМ ТЕХНИЧЕСКОГО ЗРЕНИЯ НА ОСНОВЕ СТЕКИНГА ГЕНЕРАТИВНО-СОСТЯЗАТЕЛЬНЫХ И ДИФФУЗИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

*И. С. Реутов*¹

Аннотация: Рассматривается проблема генерации синтетических изображений для систем технического зрения в условиях ограниченной доступности репрезентативных наборов реальных данных. Предлагается гибридный алгоритм, основанный на стекинге генеративно-сопоставительных и диффузионных моделей. Предложена новая модификация архитектуры Diffusion-GAN: процедура прямого диффузионного процесса заменена на механизм из модели Stable Diffusion, что позволяет объединить вычислительную эффективность диффузионных моделей со стабильностью обучения сопоставительных подходов. Алгоритм реализует трехэтапный конвейер: обучение модифицированной генеративной модели, генерацию синтетических изображений и постобработку для повышения визуального качества. Экспериментальная валидация проведена на задаче обнаружения и классификации транспортных средств с использованием набора данных Vehicle Classification SGCUM. Результаты показывают, что модель YOLOv8, обученная исключительно на синтетических данных, достигает метрик точности, сопоставимых с моделью, натренированной на реальных данных, что свидетельствует о пригодности генерируемых данных для обучения глубоких нейронных сетей.

Ключевые слова: глубокие нейронные сети; генеративно-сопоставительные модели; диффузионные модели; синтетические данные; системы технического зрения

DOI: 10.14357/08696527260207

EDN: QZBWOE

1 Введение

В последние годы область применения систем технического зрения существенно расширилась благодаря внедрению глубоких нейронных сетей. Под глубокими нейронными сетями понимаются упрощенные модели биологических нейронных сетей, представляющие собой совокупность искусственных нейронов, разделенных на два или более слоев, и решающие интеллектуальные задачи путем обучения представлениям данных. Для систем технического зрения, основанных на глубоких нейронных сетях, требуются большие наборы размеченных высококачественных изображений. На практике сбор реальных данных часто

¹Череповецкий государственный университет, dr.reutov98@mail.ru

затруднен или невозможен из-за длительных процедур согласования, требований конфиденциальности, сложных производственных условий и т. д. Синтетические данные могут стать потенциальным решением вышеописанных проблем.

Один из наиболее проработанных методов создания синтетических данных основан на использовании технологий трехмерной графики, но он имеет свои недостатки. Например, для реконструкции производственной среды, в рамках которой предполагается проектировать систему технического зрения, в трехмерном пространстве необходимы усилия целой команды, на что нужны значительные временные затраты, особенно если производственная среда сложна для переноса в трехмерное пространство.

Альтернативный подход к созданию синтетических данных состоит в использовании генеративно-состязательных и диффузионных моделей, которые на данный момент представляют собой передовые средства для изготовления фотореалистичных высококачественных изображений. При этом вопросы, касающиеся изучения потенциала использования генеративно-состязательных моделей в контексте узкоспециализированных задач технического зрения, затрагиваются в значительной степени косвенно, а диффузионные модели как источники синтетических данных в силу их относительной новизны рассматриваются недостаточно и в основном зарубежными исследователями.

В этой связи разработка метода и алгоритмов генерации синтетических данных на основе стекинга генеративно-состязательных и диффузионных моделей становится актуальной научно-технической задачей.

Техническое зрение на протяжении последних 10 лет остается одной из ключевых областей применения алгоритмов глубокого обучения. К основным задачам, решаемым в области технического (или компьютерного) зрения, можно отнести следующие: классификация изображений, обнаружение объектов, сегментация изображений, отслеживание объектов, распознавание лиц, оптическое распознавание символов, оценка положения объектов, распознавание действий.

Видеоконтроль транспорта на базе технологий обнаружения и распознавания номеров автомобилей и железнодорожных вагонов, обнаружение людей в опасных зонах цехов, контроль выполнения определенных действий людьми на производствах и правильности выполнения физических упражнений, контроль качества промышленной продукции и наличия средств индивидуальной защиты на работнике — эти и многие другие практические задачи сегодня успешно решаются с помощью систем технического зрения.

Ядро данных систем составляют методы глубокого обучения, а именно: сверточные нейронные сети, для тренировки которых требуются высококачественные размеченные изображения. В работе [1] указывается, что 96% компаний при разработке систем на основе алгоритмов машинного обучения и глубокого обучения сталкиваются с проблемами качества и аннотации данных. Существуют категории задач, для которых сбор реальных изображений затруднен или невозможен. В этом случае прибегают к использованию так называемых синтетических данных. На официальном сайте European Data Protection Supervisor, органа,

ответающего за защиту данных в Европейском Союзе, дается следующее определение: «Синтетические данные — это данные, создаваемые искусственно из некоторых исходных данных и моделей, обученных воспроизводить характеристики и структуру исходных данных» [2].

Таким образом, синтетические данные представляют собой искусственно генерируемые данные на основе некоторых математических методов и алгоритмов для решения задач с помощью машинного обучения и глубокого обучения. Можно отметить, что область создания синтетических данных для обучения систем технического зрения перспективна, поскольку исследования позволят преодолеть ограничения по части доступности наборов реальных данных в нетривиальных приложениях, конфиденциальности и скорости создания наборов данных для решения задач в области технического зрения.

Актуальность исследований в данном направлении обусловлена тем, что генерация синтетических данных напрямую влияет на производительность и точность систем технического зрения, а также повышает скорость разработки таких систем, в частности минимально жизнеспособных вариантов таких систем и прототипов для проверки гипотез в рамках тех или иных задач технического зрения.

Методы создания синтетических данных, как указывается в работе [1], представляют собой подмножество более общего множества, а именно: множества методик расширения наборов данных, таксономия которых представлена на рис. 1.

Исходя из таксономии, можно сделать вывод о том, что исследования в области разработки методов расширения наборов данных с изображениями выполняются по трем основным направлениям:

- (1) базовые манипуляции над изображениями;
- (2) подходы, основанные на глубоком обучении;
- (3) рендеринг синтетических данных.

Первое направление охватывает исследования, связанные с изучением возможностей базовых манипуляций над изображениями, к которым относятся геометрические преобразования, преобразования цветового пространства и т. д. Второе направление рассматривает вопросы, касающиеся методов глубокого обучения для расширения наборов данных изображений. Третье направление объединяет исследования, охватывающие методы, основанные на использовании технологий трехмерной графики. Можно отметить, что данное направление исследований — одно из самых проработанных, поскольку история развития компьютерной графики насчитывает по меньшей мере более полувека. Результаты обзора существующих исследований представлены в табл. 1.

Одна из ключевых проблем, характерных для синтетических данных, — доменный разрыв. Доменный разрыв — это ситуация, когда распределения синтетических наборов данных для тренировки отличаются от распределения тестовых данных, в рамках которых предполагается использовать натренированную на синтетических данных модель, т. е. реальных данных. К частным



Рис. 1 Таксономия методов расширения данных

Таблица 1 Существующие методы, алгоритмы и средства генерации синтетических данных

Категория методов расширения наборов данных	Публикации	Общие черты, присущие работам
Рендеринг синтетических данных	[1, 3–12]	Работы в целом узкоспециализированы, их результаты трудно переносимы без значительных затрат на задачи технического зрения, отличные от тех, которые рассматриваются в работах
Использование генеративных моделей	[14–20]	Узкоспециализированность результатов работ, практически полное отсутствие диффузионных моделей

случаям доменного разрыва также относятся наличие нерепрезентативных выборок, смещение рандомизации и т. д. Основным последствием сдвига домена для синтетических данных становится смещение оценок значений потерь на тестовом наборе, собранном из реальных данных.

В данной статье предлагается алгоритм генерации синтетических данных на основе возможностей современных генеративных моделей.

2 Математическое описание генеративной модели для создания синтетических данных

В качестве концептуальной основы для разработки предлагаемого алгоритма генерации синтетических данных, основанного на стекинге генеративно-состязательных и диффузионных моделей, была выбрана гибридная архитектура Diffusion-GAN. Выбор данной модели в качестве базовой обусловлен тем, что она демонстрирует повышенную стабильность тренировки, более быстрое достижение сходимости и эффективность при ограниченных объемах обучающих данных по сравнению с традиционными архитектурами.

Diffusion-GAN была предложена в работе [21], и она интегрирует принципы генеративно-состязательных сетей (GAN) и диффузионных вероятностных моделей, что обеспечивает синергетическое объединение их преимуществ — высокой достоверности синтезируемых данных и стабильности обучения. Ключевое теоретическое новшество Diffusion-GAN — введение управляемого стохастического возмущения (шума) как в реальные, так и в синтетические данные посредством прямого диффузионного процесса перед подачей их в дискриминатор. Такое решение позволяет сгладить различия между распределениями данных и существенно повысить устойчивость сходимости минимаксной оптимизации, традиционно остающейся слабым местом классических GAN.

Модель включает четыре ключевых компонента: генератор, дискриминатор, прямой диффузионный процесс и адаптивный процесс диффузии. Введем необходимые обозначения. Пусть x — реальное изображение, выбранное из распределения реальных данных $p(x)$; z — латентный вектор, выбранный из априорного распределения $p(z)$ (как правило, стандартного нормального); G — генератор, осуществляющий отображение $G : z \mapsto x_g$, где $x_g = G(z)$ — сгенерированное изображение; D — дискриминатор, где $D(y, t)$ возвращает оценку вероятности того, что зашумленный образ y на уровне шума t является реальным, а $D(y_g, t)$ — аналогичную оценку для зашумленного сгенерированного образа y_g ; t — индекс уровня шума, $t \in [1, T_{\max}]$; p_π — распределение, из которого выбирается значение t ; $q(y|x, t)$ — условное распределение зашумленного образа y , получаемого из исходного изображения x посредством прямого диффузионного процесса на уровне шума t ; $y_g \sim q(y|G(z), t)$ — зашумленный образ сгенерированного изображения, получаемый применением того же диффузионного процесса к выходу генератора; $V(G, D)$ — целевая функция минимаксной оптимизации. Обучение осуществляется по минимаксной схеме:

$$\min_G \max_D V(G, D) = \mathbb{E}_{x \sim p(x), t \sim p_\pi, y \sim q(y|x, t)} [\log(D(y, t))] + \\ + \mathbb{E}_{z \sim p(z), t \sim p_\pi, y_g \sim q(y|G(z), t)} [\log(1 - D(y_g, t))],$$

при этом дискриминатор обучается различать зашумленные реальные и сгенерированные данные, а генератор — формировать такие образы, которые после зашумления становятся неотличимыми от реальных изображений на всех индексах уровня шума.

Научная новизна предложенного подхода заключается в модификации прямого диффузионного процесса Diffusion-GAN посредством его замены на процедуру, используемую в Stable Diffusion [22]. Такое решение позволило объединить вычислительную эффективность и высокое качество синтеза, характерные для Stable Diffusion, с преимуществами гибридной состязательной архитектуры. В результате удалось сформировать модель, которая сохраняет низкие системные требования (возможность работы на видеокартах потребительского уровня от 6 ГБ VRAM) при одновременном повышении качества и устойчивости генерации.

Математически процесс прямой диффузии в модели Stable Diffusion основан на параметрическом преобразовании вида

$$x_t = \sqrt{\bar{\alpha}_t} x_0 + \sqrt{1 - \bar{\alpha}_t} \epsilon.$$

Здесь x_t — зашумленное изображение; x_0 — исходное изображение; t — индекс уровня шума, взятый из отрезка $t \in [1, T_{\max}]$, где T_{\max} — максимальное значение индекса уровня шума; ϵ — тензор чисел, каждое значение которого взято из стандартного нормального распределения; $\bar{\alpha}_t$ — кумулятивный коэффициент сигнала. Благодаря данной репараметризации зашумленный образ x_t может быть вычислен для произвольного значения t за одну операцию, без последовательного применения марковских переходов. Данный коэффициент формируется на основе закона изменения дисперсии (*англ.* noise schedule) β_t . В литературе используются два основных способа задания β_t .

Вариант 1 (линейный). Дисперсия шума линейно интерполируется между начальным значением β_{start} и конечным значением β_{end} :

$$\beta_t = \beta_{\text{start}} + \frac{t - 1}{T_{\max} - 1} (\beta_{\text{end}} - \beta_{\text{start}}),$$

где β_t — дисперсия (т. е. количество) шума, соответствующего уровню t ; β_{start} — начальное значение дисперсии на первом уровне $t = 1$; β_{end} — конечное значение дисперсии на уровне $t = T_{\max}$; t — текущее значение индекса уровня шума.

Вариант 2 (косинусоидальный). Данный вариант был предложен в работе [23]. В отличие от варианта с линейным законом β_t здесь задается через кумулятивное произведение $\bar{\alpha}_t$:

$$\bar{\alpha}_t = \frac{f(t)}{f(0)},$$

где $f(t)$ задается как

$$f(t) = \cos^2 \left(\left(\frac{t/T + s}{1 + s} \right) \frac{\pi}{2} \right).$$

Далее вычисляется β_t для каждого уровня t :

$$\beta_t = 1 - \frac{\bar{\alpha}_t}{\bar{\alpha}_{t-1}}.$$

Параметр s представляет собой небольшое смещение, которое предотвращает слишком резкое изменение β_t в самом начале отрезка $[1, T_{\max}]$, когда t близок к нулю. Значение смещения s принято равным 0,008. Значения β_t при косинусоидальном законе изменения ограничены диапазоном $[0; 0,999]$.

Следует подчеркнуть, что в отличие от оригинальной модели Stable Diffusion, где диффузионный процесс используется для обучения обратной сети, выполняющей преобразование, восстанавливающее из шума изображение (U-Net), в предложенной модификации Diffusion-GAN прямой диффузионный процесс служит исключительно для стабилизации обучения. Он обеспечивает перекрытие распределений реальных и сгенерированных данных в пространстве признаков, снижая риск «переобучения» дискриминатора и способствуя более устойчивому формированию генеративного распределения. Несмотря на то что обратный процесс диффузии здесь не обучается, добавление шума осуществляется по тем же формулам, что и в Stable Diffusion, что обеспечивает математическую эквивалентность процедур и позволяет говорить о новом классе гибридных моделей, объединяющих преимущества диффузионного и состязательного подходов.

3 Алгоритм генерации синтетических данных на основе модифицированной модели Diffusion-GAN

Алгоритм генерации синтетических данных на основе модели Diffusion-GAN состоит из следующих компонентов:

- алгоритма тренировки модифицированной модели Diffusion-GAN;
- алгоритма генерации изображений с помощью натренированной модифицированной модели Diffusion-GAN;
- алгоритма постобработки сгенерированных изображений для улучшения визуального качества и удаления специфических артефактов, присущих генеративно-состязательным моделям.

Алгоритм 1. Тренировка модифицированной модели Diffusion-GAN

Вход: набор реальных изображений X ,

максимальное количество обработанных изображений N_{\max}

Выход: натренированные параметры генератора θ_G , дискриминатора θ_D

```

n ← 0 // счетчик обработанных изображений
iter ← 0 // счетчик итераций

while n < Nmax do
    // Шаг 1: обновление дискриминатора
    Выбрать батч реальных изображений x из X
    Сэмплировать z ~ p(z)
    xg ← G(z)
    Сэмплировать t ~ pπ
    y ← √(āt)x + √(1 - āt)ε, ε ~ N(0, I) // прямая диффузия
                                                реальных изображений
    yg ← √(āt)xg + √(1 - āt)ε, ε ~ N(0, I) // прямая диффузия
                                                сгенерированных изображений
    LD ← -[log D(y, t) + log(1 - D(yg, t))]
    Обновить θD по градиенту LD

    // Шаг 2: обновление генератора
    Сэмплировать z ~ p(z)
    xg ← G(z)
    Сэмплировать t ~ pπ
    yg ← √(āt)xg + √(1 - āt)ε, ε ~ N(0, I)
    LG ← -log D(yg, t)
    Обновить θG по градиенту LG

    // Шаг 3: адаптивная диффузия (опционально)
    if iter mod 4 = 0 then
        Оценить метрику rd // степень переобучения дискриминатора
        Обновить параметр интенсивности диффузии p на основе rd
        Обновить Tcurrent на основе p и dtarget
        Пересчитать αt, βt и āt для нового Tcurrent
        Обновить распределение pπ
    end if

    n ← n + размер батча
    iter ← iter + 1

end while
return θG, θD

```

Алгоритм 2. Генерация синтетических изображений

Вход: натренированный генератор G, количество изображений M для генерации

Выход: набор синтетических изображений S
 $S \leftarrow \emptyset$

```

for  $i \leftarrow 1$  to  $M$  do
  Сэмплировать  $z \sim p(z)$  //  $z$  из стандартного нормального распределения
   $x_g \leftarrow G(z)$ 
   $x_g \leftarrow$  Постобработка( $x_g$ ) // см. Алгоритм 3
   $S \leftarrow S \cup \{x_g\}$ 
end for
return  $S$ 

```

Алгоритм 3. Постобработка сгенерированного изображения

Вход: сгенерированное изображение x_g

Выход: обработанное изображение x_{out}

```

// Этап 1: повышение визуального качества
 $x_1 \leftarrow$  НерезкоеМаскирование( $x_g, \lambda = 0,8, \sigma = 1,0$ )
 $x_2 \leftarrow$  ПовышениеРезкости( $x_1, K$ ) //  $K$  — матрица свертки (1)

// Этап 2: устранение артефактов генерации
 $x_3 \leftarrow$  ГауссовоРазмытие ( $x_2$ , ядро =  $3 \times 3, \sigma = 0,5$ )
 $x_{\text{out}} \leftarrow$  МедианноеРазмытие ( $x_3$ , ядро =  $3 \times 3$ )
return  $x_{\text{out}}$ 

```

Алгоритм тренировки (алгоритм 1) реализует итеративный цикл, включающий три этапа. На первом этапе обновляются параметры дискриминатора: к реальным и сгенерированным изображениям применяется прямая диффузия, после чего дискриминатор обучается различать их зашумленные версии. На втором этапе обновляются параметры генератора с целью минимизации способности дискриминатора распознавать сгенерированные данные. Третий этап (опциональный, каждую четвертую итерацию) выполняет адаптацию параметров диффузионного процесса на основе метрики переобучения дискриминатора. Цикл продолжается до достижения максимального числа обработанных изображений.

Алгоритм генерации синтетических изображений (алгоритм 2) использует натренированный генератор модифицированной модели Diffusion-GAN. Для каждого изображения из латентного пространства сэмпляется вектор z , который подается на вход генератора. Полученное синтетическое изображение затем проходит процедуру постобработки (алгоритм 3) для повышения визуального качества. Процесс повторяется до достижения заданного числа изображений.

В рамках алгоритма постобработки (алгоритм 3) сгенерированное изображение пропускается через фильтры нерезкого маскирования и увеличения резкости для улучшения визуального качества. Далее изображение проходит через фильтры Гаусса и медианный фильтр для устранения артефактов генерации. Нерезкое маскирование применяется с параметром λ , равным 0,8, при этом стандартное отклонение σ для внутреннего гауссова размытия равно 1. Для повышения резкости используется матрица

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Для гауссова размытия используется ядро 3×3 и параметр σ , равный 0,5. Для медианного размытия используется ядро 3×3 . Данные параметры стандартны при использовании представленных выше фильтров.

4 Экспериментальная проверка алгоритма генерации синтетических данных

На первом шаге данной проверки была натренирована модифицированная модель Diffusion-GAN на датасете в домене транспортных средств Vehicle Classification SGCUM¹. Данный домен был выбран потому, что, несмотря на распространённость и наличие доступных наборов данных транспортных средств, на практике возникают ситуации, когда не хватает данных с конкретных ракурсов. Дополнительно к этому наличие доступных наборов данных в домене транспортных средств обеспечивает воспроизводимость экспериментов.

Перед началом тренировки модифицированной модели Diffusion-GAN была выполнена конвертация тренировочной выборки набора данных Vehicle Classification SGCUM из 10 000 изображений с помощью специального скрипта.

Тренировка модифицированной модели Diffusion-GAN выполнялась 4 недели на стенде с двумя видеокартами NVIDIA GeForce RTX 2080 Ti с 11 ГБ видеопамати у каждой при размере батча, равном 2, и при числе эпох, равном 25 000. Для лучшего чекпойнта показатель метрики начального расстояния по Фреше был равен 37,7.

На следующем шаге была выполнена генерация 1000 изображений в домене набора данных Vehicle Classification SGCUM. Примеры сгенерированных изображений представлены на рис. 2.

Процедура генерации была выполнена за 1 ч при режиме добавления шума, который предполагает генерацию изображения из векторов, сэмплирующихся случайным образом. Далее для 1000 сгенерированных в домене набора данных Vehicle Classification SGCUM изображений была выполнена процедура постобработки с помощью специального скрипта, который реализует алгоритм 3. Примеры обработанных с помощью алгоритма постобработки сгенерированных изображений представлены на рис. 3.

Следует отметить, что алгоритм постобработки внес положительные изменения в итоговый уровень качества сгенерированных изображений, повысив уровень детализации.

На следующем шаге была выполнена разметка автомобилей на 1000 сгенерированных и претерпевших постобработку изображений для решения задачи

¹Датасет доступен по ссылке <https://universe.roboflow.com/ana-lowela-l-lucas/vehicle-classification-sgcum/dataset/11>.



Рис. 2 Примеры сгенерированных с помощью лучшего чекпойнта модифицированной модели Diffusion-GAN изображений



Рис. 3 Пример исходного и претерпевшего постобработку сгенерированного изображения

обнаружения и классификации объектов с помощью CVAT и обучение модели YOLOv8 в m-модификации на данном размеченном наборе.

Выбор YOLOv8 обосновывается тем, что данная модель входит в семейство YOLO, одно из самых известных семейств нейронных сетей для решения задачи обнаружения объектов, представленное компанией Ultralytics. Модель YOLOv8 сочетает в себе современный дизайн архитектуры, высокую скорость работы на различных конфигурациях оборудования (от 40 до 155 кадр/с), баланс между точностью и скоростью, простоту использования и хороший уровень поддержки со стороны разработчиков.

Для обучения модели YOLOv8m был сформирован конфигурационный файл датасета. В качестве обучающей выборки использовались 1000 изображений, сгенерированных с помощью модифицированной модели Diffusion-GAN и прошедших постобработку. В качестве валидационной и тестовой выборок указывались соответствующие выборки набора данных Vehicle Classification SGCUM. Пре-

Таблица 2 Результаты замера метрик точности лучшего чекпойнта YOLOv8m, натренированного на выборке сгенерированных изображений, на тестовой выборке набора данных Vehicle Classification SGCUM

Название класса	Precision	Recall	mAP@0.5	mAP@0,5-0,95
Coupe	0,957	0,93	0,976	0,957
Pickup	0,996	0,986	0,995	0,991
Sedan	0,924	0,979	0,978	0,971
Suv	0,955	0,949	0,975	0,948
Van	0,983	0,995	0,992	0,988
All	0,963	0,968	0,983	0,971

Таблица 3 Результаты замера метрик точности лучшего чекпойнта YOLOv8m, натренированного на выборке реальных изображений, на тестовой выборке набора данных Vehicle Classification SGCUM

Название класса	Precision	Recall	mAP@0.5	mAP@0,5-0,95
Coupe	0,956	0,917	0,961	0,946
Pickup	1	0,991	0,995	0,989
Sedan	0,921	0,957	0,963	0,951
Suv	0,976	0,917	0,975	0,954
Van	0,99	0,999	0,993	0,987
All	0,969	0,956	0,977	0,965

нировка выполнялась 3 ч на стенде с двумя видеокартами NVIDIA GeForce RTX 2080 Ti с 11 ГБ видеопамати при помощи библиотеки Ultralytics со следующими параметрами: `epochs = 100`, `lr0 = 0.001`, `batch = 32`, `imgsz = 640`, `model = yolov8m.pt`.

После завершения 100-й эпохи для чекпойнта модели `best.pt` YOLOv8m, который находится в директории с артефактами, был выполнен замер основных метрик точности на тестовой выборке датасета Vehicle Classification SGCUM. Результаты данного замера представлены в табл. 2.

На заключительном шаге было выполнено обучение модели YOLOv8m на выборке реальных изображений из набора данных Vehicle Classification SGCUM. Перед этим был создан конфигурационный файл датасета, в рамках которого все выборки — тренировочная, валидационная, тестовая — взяты из датасета Vehicle Classification SGCUM. Обучение выполнялось при тех же параметрах и на том же стенде, что и для выборки сгенерированных изображений.

После завершения обучения для чекпойнта модели `best.pt` YOLOv8m, который находится в директории с артефактами, был выполнен замер основных метрик точности на тестовой выборке. Результаты данного замера представлены в табл. 3.

Исходя из представленных выше результатов можно сделать следующие выводы: натренированная модель детектора YOLOv8m на синтетическом набо-

ре данных, сгенерированных с помощью представленного алгоритма генерации на основе модифицированной модели Diffusion-GAN, демонстрирует метрики точности на тестовой выборке набора данных Vehicle Classification SGCUM, которые практически совпадают с таковыми для модели детектора YOLOv8, натренированного только на тренировочной выборке набора данных Vehicle Classification SGCUM. Это говорит о способности представленного алгоритма генерации синтетических данных создавать фотореалистичные изображения, пригодные для обучения нейронных сетей компьютерного зрения с целью решения любых конкретных практических задач без проявления доменного разрыва. В дополнение к этому можно отметить, что предложенный алгоритм предоставляет возможность адаптироваться под любую задачу компьютерного зрения без значительных временных и вычислительных затрат, т. е. для адаптации достаточно иметь относительно небольшой набор реальных изображений из домена задачи. Также алгоритм комбинирует преимущества генеративно-состязательных и диффузионных моделей, обеспечивает быструю сходимость и предлагает возможность качественной постобработки сгенерированных изображений.

5 Заключение

В данной работе представлен алгоритм генерации синтетических данных для систем технического зрения на основе стекинга генеративно-состязательных и диффузионных моделей. В основе стекинга лежит гибридная модель Diffusion-GAN. Были внесены изменения в один из ключевых компонентов модели, отвечающий за выполнение процедуры прямой диффузии. Алгоритм генерации состоит из трех компонентов: алгоритма тренировки модифицированной модели Diffusion-GAN, алгоритма генерации изображений и алгоритма постобработки с целью улучшения качества сгенерированных изображений и устранения артефактов генерации. По сравнению с аналогами данный алгоритм предоставляет возможность адаптироваться под любую задачу компьютерного зрения без значительных временных и вычислительных затрат, комбинирует преимущества генеративно-состязательных и диффузионных моделей, обеспечивает быструю сходимость и предлагает возможность качественной постобработки сгенерированных изображений, что в совокупности определяет научную новизну. Была продемонстрирована практическая возможность данного алгоритма создавать фотореалистичные изображения на примере решения задачи обнаружения и классификации объектов в транспортном домене. Представленный алгоритм имеет перспективы применения в различных областях. Во-первых, он может использоваться для генерации синтетических данных в задачах, где сбор реальных данных затруднен или связан с проблемами приватности, например при анализе редких сценариев автономного вождения и транспортных потоков. Во-вторых, компоненты алгоритма применимы в смежных задачах, в частности, генератор модифицированной модели Diffusion-GAN может быть адаптирован для восстановления изображений.

Литература

1. *Rocco C.* Synthetic dataset creation for computer vision application: Pipeline proposal: Master Thesis. — Curitiba: Pontifical Catholic University of Paraná, 2021. 102 p. doi: 10.13140/RG.2.2.12115.25126.
2. Synthetic data. <https://edps.europa.eu/press-publications/publications/techsonar/synthetic-data>.
3. *Geogarakis G., Mousavian A., Berg A. C., Kosecka J.* Synthesizing training data for object detection in indoor scenes // 13th Conference “Robotics: Science and Systems” Proceedings, 2017. Art. 043. 9 p. doi: 10.15607/RSS.2017.XIII.043.
4. *Kar A., Prakash A., Liu M.-Y., et al.* Meta-Sim: Learning to generate synthetic datasets. — Cornell University, 2019. 14 p. arXiv:1904.11621 [cs.CV].
5. *Wong Z. M., Kunii K., Baylis M., Ong W. H., Kroupa P., Koller S.* Synthetic dataset generation for object-to-model deep learning in industrial applications // PeerJ Computer Science, 2019. Vol. 5. Iss. 9. Art. e222. 18 p. doi: 10.7717/peerj-cs.222.
6. *Nikolenko S.* Synthetic data for deep learning. — Cornell University, 2019. 156 p. arXiv:1909.11512v1 [cs.LG].
7. *Bubeníček T.* Using game engine to generate synthetic datasets for machine learning // 23rd Central European Seminar on Computer Graphics Proceedings. — Vienna: Institute of Computer Graphics and Algorithms, 2020. 5 p. https://cescg.org/cescg_submission/using-game-engine-to-generate-synthetic-datasets-for-machine-learning/.
8. *Boikov A., Payor V., Savelev R., Kolesnikov A.* Synthetic data generation for steel defect detection and classification using deep learning // Symmetry, 2021. Vol. 13. Iss. 7. Art. 1176. 10 p. doi: 10.3390/sym13071176.
9. *Borkman S., Crespi A., Dhakad S., et al.* Unity perception: Generate synthetic data for computer vision. — Cornell University, 2021. 13 p. arXiv:2107.04259v2. [cs.CV].
10. *Ebadi S. E., Jhang Y.-C., Zook A., et al.* PeopleSansPeople: A synthetic data generator for human-centric computer vision. — Cornell University, 2021. 29 p. arXiv:2112.09290 [cs.CV].
11. *Kiefer B., Ott D., Zell A.* Leveraging synthetic data in object detection on unmanned aerial vehicles. — Cornell University, 2021. 8 p. arXiv:2112.12252v1 [cs.CV].
12. *Tsirikoglou A.* Synthetic data for visual machine learning: A data-centric approach: D.Sc. Diss. — Linköping, Netherlands: Linköping University Electronic Press, 2022. 115 p. doi: 10.3384/9789179291754.
13. *Prakash A., Debnath S., Lafleche J.-F., et al.* Self-supervised real-to-sim scene generation. — Cornell University, 2020. 22 p. arXiv:2011.14488 [cs.CV].
14. *Thambawita V., Salehi P., Sheshkal S. A., et al.* SinGAN-Seg: Synthetic training data generation for medical image segmentation // PLoS ONE, 2022. Vol. 17. Iss. 5. Art. e0267976. 24 p. doi: 10.1371/journal.pone.0267976.
15. *He R., Sun S., Yu X., et al.* Is synthetic data from generative models ready for image recognition. — Cornell University, 2022. 24 p. arXiv:2210.07574 [cs.CV].
16. *Voetman R., Aghaei M., Dijkstra K.* The big data myth: Using diffusion models for dataset generation to train deep detection models. — Cornell University, 2023. 21 p. arXiv:2306.09762 [cs.CV].

17. *Minchul K., Feng L., Anil J., Xiaoming L.* DCFace: Synthetic face generation with dual condition diffusion model // IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Proceedings. — IEEE, 2023. Vol. 1. P. 12715–12725. doi: 10.1109/CVPR52729.2023.01223.
18. *Yingzhou L., Wang H., Wei W.* Machine learning for synthetic data generation: A review. — Cornell University, 2023. 18 p. arXiv:2302.04062 [cs.LG].
19. *Bauer A., Trapp S., Stenger M., et al.* Comprehensive exploration of synthetic data generation: A survey. — Cornell University, 2024. 103 p. arXiv:2401.02524 [cs.CV].
20. *Dubey A., Kuriakose S. M., Bhardwaj N.* SynGen-Vision: Synthetic data generation for training industrial vision models. — Cornell University, 2025. 5 p. arXiv:2509.04894. [cs.CV].
21. *Zhendong W., Huangjie Z., Pengcheng H., Weizhu C., Mingyuan Z.* Diffusion-GAN: Training GANs with diffusion. — Cornell University, 2023. 26 p. arXiv:2206.02262 [cs.LG].
22. *Rombach R., Blattmann A., Lorenz D., Esser P., Ommer B.* High-resolution image synthesis with latent diffusion models // IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Proceedings. — IEEE, 2022. Vol. 1. P. 10674–10685. doi: 10.1109/CVPR52688.2022.01042.
23. *Nikhil A., Dhariwal P.* Improved denoising diffusion probabilistic models. — Cornell University, 2021. 17 p. arXiv:2102.09672 [cs.LG].

Поступила в редакцию 15.12.2025

Принята к публикации 15.04.2026

AN ALGORITHM FOR GENERATING SYNTHETIC DATA FOR TECHNICAL VISION SYSTEMS BASED ON STACKING OF GENERATIVE-ADVERSARIAL AND DIFFUSION MODELS

I. S. Reutov

Department of Mathematics and Computer Science, Cherepovets State University,
5 Lunacharskogo Prosp., Cherepovets 162602, Russian Federation

Abstract: The paper addresses the problem of generating synthetic images for computer vision systems under limited availability of representative real-world datasets. A hybrid algorithm based on stacking generative adversarial and diffusion models is proposed. The key contribution is the modification of the Diffusion-GAN architecture, in which the forward diffusion process is replaced by the mechanism from Stable Diffusion, combining the computational efficiency of diffusion models with the training stability of adversarial approaches. The algorithm implements a three-stage pipeline: training the modified generative model, generating synthetic images, and postprocessing to improve visual quality. Experimental validation was performed on the vehicle detection and classification task using the Vehicle Classification SGCUM dataset. The results demonstrate

that the YOLOv8 model trained exclusively on synthetic data achieves accuracy metrics comparable to those of a model trained on real data, confirming the suitability of the generated data for training deep neural networks.

Keywords: deep neural networks; generative-adversarial models; diffusion models; synthetic data; technical vision systems

DOI: 10.14357/08696527260207

EDN: QZBWOE

References

1. Rocco, C. 2021. Synthetic dataset creation for computer vision application: Pipeline proposal. Curitiba: Pontifical Catholic University of Paraná. Master Thesis. 102 p. doi: 10.13140/RG.2.2.12115.25126.
2. Synthetic data. Available at: <https://edps.europa.eu/press-publications/publications/techsonar/synthetic-data> (accessed May 11, 2026).
3. Geograkis, G., A. Mousavian, A. C. Berg, and J. Kosecka. 2017. Synthesizing training data for object detection in indoor scenes. *13th Conference "Robotics: Science and Systems" Proceedings*. Art. 043. 9 p. doi: 10.15607/RSS.2017.XIII.043.
4. Kar, A., A. Prakash, M.-Y. Liu, *et al.* 2019. Meta-Sim: Learning to generate synthetic datasets. Cornell University. 14 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1904.11621> (accessed May 11, 2026).
5. Wong, Z. M., K. Kunii, M. Baylis, W. H. Ong, P. Kroupa, and S. Koller. 2019. Synthetic dataset generation for object-to-model deep learning in industrial applications. *PeerJ Computer Science* 5(9):e222. 18 p. doi: 10.7717/peerj-cs.222.
6. Nikolenko, S. 2019. Synthetic data for deep learning. Cornell University. 156 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1909.11512v1> (accessed May 11, 2026).
7. Bubeníček, T. 2020. Using game engine to generate synthetic datasets for machine learning. *23rd Central European Seminar on Computer Graphics Proceedings*. 5 p. Available at: https://cescg.org/cescg_submission/using-game-engine-to-generate-synthetic-datasets-for-machine-learning/ (accessed May 11, 2026).
8. Boikov, A., V. Payor, R. Savelev, and A. Kolesnikov. 2021. Synthetic data generation for steel defect detection and classification using deep learning. *Symmetry* 13(7):1176. 10 p. doi: 10.3390/sym13071176.
9. Borkman, S., A. Crespi, S. Dhakad, *et al.* 2021. Unity perception: Generate synthetic data for computer vision. Cornell University. 13 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2107.04259v2> (accessed May 11, 2026).
10. Ebadi, S. E., Y.-C. Jhang, A. Zook, *et al.* 2021. PeopleSansPeople: A synthetic data generator for human-centric computer vision. Cornell University. 29 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2112.09290> (accessed May 11, 2026).
11. Kiefer, B., D. Ott, and A. Zell. 2021. Leveraging synthetic data in object detection on unmanned aerial vehicles. Cornell University. 8 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2112.12252v1> (accessed May 11, 2026).
12. Tsirikoglou, A. 2022. Synthetic data for visual machine learning: A data-centric approach. Linköping: Linköping University Electronic Press. D.Sc. Diss. 115 p. doi: 10.3384/9789179291754.

13. Prakash, A., S. Debnath, J.-F. Lafleche, *et al.* 2020. Self-supervised real-to-sim scene generation. Cornell University. 22 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2011.14488> (accessed May 11, 2026).
14. Thambawita, V., P. Salehi, S. A. Sheshkal, *et al.* 2022. SinGAN-Seg: Synthetic training data generation for medical image segmentation. *PLOS ONE* 17(5):e0267976. 24 p. doi: 10.1371/journal.pone.0267976.
15. He, R., S. Sun, X. Yu, *et al.* 2022. Is synthetic data from generative models ready for image recognition? Cornell University. 24 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2210.07574> (accessed May 11, 2026).
16. Voetman, R., M. Aghaei, and K. Dijkstra. 2023. The big data myth: Using diffusion models for dataset generation to train deep detection models. Cornell University. 21 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2306.09762> (accessed May 11, 2026).
17. Minchul, K., L. Feng, J. Anil, and L. Xiaoming. 2023. DCFace: Synthetic face generation with dual condition diffusion model. *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Proceedings*. IEEE. 1:12715–12725. doi: 10.1109/CVPR52729.2023.01223.
18. Yingzhou, L., H. Wang, and W. Wei 2023. Machine learning for synthetic data generation: A review. Cornell University. 18 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2302.04062> (accessed May 11, 2026).
19. Bauer, A., S. Trapp, M. Stenger, *et al.* 2024. Comprehensive exploration of synthetic data generation: A survey. Cornell University. 103 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2401.02524> (accessed May 11, 2026).
20. Dubey, A., S. M. Kuriakose, and N. Bhardwaj. 2025. SynGen-Vision: Synthetic data generation for training industrial vision models. Cornell University. 5 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2509.04894> (accessed May 11, 2026).
21. Zhendong, W., Z. Huangjie, H. Pengcheng, C. Weizhu, and Z. Mingyuan. 2023. Diffusion-GAN: Training GANs with diffusion. Cornell University. 26 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2206.02262> (accessed May 11, 2026).
22. Rombach, R., A. Blattmann, D. Lorenz, P. Esser, and B. Ommer. 2022. High-resolution image synthesis with latent diffusion models. *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Proceedings*. 1:10674–10685. doi: 10.1109/CVPR52688.2022.01042.
23. Nikhol, A., and P. Dhariwal. 2021. Improved denoising diffusion probabilistic models. Cornell University. 17 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/2102.09672> (accessed May 11, 2026).

Received December 15, 2025

Accepted April 15, 2026

Contributor

Reutov Ilya S. (b. 1998) — senior lecturer, Department of Mathematics and Computer Science, Cherepovets State University, 5 Lunacharskogo Prosp., Cherepovets 162602, Russian Federation; dr.reutov98@mail.ru

БАЗОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОСТРОЕНИЯ ЕДИНОЙ СИСТЕМЫ ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ*

И. А. Саитов¹, Н. И. Фокин², Ю. Б. Миронов³, Б. М. Шабанов⁴

Аннотация: Представлен оригинальный подход к моделированию качества доставки эталонных сигналов времени и частоты (ЭСВЧ) с использованием спектральной корреляционной теории случайных процессов. Эта и подобные задачи возникают при решении современных задач проектирования (синтеза, оптимизации) систем частотно-временного обеспечения (ЧВО) объектов информационной инфраструктуры, применяющих в том числе альтернативные источники эталонных сигналов. Реализация такого подхода станет фундаментом для формирования новых базовых элементов теории построения Единой системы ЧВО национальной информационной инфраструктуры. В качестве ядра такой теории предлагается использовать аналитическое описание зависимости качества сигналов времени и частоты от причин и характеристик их флуктуаций. Важность этих закономерностей обусловлена тем, что от скорости дисконтирования качества сигналов времени и частоты зависит потенциальная дальность их распределения. Это, в свою очередь, определяет основные топологические характеристики и стоимость системы ЧВО информационной инфраструктуры.

Ключевые слова: частотно-временное обеспечение; национальная информационная инфраструктура; качество синхронизации

DOI: 10.14357/08696527260208

EDN: BMCVDO

1 Введение

Функционирование национальной информационной инфраструктуры имеет существенное значение для контуров государственного и военного управления Российской Федерации, особенно в условиях расширившихся угроз извне [1]. Устойчивость национальной информационной инфраструктуры определяется сегодня не только совершенством применяемых технологий и оборудования, но

*Мироновым Ю. Б. и Шабановым Б. М. работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ «Курчатовский институт».

¹МИРЭА — Российский технологический университет, saitov_i@mirea.ru

²Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации, ni_fokin@mail.ru

³Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», umironov@jssc.ru

⁴Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», jssc@jssc.ru

и качеством ЧВО ее элементов [2, 3]. Это свидетельствует об актуальности проблематики, рассматриваемой в настоящей статье.

Еще 20 лет назад считалось достаточным применение для ЧВО национальной информационной инфраструктуры сети тактовой сетевой синхронизации (ТСС), включающей сегменты глобальных спутниковых систем (ГСС) и наземные иерархические сегменты генерации и распределения синхросигналов [4, 5]. Это была эпоха синхронной цифровой иерархии (СЦИ) [6] в телекоммуникациях и однонаправленного переноса сигнала стабильной (стабилизированной) частоты на физическом уровне к потребителям (узлам, станциям). Фазовые искажения в таких реализациях компенсировались схемами фазовой автоподстройки [7]. Однако в нашей протяженной стране даже такая простая по формулировке задача построения (синтеза, оптимизации структуры) ТСС становилась NP-трудной [8, 9] комбинаторной проблемой.

В XXI в. масштабная информатизация государства потребовала кратного увеличения производительности каналов связи, трактов и узлов, а также построения инфокоммуникационных сетей (ИКС) нового поколения [10]. Внедряются соответствующие технологии, например: «синхронный» Ethernet (SyncE) [11], оптические транспортные сети (Optical Transport Network, OTN) [12], высокопроизводительные системы хранения и обработки информации. Эти факторы обусловили существенное ужесточение требований к качеству (стабильности, устойчивости, защищенности) ЭСВЧ [13]. В связи с этим во всех развитых странах наблюдается активное совершенствование систем синхронизации, координатно-временного и навигационного обеспечения [14]. Ведется поиск решений для построения национальных систем ЧВО повышенной устойчивости [15–17], не зависящих от глобальной спутниковой системы, имеющей известные уязвимости [2]. Разработаны и внедрены протоколы сетевого (Network Time Protocol, NTP) [18] и точного (прецизионного) (Precision Time Protocol, РТР) [19] времени, соответствующие аппаратно-программные средства, исследуются альтернативные источники ЭСВЧ и средства распределения синхросигналов и сигналов точного времени.

С внедрением РТР-серверов широкое применение в ИКС получили двунаправленные протоколы согласования параметров временных шкал, использующие обмен временными метками между источником и потребителем ЭСВЧ. Исследования показывают, что существенное влияние на качество этого процесса оказывают природа и характеристики фазовых флуктуаций сигналов времени и частоты [20]. Для протяженных магистралей, характерных для отечественных ИКС, данная зависимость носит фундаментальный характер. От скорости дисконтирования качества ЭСВЧ зависит потенциальная дальность их распределения, а следовательно, основные топологические характеристики системы ЧВО. Это непосредственно влияет на объем затрачиваемых ресурсов, т. е. экономическую эффективность информационной инфраструктуры.

Следовательно, к числу наиболее критических факторов в рассматриваемой предметной области относятся следующие:

- (1) ужесточение требований к качеству (стабильности, устойчивости, защищенности) ЭСВЧ в современных ИКС;
- (2) уязвимость каналов и трактов ГСС;
- (3) способность оптических транспортных сетей реализовать современные протоколы ЧВО с заданным качеством;
- (4) зависимость ресурсоемкости ИКС от свойств системы ЧВО, которые, в свою очередь, определяются возможностями качественной доставки ЭСВЧ;
- (5) специфика многих требующих немедленного решения научно-технических задач ЧВО, свойственных исключительно российским ИКС, которые не ставятся и не решаются в других странах.

Отказ от традиционных принципов применения ГСС и применение альтернативных средств генерации и доставки ЭСВЧ потребует разработки новой строгой, но в то же время конструктивной теории построения системы ЧВО [21], позволяющей с единых методологических позиций оценивать существующее положение дел в предметной области, исследовать предлагаемые новые решения по построению (синтезу, проектированию) систем синхронизации, координатно-временного и навигационного обеспечения, а также обосновывать предложения по их оптимизации относительно специфики функционирования национальной информационной инфраструктуры. В качестве ядра такой теории по представленным выше доводам предлагается использовать аналитическое описание зависимости качества сигналов времени и частоты от причин и характеристик их флуктуаций.

2 Общие положения

В соответствии с ГОСТ Р 71150-2023 [22] параметрами качества ЭСВЧ считаются (в скобках приведены аналоги аббревиатур из англоязычных библиографических источников):

- приведенный параметр джиттера $q^П$ (ППД, UI_{pp});
- максимальная ошибка временного интервала $q^М$ (МОВИ, МТИЕ);
- девиация временного интервала $q^Д$ (ДВИ, TDEV);
- относительное отклонение частоты $q^Ч$ (ООЧ, RFD).

Фактически аналогичные показатели качества ЭСВЧ определены в рекомендациях МСЭ-Т, например G.811.1, G.812, G.813, G.8251, а также стандартах ETSI, например EN 300 462-6-1, EN 300 462-4-1, EN 300 462-7-1, где в некоторых источниках предлагается использовать еще значение дисперсии времени (TVAR). Для периода времени наблюдения τ можно записать, что

$$q^{\text{II}} = \max_{t \leq i \leq \tau} x_i - \min_{t \leq i \leq \tau} x_i; \quad (1)$$

$$q^{\text{M}} = \max_{1 \leq k \leq N-n} x_i \left[\max_{k \leq i \leq k+n} x_i - \min_{k \leq i \leq k+n} x_i \right], \quad \overline{n = 1, N-1}; \quad (2)$$

$$q^{\text{D}} = \sqrt{\frac{1}{6n^2(N-3n+1)} \sum_{j=1}^{N-3n+1} \left[\sum_{i=j}^{n+j-1} (x_{i+2n} - 2x_{i+n} + x_i) \right]^2}, \quad \overline{n = 1, \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor}; \quad (3)$$

$$q^{\text{Ч}} = \frac{\tau^2}{3} q^{\text{D}}, \quad (4)$$

где x_i — i -й отсчет временной ошибки; τ_0 — интервал дискретизации для временных ошибок; n — число интервалов дискретизации (в пределах периода τ , так что $\tau = n\tau_0$); N — суммарное число отсчетов временной ошибки.

Видно, что выражения (1)–(4) предназначены для обработки апостериорных данных, полученных в результате измерений параметров на действующей ИКС, и ориентированы главным образом на мониторинг (аудит) качества ЧВО. Для решения задач планирования (проектирования, синтеза, оптимизации структуры) системы ЧВО данные формализмы малоэффективны.

Далее предлагается разработать базовые элементы теории построения единой системы ЧВО национальной информационной инфраструктуры с использованием спектральной корреляционной теории случайных процессов и вероятностной меры. Для их разработки необходимо установить аналитические соотношения между топологическими характеристиками инфраструктуры, с одной стороны, и вероятностными и энергетическими характеристиками параметров стабильности ЭСВЧ и характеристиками их источников, с другой.

Канонической формой описания ЭСВЧ на выходе источника служит функция вида

$$s(t) = A(t) \sin \Phi(t),$$

где $A(t)$ — мгновенная амплитуда; $\Phi(t)$ — полная фаза ЭСВЧ. Для амплитуды такого сигнала справедливо допущение о постоянстве:

$$A(t) = A_n + \varepsilon(t).$$

Здесь A_n — номинальное значение амплитуды сигнала синхронизации; $\varepsilon(t)$ — отклонение от номинального значения, существенно меньшее A_n :

$$\frac{\varepsilon(t)}{A_n} \ll 1.$$

Исследования показали, что отклонением $\varepsilon(t)$ от номинального значения амплитуды можно пренебречь при моделировании флуктуаций ЭСВЧ, более

важны данные о частотно-временных характеристиках сигнала $s(t)$, заложенных в его полной фазе $\Phi(t)$, которая может быть записана в форме мгновенной частоты:

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt}.$$

В [3] показано, что справедливой и конструктивной в рамках поставленной цели исследования оказывается модель мгновенной частоты вида

$$\nu(t) = \nu_0 + \nu_d(t) + \nu_a(t),$$

где ν_0 — номинальная частота, складывающаяся из номинальной частоты ν_n и начального сдвига $\Delta\nu$: $\nu_0 = \nu_n + \Delta\nu$; $\nu_d(t)$ — дрейф частоты; $\nu_a(t)$ — случайная составляющая частоты.

Величина начального сдвига частоты зависит от точности начальной установки. Дрейф частоты $\nu_d(t)$ для конкретного типа источника ЭСВЧ считается детерминированным слагаемым, зависящим от времени. Для каждого отдельного устройства этот дрейф спровоцирован различными процессами, свойственными именно этому образцу. Адекватной моделью дрейфа частоты $\nu_d(t)$ считается ряд

$$\nu_d(t) = \sum_{k=1}^{K-1} \frac{d_k t^k}{k!}, \quad (5)$$

где d_k ($k = \overline{1, K-1}$) — коэффициенты, не зависящие от времени, представляющие собой случайные величины, определенные на всем множестве пространственно-разнесенных по сети источников ЭСВЧ.

Для определенного устройства эти коэффициенты представляют собой постоянные величины. Поэтому для моделирования часто ограничиваются только первым членом ряда (5):

$$\nu_d(t) \approx d_1 t = D\nu_n t,$$

где D — скорость линейного дрейфа.

Случайная составляющая мгновенной частоты с точки зрения фазового представления может быть записана как

$$\nu_a(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt},$$

где $\varphi(t)$ — стохастический процесс случайного отклонения фазы синхросигнала; следовательно, $\varphi(t)/(2\pi)$ — стохастический процесс случайного отклонения частоты синхросигнала. Данные величины можно использовать для моделирования собственного шума источника ЭСВЧ.

Таким образом, мгновенную частоту целесообразно представить в формальном виде как

$$\nu(t) = \nu_n + \Delta\nu + \sum_{k=1}^{K-1} \frac{d_k t^k}{k!} + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

Вследствие этого обобщенная фаза ЭСВЧ может быть отображена формулой

$$\Phi(t) = 2\pi(\nu_n + \Delta\nu)t + \pi D\nu_n t^2 + \varphi(t) + \Phi_0,$$

где $\Phi_0 = \Phi(0) - \varphi(0)$.

Такое представление обобщенной фазы целесообразно использовать для формирования базовых элементов теории построения системы ЧВО в виде формализмов фазовых флуктуаций (ФФ) ЭСВЧ.

Упрощение представленного выражения может быть получено исходя из двух фактов:

- (1) зависимый от времени дрейф частоты $\pi D\nu_n t^2$ можно измерить и получить для каждого конкретного образца источника ЭСВЧ, что позволяет считать его заданным и детерминированным;
- (2) сдвиг частоты $\Delta\nu$ целесообразно исключить, так как прецизионная первоначальная калибровка позволяет свести его к нулю.

Тогда зависимые от времени ФФ можно определить как

$$\Phi(t) = 2\pi\nu_n t + \Phi_0.$$

Вышеизложенное позволяет моделировать случайные флуктуации частоты $y(t)$ и времени $x(t)$, выявляемые в ЭСВЧ, формируемых источниками, через фазовые свойства:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi\nu_n} \frac{d\varphi(t)}{dt}; \quad x(t) = \frac{\varphi(t)}{2\pi\nu_n}. \quad (6)$$

Формализмы (6) служат моделями только случайных флуктуаций частоты и времени, не учитывают сдвиг и дрейф частоты ЭСВЧ.

Из этой же логики можно определить функцию времени $T(t)$ ЭСВЧ (источника) через обобщенную фазу:

$$T(t) = \frac{\Phi(t)}{2\pi\nu_n}.$$

Очевидно, что для идеального источника $T_{\text{идеал}}(t) = T(t) = t$, где t — текущее время. При этом функция погрешности времени $TE(t)$ для ЭСВЧ (источника) определяется как

$$TE(t) = T(t) - T_{\text{оп}}(t),$$

где $T_{\text{оп}}(t)$ — опорное время.

Таким образом, стабильность ЭСВЧ (источников) может быть представлена на основе математического инструментария случайных процессов $\varphi(t)$, $x(t)$, $y(t)$ или $\nu(t)$ и $TE(t)$. Ключевую роль при этом играют ФФ. Из фундаментальной теории электромагнитного поля известно, что описание случайных процессов $\varphi(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $\nu(t)$ и $TE(t)$ возможно как во временной области (выражения (1)–(4)), так и в области частот Фурье. При этом о стабильности ЭСВЧ (источников) в частотной области можно сделать вывод по степени рассеяния мощности в частотной области около идеальной несущей [4].

3 Классификация фазовых флуктуаций и моделирование их источников

Фазовые флуктуации далее понимаются как случайные отклонения во времени фронта импульсов цифрового сигнала от его идеального положения. Классификация ФФ часто осуществляется по их времени проявления. Кратковременные ФФ, частота которых больше или равна 10 Гц, определяются как фазовые дрожания (ФД). Долговременные ФФ, частота которых меньше 10 Гц, называются фазовыми блужданиями (ФБ).

Классификацию ФФ целесообразно провести исходя из их физических причин, т. е. по источникам ФФ. Для этого из всей суммы ФФ необходимо выделить случайные и систематические ФФ (рис. 1). Источниками случайных ФФ (СлФФ) служат: тепловой шум, дробовый шум, $1/f$ -шум и другие, зависящие от физической природы источника ЭСВЧ и тракта его доставки.

Вследствие этого СлФФ имеют нерегулярный характер и, как следствие, не коррелированы ни с какими другими случайными процессами.

Систематические ФФ (СиФФ) для каждого конкретного источника ЭЧВС и тракта его доставки имеют предсказуемые характеристики. К таким принято относить периодические флуктуации (ПФФ), флуктуации, зависящие от параметров данных (ФФД), и флуктуации вследствие искажения коэффициента заполнения (ФФЗ).

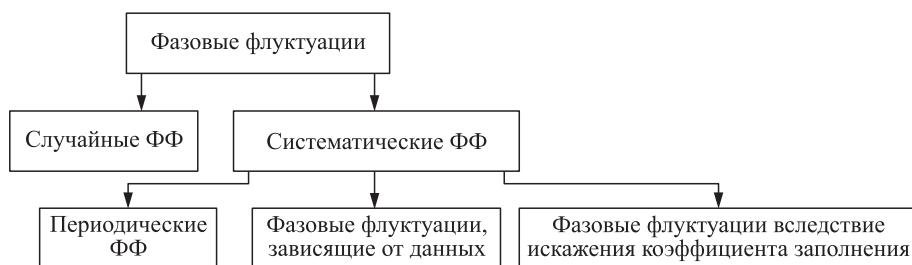


Рис. 1 Вариант классификации ФФ

Моделирование перечисленных факторов следует проводить исходя из природы. Исследования показали, что СиФФ ограничены по амплитуде и характеризуются значением полного размаха. Случайные ФФ не ограничены и характеризуются среднеквадратичным отклонением σ .

В качестве математической модели СлФФ целесообразно использовать случайный процесс с функцией плотности вероятности (ФПВ), распределенной по нормальному закону:

$$f_{\text{СлФФ}}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}},$$

где η — номинальный период источника ЭСВЧ; σ — среднеквадратичное отклонение СлФФ.

Допущение о нормальном законе ФПВ обусловлено следующими доводами. Во-первых, тепловой шум, вносящий основной вклад в СлФФ, сам описывается нормальным законом распределения. Во-вторых, СлФФ включают в себя флуктуации из-за большого числа различных физических эффектов (в генераторном оборудовании, оборудовании мультиплексирования и коммутации, линии передачи; суточное и сезонное изменение температуры и т. д.). Сумма большого числа независимых (или слабо зависимых) случайных величин в силу центральной предельной теоремы в результате формирует распределение, приближающееся к нормальному закону.

Наибольший вклад в систематические ФФ вносят периодические флуктуации. Они возникают вследствие воздействия периодических помех, таких как влияние параметров гетеродина или импульсного источника питания, нежелательных перекрестных искажений, неидеальности схем фазовой автоподстройки частоты телекоммуникационного оборудования и пр.

Исследования показали, что функция плотности вероятностей ПФФ имеет арксинусную ФПВ вида

$$f_{\text{ПФФ}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{A^2 - x^2}}, & |x| \leq A; \\ 0, & |x| > A, \end{cases}$$

где A — амплитуда ПФФ.

Модели ФПВ для ФФД, а также ФПВ для ФФЗ из-за сходства статистического поведения целесообразно представить в форме двух отдельных амплитудных составляющих, описываемых двойной ФПВ Дирака:

$$f_{\text{ФФД}}(x) = \frac{1}{2} (\delta(x - \theta) + \delta(x + \theta));$$

$$f_{\text{ФФЗ}}(x) = \frac{1}{2} (\delta(x - \lambda) + \delta(x + \lambda)),$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака; θ — амплитуда ФФД; λ — амплитуда ФФЗ.

Несмотря на то что функции плотности вероятностей ФФД и ФФЗ отличаются только амплитудами, природа их происхождения различна. Возникновение ФФД вызвано межсимвольной интерференцией. Например, в оптических трактах межсимвольная интерференция вызвана дисперсией (хроматической, поляризационной, модовой) распространения излучения. Это явление возникает вследствие наличия частотной зависимости показателя преломления и различия времени распространения разных мод в среде распространения.

Появление ФФЗ вызвано изменениями порога квантования электрооптического преобразования относительно его оптимального положения. Увеличение порога ведет к задержке переднего фронта на некоторую случайную величину $\Delta\tau_{пф}$, при этом задний фронт, напротив, наступит раньше на величину $\Delta\tau_{зф}$. В свою очередь, различные времена нарастания и спада фронтов импульса приводят к тому, что погрешность коэффициента заполнения перехода высокого уровня двоичного сигнала в низкий $\Delta\tau_{вн}$ не будет равна погрешности перехода низкого уровня сигнала в высокий $\Delta\tau_{нв}$ пропорционально разнице между временами нарастания и спада.

4 Моделирование суммарных фазовых флуктуаций

Специфика проявления кратковременных и долговременных ФФ обуславливает разные подходы к их измерениям и оценке.

Мгновенные значения кратковременных ФФ определяются как максимальный размах амплитуды, измеренный на 60-секундном интервале. При этом энергетический спектр кратковременных ФФ достаточно сложен, а потому для его измерения и нормирования применяется метод двух взвешивающих полосовых фильтров (ПФ) с соответствующими частотными характеристиками $H_{вч1}$, $H_{вч2}$ и $H_{нч1}$, удовлетворяющими требованиям рекомендаций МСЭ-Т G.8251 и O.172 [23].

Для измерения долговременных ФФ используется фильтр низких частот (ФНЧ) с полосой 10 Гц, с характеристикой первого порядка $H_{нч}$, соответствующей требованиям рекомендаций МСЭ-Т G.812 и G.813.

С учетом принятых методов измерения ФФ, а также частотных характеристик применяемых измерительных фильтров можно представить соответствующие ФПВ суммарных ФФ от показателей стабильности ЭСВЧ (рис. 2).

В частности, для кратковременных ФФ соответствующие ФПВ суммарных ФФ от показателя приведенного параметра джиттера (ППД, UI_{pp}), представленного выражением (1), можно формализовать в виде

$$\left. \begin{aligned} f_{1ппд} &= \xi_{ппд}(f_{фф}(x)H_{нч1}, H_{вч1}); \\ f_{2ппд} &= \xi_{ппд}(f_{фф}(x)H_{нч1}, H_{вч2}). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь $H_{нч1}$ — частотная характеристика ФНЧ третьего порядка; $H_{вч1}$ и $H_{вч2}$ — частотные характеристики фильтров высоких частот первого порядка;

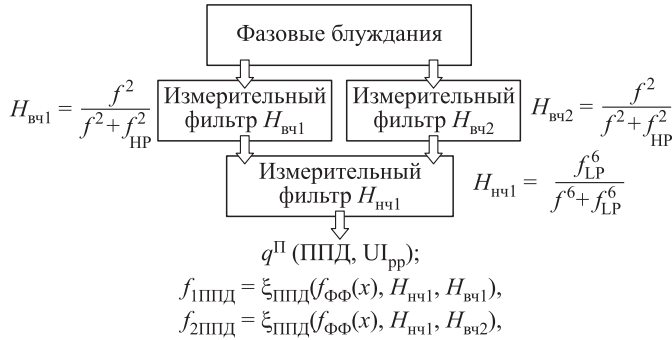


Рис. 2 Метод измерения кратковременных $\Phi\Phi$ и получения $\Phi\Pi\text{В}$ показателей стабильности ЭСВЧ

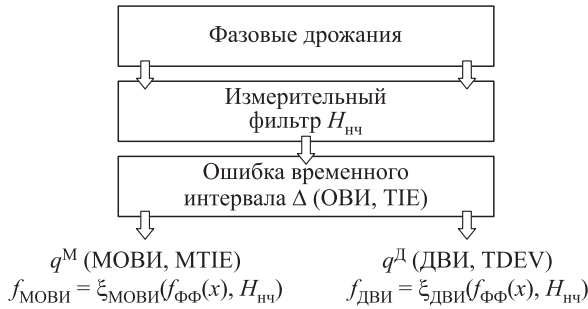


Рис. 3 Метод измерения долговременных $\Phi\Phi$ и получения $\Phi\Pi\text{В}$ показателей стабильности ЭСВЧ

$|H_{\text{meas}}(j \cdot 2\pi f)|^2 = H_{\text{вч1(вч2)}} H_{\text{нч1}}$ — частотная характеристика полосового фильтра.

Функция плотности вероятности суммарных долговременных $\Phi\Phi$ (рис. 3) от показателей стабильности ЭСВЧ, выраженных через максимальную ошибку временного интервала q^M (МОВИ, МТИЕ) и девиацию временного интервала q^D (ДВИ, ТДЕВ), выражения соответственно (2) и (3), можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} f_{\text{МОВИ}} &= \xi_{\text{МОВИ}}(f_{\Phi\Phi}(x), H_{\text{нч}}); \\ f_{\text{ДВИ}} &= \xi_{\text{ДВИ}}(f_{\Phi\Phi}(x), H_{\text{нч}}). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Аналогичным образом можно представить $\Phi\Pi\text{В}$ суммарных $\Phi\Phi$ от показателя стабильности частоты ЭСВЧ — относительного отклонения частоты $q^Ч$ (ООЧ, RFD):

$$f_{\text{ООЧ}} = \xi_{\text{ООЧ}}(f_{\Phi\Phi}(x)), \quad q^Ч = \frac{\Delta f}{f_{\text{НОМ}}} = \frac{f_{\text{д}} - f_{\text{НОМ}}}{f_{\text{НОМ}}}, \quad (9)$$

где $f_{\text{д}}$ — действительное, а $f_{\text{НОМ}}$ — номинальное значение частоты.

С учетом выражений (1)–(4) формализмы (7)–(9) представляют собой комплекс базовых элементов теории построения системы ЧВО и дают прямое описание зависимости между мгновенными значениями ЭСВЧ и параметрами качества ЧВО в фазовом пространстве. Если (см. рис. 1)

$$x_{\Phi\Phi}(t) = x_{C_{л\Phi\Phi}}(t) + x_{П\Phi\Phi}(t) + x_{\Phi\Phi Д}(t) + x_{\Phi\Phi З}(t),$$

то искомые закономерности целесообразно найти путем свертки

$$f_{\Phi\Phi}(t) = f_{C_{л\Phi\Phi}}(t) * f_{П\Phi\Phi}(t) * f_{\Phi\Phi Д}(t) * f_{\Phi\Phi З}(t). \quad (10)$$

В таком представлении функция (10) становится моделью $\Phi\Phi$ источников ЭСВЧ. Она характеризует качество ЭСВЧ только на выходе генератора. В рамках поставленных целей исследования необходимо нахождение, кроме представленных выше $\Phi\Phi$ ПВ, всех типов $\Phi\Phi$ СС после прохождения трактов доставки (распространения) ЭСВЧ. Следовательно, целесообразно записать:

$$\left. \begin{aligned} \check{f}_{1\text{ППД}} &= \check{\xi}_{\text{ППД}}(H(s), L, \check{f}_{\Phi\Phi}(x), H_{\text{нч1}}, H_{\text{вч1}}); \\ \check{f}_{2\text{ППД}} &= \check{\xi}_{\text{ППД}}(H(s), L, \check{f}_{\Phi\Phi}(x), H_{\text{нч1}}, H_{\text{вч2}}); \\ \check{f}_{\text{МОВИ}} &= \check{\xi}_{\text{МОВИ}}(H(s), L, \check{f}_{\Phi\Phi}(x), H_{\text{нч}}); \\ \check{f}_{\text{ДВИ}} &= \check{\xi}_{\text{ДВИ}}(H(s), L, \check{f}_{\Phi\Phi}(x), H_{\text{нч}}); \\ \check{f}_{\text{ООЧ}} &= \check{\xi}_{\text{ООЧ}}(H(s), L, \check{f}_{\Phi\Phi}(x)), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $H(s)$ — передаточная функция замкнутой петли второго порядка ($\Phi\text{АПЧ}$); L — параметры тракта передачи ЭСВЧ.

В виде выражений (11) $\Phi\text{ПВ}$ флуктуаций ЭСВЧ становится формальным представлением дисконтирования свойств ЭСВЧ от источника до потребителя, качества цепочки $\Phi\text{АПЧ}$, качества трактов доставки. В результате имеет место количественное описание качества ЭСВЧ в любой наперед заданной точке системы ЧВО.

Естественно, функции, представленные в виде (11), не могут быть получены строго математически из выражений (7)–(9). Тем не менее выражения (11) могут быть получены на основе функций автокорреляции $\Phi\Phi$ и теоремы Хинчина–Винера [24], которые позволяют связать соответствующие формализмы с энергетическим спектром $S_{\Phi\Phi}(\omega)$ фазовых флуктуаций. Также можно использовать оптимизационно-фильтрационные подходы, описанные в [25, 26]. Кроме того, $\Phi\Phi$ можно рассматривать и как функцию, модулирующую фазу импульсной последовательности с тактовой частотой f_T . Следовательно, и функцию, модулирующую фазу, и $\Phi\Phi$ можно определять как посредством мгновенных значений x_i , так и посредством энергетического спектра $S_{\Phi\Phi}(\omega)$ ЭСВЧ.

5 Заключение

В работе сформулирован новый подход к решению актуальной и востребованной на практике научно-технической задачи моделирования качества доставки ЭСВЧ с использованием спектральной корреляционной теории случайных процессов и вероятностной меры. Представленные в статье элементы теории позволяют по-новому сформулировать и решать задачу синтеза системы ЧВО национальной информационной инфраструктуры с использованием фазового представления и вероятностной меры. Полученные аналитические соотношения целесообразно использовать для количественного описания зависимостей параметров стабильности ЭСВЧ от характеристик их фазовых флуктуаций.

Дальнейшим направлением исследований представляется проведение экспериментальной работы по проверке полученных закономерностей, а также решение научно-технических задач по определению диапазонов параметров и топологии системы ЧВО, при которых информационная инфраструктура исчерпывающе снабжена качественными ЭСВЧ.

Литература

1. Об утверждении Стратегии развития отрасли связи РФ на период до 2035 года: Распоряжение Правительства РФ от 24.11.2023 № 3339-р. <http://publication.pravo.gov.ru/document/0001202312040015>.
2. Колтунов М. Н., Шварц М. Л. Актуальные вопросы применения оборудования частотно-временного обеспечения на ЕСЭ России // Системы синхронизации, формирования и обработки сигналов, 2018. Т. 9. № 2. С. 113–120. EDN: YOONWP.
3. Шимкив Д. О., Маслова О. В. Частотно-временное обеспечение потребителей // Известия ТулГУ. Технические науки, 2023. № 3. С. 436–440. doi: 10.24412/2071-6168-2023-3-436-440. EDN: OCOYFO.
4. Слепов Н. Н. Синхронные цифровые сети SDH. — М.: Эко-Трендз, 1999. 150 с.
5. Брени С. Синхронизация цифровых сетей связи / Пер. с англ. — М.: Мир, 2003. 418 с. EDN: QMMJZZ. (Bregni S. Synchronization of digital telecommunications networks. — John Wiley & Sons, 2002. 430 p.)
6. ITU-T G.707. Network node interface for synchronous digital hierarchy (SDH).
7. Кузьмин Р. Э. Фазовая автоподстройка приемных каналов систем спутниковой связи // Труды МАИ, 2018. Вып. 99. Ст. 18. 17 с. EDN: UPSSKI.
8. Лохмоткоя В. В. Модели и методы оптимизации структуры телекоммуникационных сетей: Дис. . . . докт. техн. наук. — СПб.: СПбГУТ, 1998. 290 с. EDN: QCZSSZ.
9. Саитов И. А. Основы теории построения защищенных мультипротокольных оптических транспортных сетей телекоммуникационных систем. — Орел: Академия ФСО России, 2008. 220 с. EDN: QMTNWR.
10. Давыдов С. Г., Казарян К. Р., Сайкина М. В. Интернет в России в 2022–2023 годах. Состояние, тенденции и перспективы развития. — М.: Минцифры, 2023. 207 с. <https://digital.gov.ru/uploaded/files/internet-v-rossii-v-2022-2023-godah.pdf>.

11. *Ибрагимов И.* Синхронизация в больших и неоднородных сетях SyncE // Электронные компоненты, 2020. № 12. С. 30–33. <https://elcomdesign.ru/wp-content/uploads/2021/01/30.pdf>.
12. ITU-T G.709. Interfaces for optical transport network.
13. *Балаев Р. И.* Современные требования к обеспечению сетей связи нового поколения эталонными сигналами времени и частоты // Альманах современной метрологии, 2021. № 4(28). С. 109–114. EDN: WPUAKI.
14. *Лоховин В. А., Шварц М. Л., Рыжков А. В.* Перспективные направления развития систем связи и синхронизации сложных инфраструктурных объектов // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт, 2024. Т. 18. № 11. С. 30–37. doi: 10.36724/2072-8735-2024-18-11-30-37. EDN: UZQBNC.
15. OPNT Technical Report + Test Plan v1.6. https://joint-research-centre.ec.europa.eu/system/files/2023-03/AD_1_OPNT_v3.pdf.
16. SpaceWERX AltPNT. <https://afwerxchallenge.com/spacewerx26/altpnt>.
17. DARPA to launch programme for creating optical atomic clocks. — Airforce Technology, 2022. <https://www.airforce-technology.com/news/darpa-optical-clocks>.
18. RFC 5905-2010. Network Time Protocol Version 4: Protocol and Algorithms Specification. 110 p. doi: 10.17487/RFC5905. <https://www.rfc-editor.org/rfc/pdf/rfc5905.txt.pdf>.
19. IEEE Std 1588-2019. IEEE Standard for a Precision Clock Synchronization Protocol for Networked Measurements and Control Systems. doi: 10.1109/IEEESTD.2020.9120376.
20. *Новожилов Е. О.* Методы повышения точности синхронизации частоты и времени в волоконно-оптических системах передачи // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт, 2014. Т. 8. № 2. С. 38–40. EDN: SARIAL.
21. *Рыжков А. В., Шварц М. Л., Аладин В. М., Исупов А. В.* Опыт внедрения систем частотно-временного обеспечения сетей связи // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт, 2022. Т. 16. № 7. С. 21–28. doi: 10.36724/2072-8735-2022-16-7-21-28. EDN: NDBCDD.
22. ГОСТ Р 71150-2023. Методика проведения аудита систем синхронизации сетей связи: сетей связи с коммутацией каналов, сетей связи с коммутацией пакетов. — М.: Российский институт стандартизации, 2023. 40 с.
23. ITU-T O.172-2005. Jitter and wander measuring equipment for digital systems which are based on the synchronous digital hierarchy (SDH).
24. *Тихонов В. Н.* Статистическая радиотехника. — 2-е изд. — М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
25. *Шахтарин Б. И.* Фильтры Винера и Калмана. — М.: Гелиос АРВ, 2008. 408 с.
26. Академик Пугачёв Владимир Семенович. К столетию со дня рождения / Под ред. И. Н. Синицына. — М.: ТОРУС ПРЕСС, 2011. 376 с. EDN: OVYRLT.

Поступила в редакцию 05.02.2026

Принята к публикации 15.04.2026

BASIC ELEMENTS OF THE THEORY OF A UNIFIED SYSTEM OF FREQUENCY–TIME SUPPORT FOR THE NATIONAL INFORMATION INFRASTRUCTURE

I. A. Saitov¹, N. I. Fokin², Yu. B. Mironov³, and B. M. Shabanov³

¹MIREA — Russian Technological University, 78 Vernadskogo Ave., Moscow 119454, Russian Federation

²Academy of Federal Guard Service of Russia, 35 Priborostroitel'naya Str., Orel 302034, Russian Federation

³National Research Center “Kurchatov Institute,” 1 Acad. Kurchatov Sq., Moscow 123182, Russian Federation

Abstract: The article presents an original approach to modeling the quality of delivery of reference time and frequency signals using the spectral correlation theory of random processes. This and similar problems arise in solving modern design (synthesis, optimization) problems of time-frequency support systems for information infrastructure facilities, including those using alternative sources of reference signals. Implementation of this approach will form the foundation for developing new core elements of a theory for constructing a Unified Time-Frequency Support System for the National Information Infrastructure. The core of such a theory is proposed to be an analytical description of the dependence of time and frequency signal quality on the causes and characteristics of their fluctuations. The importance of these patterns stems from the fact that the potential range of their distribution depends on the discount rate of time and frequency signal quality. This, in turn, determines the key topological characteristics and cost of the time-frequency support system for the information infrastructure.

Keywords: time-frequency support; national information infrastructure; synchronization quality

DOI: 10.14357/08696527260208

EDN: BMCVDO

Acknowledgments

Mironov Yu. B. and Shabanov B. M. carried out the work at the National Research Center “Kurchatov Institute” within the framework of the government assignment.

References

1. Ob utverzhdenii Strategii razvitiya otrasli svyazi RF na period do 2035 goda: Rasporyazhenie Pravitel'stva RF ot 24.11.2023 № 3339-r [On approval of the Strategy for the development of the communications industry of the Russian Federation for the period up to 2035 (approved by the Order of the Government of the Russian Federation dated 24.11.2023 No. 3339-r)]. Available at: <http://publication.pravo.gov.ru/document/0001202312040015> (accessed May 13, 2026).

2. Koltunov, M. N., and M. L. Schwartz. 2018. Aktual'nye voprosy primeneniya oborudovaniya chastotno-vremennogo obespecheniya na ESE Rossii [Current issues of using frequency-time support equipment on the unified telecommunications network of Russia]. *Sistemy sinkhronizatsii, formirovaniya i obrabotki signalov* [Signal Synchronization, Generation, and Processing Systems] 9(2):113–120. EDN: YOONWP.
3. Shimkiv, D. O., and O. V. Maslova. 2023. Chastotno-vremennoe obespechenie potrebiteley [Frequency–time provision of consumers]. *Izvestiya TulGU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya Tula State University] 3:436–440. doi: 10.24412/2071-6168-2023-3-436-440. EDN: OCOYFO.
4. Slepov, N. N. 1999. *Sinkhronnye tsifrovye seti SDH* [Synchronous digital networks SDH]. Moscow: Eko-Trendz. 150 p.
5. Bregni, S. 2002. *Synchronization of digital telecommunications networks*. John Wiley & Sons. 430 p.
6. ITU-T G.707. Network node interface for synchronous digital hierarchy (SDH).
7. Kuzmin, R. E. 2018. Fazovaya avtopodstroyka priemnykh kanalov sistem sputnikovoy svyazi [Phase locked loop of satellite communication systems receiving channels]. *Trudy MAI* [MAI Proceedings] 99:18. 17 p. EDN: UPSSKI.
8. Lokhmotko, V. V. 1998. Modeli i metody optimizatsii struktury telekommunikatsionnykh setey [Models and methods for optimizing the structure of telecommunication networks]. St. Petersburg: SPbGUT. D.Sc. Diss. 290 p. EDN: QCZSSZ.
9. Saitov, I. A. 2008. *Osnovy teorii postroeniya zashchishchennykh mul'tiprotokol'nykh opticheskikh transportnykh setey telekommunikatsionnykh sistem* [Fundamentals of the theory of constructing secure multiprotocol optical transport networks of telecommunication systems]. Orel: Academy of the Federal Security Service of Russia. 220 p. EDN: QMTNWR.
10. Davydov, S. G., K. R. Kazaryan, and M. V. Saykina. 2023. Internet v Rossii v 2022–2023 godakh. Sostoyanie, tendentsii i perspektivy razvitiya [The internet in Russia in 2022–2023. Status, trends, and development prospects]. Moscow: Mintsifry. 207 p. Available at: <https://digital.gov.ru/uploaded/files/internet-v-rossii-v-2022-2023-godah.pdf> (accessed May 13, 2026).
11. Ibragimov, I. 2020. Sinkhronizatsiya v bol'shikh i neodnorodnykh setyakh SyncE [Synchronization in large and heterogeneous networks SyncE]. *Elektronnye komponenty* [Electronic Components] 12:30–33. Available at: <https://elcomdesign.ru/wp-content/uploads/2021/01/30.pdf> (accessed May 13, 2026).
12. ITU-T G.709. Interfaces for optical transport network.
13. Balayev, R. I. 2021. Sovremennye trebovaniya k obespecheniyu setey svyazi novogo pokoleniya etalonnymi signalami vremeni i chastoty [Up-to-date requirements for providing new generation communication networks with reference signals of time and frequency]. *Al'manakh sovremennoy metrologii* [Al'manac of Modern Metrology] 4(28):109–114. EDN: WPUAKI.
14. Lakhovin, V. A., M. L. Schwartz, and A. V. Ryzhkov. 2024. Perspektivnye napravleniya razvitiya sistem svyazi i sinkhronizatsii slozhnykh infrastrukturykh ob"ektov [Development trends regarding communication and synchronization systems of complex infrastructure facilities]. *T-Comm: Telekommunikatsii i transport* [T-COMM] 18(11):30–37. doi: 10.36724/2072-8735-2024-18-11-30-37. EDN: UZQBNC.

15. OPNT technical report + test plan v1.6. Available at: https://joint-research-centre.ec.europa.eu/system/files/2023-03/AD_1_OPNT_v3.pdf (accessed May 13, 2026).
16. SpaceWERX AltPNT. Available at: <https://afwerxchallenge.com/spacewerx26/alt-pnt> (accessed May 13, 2026).
17. DARPA to launch programme for creating optical atomic clocks. 2022. Airforce Technology. Available at: <https://www.airforce-technology.com/news/darpa-optical-clocks> (accessed May 13, 2026).
18. RFC 5905. 2010. Network time protocol version 4: Protocol and algorithms specification. 110 p. doi: 10.17487/RFC5905. Available at: <https://www.rfc-editor.org/rfc/pdf/rfc/rfc5905.txt.pdf> (accessed May 13, 2026).
19. IEEE Std 1588-2019. 2020. IEEE standard for a precision clock synchronization protocol for networked measurements and control systems. doi: 10.1109/IEEESTD.2020.9120376.
20. Novozhylov, E. O. 2014. Metody povysheniya tochnosti sinkhronizatsii chastoty i vremeni v volokonno-opticheskikh sistemakh peredachi [Methods to improve the accuracy of frequency synchronization and time in fiber-optic transmission systems]. *T-Comm: Telekommunikatsii i transport* [T-Comm] 8(2):38–40. EDN: SARIAL.
21. Ryzhkov, A. V., M. L. Schwartz, V. M. Aladin, and A. V. Isupov. 2022. Opyt vnedreniya sistem chastotno-vremennogo obespecheniya setey svyazi [Experience of introducing time–frequency supply systems for communication networks]. *T-Comm: Telekommunikatsii i transport* [T-Comm] 16(7):21–28. doi: 10.36724/2072-8735-2022-16-7-21-28. EDN: NDBCDM.
22. GOST R 71150-2023. 2024. Metodika provedeniya audita sistem sinkhronizatsii setey svyazi: setey svyazi s kommutatsiey kanalov, setey svyazi s kommutatsiey paketov [Methodology for auditing synchronization systems of communication networks: Circuit-switched communication networks, packet-switched communication networks]. Moscow: Russian Standardization Institute. 40 p.
23. ITU-T O.172-2005. Jitter and wander measuring equipment for digital systems which are based on the synchronous digital hierarchy (SDH).
24. Tikhonov, V. N. 1982. *Statisticheskaya radiotekhnika* [Statistical radio engineering]. 2nd ed. Moscow: Radio i svyaz'. 624 p.
25. Shakhtarin, B. I. 2008. *Fil'try Vinera i Kalmana* [Wiener and Kalman filters]. Moscow: Gelios ARV. 408 p.
26. Sinitsyn, I. N., ed. 2011. *Akademik Pugachev Vladimir Semenovich: k stoletiyu so dnya rozhdeniya* [Academician Pugachev Vladimir Semenovich: To the centenary of his birth]. Moscow: TORUS PRESS. 376 p. EDN: OVYRLT.

Received February 5, 2026

Accepted April 15, 2026

Contributors

Saitov Igor A. (b. 1967) — Doctor of Science in technology, professor, MIREA — Russian Technological University, 78 Vernadskogo Ave., Moscow 119454, Russian Federation; saitov_i@mirea.ru

Fokin Nikolai I. (b. 1985) — Candidate of Science (PhD) in technology, Academy of Federal Guard Service of Russia, 35 Priborostroitelnaya Str., Orel 302015, Russian Federation; ni_fokin@mail.ru

Mironov Yuri B. (b. 1985) — Candidate of Science (PhD) in technology, leading engineer, National Research Center “Kurchatov Institute,” 1 Acad. Kurchatov Sq., Moscow 123182, Russian Federation; ymironov@jscc.ru

Shabanov Boris M. (b. 1954) — Doctor of Science in technology, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, deputy director, National Research Center “Kurchatov Institute,” 1 Acad. Kurchatov Sq., Moscow 123182, Russian Federation; jscc@jscc.ru

ОБ АВТОРАХ

Апполонов Георгий Сергеевич (р. 2002) — инженер 3-й категории Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Головин Александр Станиславович (р. 1982) — младший научный сотрудник лаборатории стохастического моделирования информационно-вычислительных и коммуникационных систем Института прикладных математических исследований — обособленного подразделения ФГБУН ФИЦ «Карельский научный центр Российской академии наук»; преподаватель кафедры ПМиК Петрозаводского государственного университета

Дьяченко Денис Юрьевич (р. 1987) — инженер-исследователь Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Дьяченко Юрий Георгиевич (р. 1958) — кандидат технических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Иванов Михаил Алоизович (р. 1998) — аспирант кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Конашенкова Татьяна Дмитриевна (р. 1964) — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Корепанов Эдуард Рудольфович (р. 1966) — кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Королев Виктор Юрьевич (р. 1954) — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова; ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Кривенко Михаил Петрович (р. 1946) — доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Миронов Юрий Борисович (р. 1985) — кандидат технических наук, ведущий инженер Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»

Морозов Евсей Викторович (р. 1947) — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории стохастического моделирования информационно-вычислительных и коммуникационных систем Института прикладных математических исследований — обособленного подразделения ФГБУН ФИЦ «Карельский научный центр Российской академии наук»; профессор кафедры ПМиК Петрозаводского государственного университета

Орлов Георгий Александрович (р. 1994) — научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Осипова Анастасия Андреевна (р. 1997) — младший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Реутов Илья Сергеевич (р. 1998) — старший преподаватель кафедры математики и информатики Череповецкого государственного университета

Румянцев Александр Сергеевич (р. 1986) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории стохастического моделирования информационно-вычислительных и коммуникационных систем Института прикладных математических исследований — обособленного подразделения ФГБУН ФИЦ «Карельский научный центр Российской академии наук»; профессор кафедры ПМиК Петрозаводского государственного университета

Сайтов Игорь Акрамович (р. 1967) — доктор технических наук, профессор, профессор МИРЭА — Российского технологического университета

Синицын Владимир Игоревич (р. 1968) — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Синицын Игорь Николаевич (р. 1940) — доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, главный научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Степченко Юрий Афанасьевич (р. 1951) — кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Фокин Николай Иванович (р. 1985) — кандидат технических наук, сотрудник Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации

Хилько Дмитрий Владимирович (р. 1987) — кандидат технических наук, старший научный сотрудник Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук

Шабанов Борис Михайлович (р. 1954) — доктор технических наук, член-корреспондент РАН, заместитель директора Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»

Правила подготовки рукописей статей для публикации в журнале «Системы и средства информатики»

Журнал «Системы и средства информатики» публикует теоретические, обзорные и дискуссионные статьи, посвященные научным исследованиям и разработкам в области информационных технологий.

Журнал издается на русском языке. По специальному решению редколлегии отдельные статьи могут печататься на английском языке.

Тематика журнала охватывает следующие направления:

- информационно-телекоммуникационные системы и средства их построения;
- архитектура и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и сетей;
- методы и средства защиты информации.

1. В журнале печатаются статьи, содержащие результаты, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях.

Публикация предоставленной автором(ами) рукописи не должна нарушать положений глав 69, 70 раздела VII части IV Гражданского кодекса, которые определяют права на результаты интеллектуальной деятельности и средства индивидуализации, в том числе авторские права, в РФ.

Ответственность за нарушение авторских прав, в случае предъявления претензий к редакции журнала, несут авторы статей.

Направляя рукопись в редакцию, авторы сохраняют свои права на данную рукопись и при этом передают учредителям и редколлегии журнала неисключительные права на издание статьи на русском языке (или на языке статьи, если он отличен от русского) и на перевод ее на английский язык, а также на ее распространение в России и за рубежом. Каждый автор должен представить в редакцию подписанный с его стороны «Лицензионный договор о передаче неисключительных прав на использование произведения», текст которого размещен по адресу <http://www.ipiran.ru/publications/licence.doc>. Этот договор может быть представлен в бумажном (в 2-х экз.) или в электронном виде (отсканированная копия заполненного и подписанного документа).

Если при подготовке статьи авторы использовали инструменты на основе интеллектуального интеллекта, они обязаны включить эту информацию в текст статьи.

Редколлегия вправе запросить у авторов экспертное заключение о возможности публикации представленной статьи в открытой печати.

2. К статье прилагаются данные автора (авторов) (см. п. 8). При наличии нескольких авторов указывается фамилия автора, ответственного за переписку с редакцией.
3. Редакция журнала осуществляет экспертизу присланных статей в соответствии с принятой в журнале процедурой рецензирования.

Возвращение рукописи на доработку не означает ее принятия к печати.

Доработанный вариант с ответом на замечания рецензента необходимо прислать в редакцию.

4. Решение редколлегии о публикации статьи или ее отклонении сообщается авторам. Редколлегия может также направить авторам текст рецензии на их статью. Дискуссия по поводу отклоненных статей не ведется.

5. Редактура статей высылается авторам для просмотра. Замечания к редакции должны быть присланы авторами в кратчайшие сроки.
6. Рукопись предоставляется в электронном виде в форматах MS WORD (.doc или .docx) или ЛАТЭХ (.tex), дополнительно — в формате .pdf, на дискете, лазерном диске или электронной почтой. Предоставление бумажной рукописи необязательно.
7. При подготовке рукописи в MS Word рекомендуется использовать следующие настройки.

Параметры страницы: формат — А4; ориентация — книжная; поля (см): внутри — 2,5, снаружи — 1,5, сверху и снизу — 2, от края до нижнего колонтитула — 1,3.

Основной текст: стиль — «Обычный», шрифт — Times New Roman, размер — 14 пунктов, абзацный отступ — 0,5 см, 1,5 интервала, выравнивание — по ширине.

Рекомендуемый объем рукописи — не свыше 10 страниц указанного формата. При превышении указанного объема редколлегия вправе потребовать от автора сокращения объема рукописи.

Сокращения слов, помимо стандартных, не допускаются. Допускается минимальное количество аббревиатур.

Все страницы рукописи нумеруются.

Шаблоны оформления представлены в интернете:

http://www.ipiran.ru/journal/template_iiep_ssi_2024.zip

8. Статья должна содержать следующую информацию на **русском и английском языках**:

- название статьи;
- Ф.И.О. авторов, на английском можно только имя и фамилию;
- место работы, с указанием города и страны и электронного адреса каждого автора;
- сведения об авторах, в соответствии с форматом, образцы которого представлены на страницах:
http://www.ipiran.ru/journal/collected/2019_29_03_rus/authors.asp и
http://www.ipiran.ru/journal/collected/2019_29_03_eng/authors.asp;
- аннотация (не менее 100 слов на каждом из языков). Аннотация — это краткое резюме работы, которое может публиковаться отдельно. Она является основным источником информации в информационных системах и базах данных. Английская аннотация должна быть оригинальной, может не быть дословным переводом русского текста и должна быть написана хорошим английским языком. В аннотации не должно быть ссылок на литературу и, по возможности, формул;
- ключевые слова — желательно из принятых в мировой научно-технической литературе тематических тезаурусов. Предложения не могут быть ключевыми словами.
- источники финансирования работы (ссылка на гранты, проекты, поддерживающие организации и т. п.

9. Требования к спискам литературы.

Ссылки на литературу в тексте статьи нумеруются (в квадратных скобках) и располагаются в каждом из списков литературы в порядке первых упоминаний.

Списки литературы представляются в двух вариантах:

- (1) **Список литературы к русскоязычной части.** Русские и английские работы — на языке и в алфавите оригинала.
- (2) **References.** Русские работы и работы на других языках — в латинской транслитерации с переводом на английский язык; английские работы и работы на других языках — на языке оригинала.

Необходимо для составления списка “References” пользоваться размещенной на сайте <http://www.translit.net/ru/bgn/> бесплатной программой транслитерации русского текста в латиницу.

Список литературы “References” приводится полностью отдельным блоком, повторяя все позиции из списка литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке литературы к русскоязычной части есть ссылки на иностранные публикации, набранные латиницей, они полностью повторяются в списке “References”.

Примеры ссылок на различные виды публикаций в списке “References”:

Описание статьи из журнала:

Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.

Описание статьи из электронного журнала:

Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B. P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).

Описание материалов конференций:

Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma “Novye resursosbergayushchie tekhnologii nedropol’zovaniya i povyseniya neftegazootdachi”* [6th Symposium (International) “New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact” Proceedings]. Moscow. 267–272.

Описание книги (монографии, сборники):

Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogeneratorov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publs. 352 p.

Описание переводной книги (в списке литературы к русскоязычной части необходимо указать: / Пер. с англ. — после названия книги, а в конце ссылки указать оригинал книги в круглых скобках):

1. В русскоязычной части:

Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1985. 472 с. (Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver W. Vibration problems in engineering. — 4th ed. — New York, NY, USA: Wiley, 1974. 521 p.)

2. В англоязычной части:

Timoshenko, S. P., D. H. Young, and W. Weaver. 1974. *Vibration problems in engineering*. 4th ed. New York, NY: Wiley. 521 p.

Описание неопубликованного документа:

Latypov, A. R., M. M. Khasanov, and V. A. Baikov. 2004. Geology and production (NGT GiD). Certificate on official registration of the computer program No. 2004611198. (In Russian, unpubl.)

Описание интернет-ресурса:

Pravila tsitirovaniya istochnikov [Rules for the citing of sources]. Available at: <http://www.scribd.com/doc/1034528/> (accessed February 7, 2011).

Описание диссертации или автореферата диссертации:

Semenov, V. I. 2003. Matematicheskoe modelirovanie plazmy v sisteme kompaktnyy tor [Mathematical modeling of the plasma in the compact torus]. Moscow. D.Sc. Diss. 272 p.

Kozhunova, O. S. 2009. Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovary informatzionnogo monitoringa [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. PhD Thesis. Moscow: IPI RAN. 23 p.

Описание ГОСТа:

GOST 8.586.5-2005. 2007. Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichstva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. Moscow: Standardinform Publ. 10 p.

Описание патента:

Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.

10. Присланные в редакцию материалы авторам не возвращаются.
11. При отправке файлов по электронной почте просим придерживаться следующих правил:
 - указывать в поле subject (тема) название журнала и фамилию автора;
 - указывать в тексте письма название статьи, авторов и журнал, в который направляется статья;
 - использовать attach (присоединение);
 - в состав электронной версии статьи должны входить: файл, содержащий текст статьи, и файл(ы), содержащий(е) иллюстрации.
12. Журнал «Системы и средства информатики» является некоммерческим изданием. Плата за публикацию не взимается, гонорар авторам не выплачивается.

Адрес редакции журнала «Системы и средства информатики»:

Москва 119333, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН

Тел.: +7 (499) 135-86-92 Факс: +7 (495) 930-45-05

e-mail: ssi@frccsc.ru (Стригина Светлана Николаевна)

<http://www.ipiran.ru/journal/collected>

Requirements for manuscripts submitted to Journal “Systems and Means of Informatics”

Journal “Systems and Means of Informatics” publishes theoretical, review, and discussion articles on the research and development in the field of information technology.

The journal is published in Russian. By a special decision of the editorial board, some articles can be published in English.

Topics covered include the following areas:

- information and communication systems and tools of their design;
- architecture and software of computational complexes and networks; and
- methods and tools of information protection.

1. The Journal publishes original articles which have not been published before and are not intended for simultaneous publication in other editions. An article submitted to the Journal must not violate the Copyright law. Sending the manuscript to the Editorial Board, the authors retain all rights of the owners of the manuscript and transfer the nonexclusive rights to publish the article in Russian (or the language of the article, if not Russian) and its distribution in Russia and abroad to the Founders and the Editorial Board. Authors should submit a letter to the Editorial Board in the following form:

Agreement on the transfer of rights to publish:

“We, the undersigned authors of the manuscript “. . . ,” pass to the Founder and the Editorial Board of the Journal “Systems and Means of Informatics” the nonexclusive right to publish the manuscript of the article in Russian (or in English) in both print and electronic versions of the Journal. We affirm that this publication does not violate the Copyright of other persons or organizations.

Author(s) signature(s): (name(s), address(es), date).”

This agreement should be submitted in paper form or in the form of a scanned copy (signed by the authors).

The Editorial Board has the right to request from the authors an official expert conclusion that the submitted article has no classified data prohibited for publication.

If authors used artificial intelligence (AI)-based tools in preparing their manuscript, they must include this information in the text of the article.

2. A submitted article should be attached with **the data on the author(s)** (see item 8). If there are several authors, the contact person should be indicated who is responsible for correspondence with the Editorial Board and other authors about revisions and final approval of the proofs.
3. The Editorial Board of the Journal examines the article according to the established reviewing procedure. If authors receive their article for correction after reviewing, it does not mean that the article is approved to be published. The corrected article should be sent to the Editorial Board for the subsequent review and approval.
4. The decision on the article publication or its rejection is communicated to the authors. The Editorial Board may also send the reviews on the submitted articles to the authors. Any discussion upon the rejected articles is not possible.
5. The edited articles will be sent to the authors for proofread. The comments of the authors to the edited text of the article should be sent to the Editorial Board as soon as possible.
6. The manuscript of the article should be presented electronically in the MS WORD (.doc or .docx) or L^AT_EX (.tex) formats, and additionally in the .pdf format. All documents may be sent by e-mail or provided on a CD or diskette. A hard copy submission is not necessary.

7. The recommended typesetting instructions for manuscript.

Pages parameters: format A4, portrait orientation, document margins (cm): left — 2.5, right — 1.5, above — 2.0, below — 2.0, footer 1.3.

Text: font — Times New Roman, font size — 14, paragraph indent — 0.5, line spacing — 1.5, justified alignment.

The recommended manuscript size: not more than 10 pages of the specified format. If the specified size exceeded, the editorial board is entitled to require the author to reduce the manuscript.

Use only standard abbreviations. Avoid abbreviations in the title and abstract. The full term for which an abbreviation stands should precede its first use in the text unless it is a standard unit of measurement.

All pages of the manuscript should be numbered.

The templates for the manuscript typesetting are presented on site:

http://www.ipiran.ru/journal/template_jiep_ssi_2024.zip

8. Articles should enclose data both in **Russian and English**:

- title;
- author's name and surname;
- affiliation — organization, its address with ZIP code, city, country, and official e-mail address;
- data on authors according to the format (see site):
http://www.ipiran.ru/journal/collected/2019_29_03_rus/authors.asp and
http://www.ipiran.ru/journal/collected/2019_29_03_eng/authors.asp;
- abstract (not less than 100 words) both in Russian and in English. Abstract is a short summary of the article that can be published separately. The abstract is the main source of information on the article and it could be included in leading information systems and data bases. The abstract in English has to be an original text and should not be an exact translation of the Russian one. Good English is required. In abstracts, avoid references and formulae.
- Indexing is performed on the basis of keywords. The use of keywords from the internationally accepted thematic Thesauri is recommended.
Important! Keywords must not be sentences.
- Acknowledgments.

9. References. Russian references have to be presented both in English translation and in Latin transliteration (refer <http://www.translit.net/ru/bgn/>).

Please take into account the following examples of Russian references appearance:

Article in journal:

Zhang, Z., and D. Zhu. 2008. Experimental research on the localized electrochemical micromachining. *Russ. J. Electrochem.* 44(8):926–930. doi:10.1134/S1023193508080077.

Journal article in electronic format:

Swaminathan, V., E. Lepkoswka-White, and B.P. Rao. 1999. Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange. *JCMC* 5(2). Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (accessed April 28, 2011).

Conference proceedings:

Usmanov, T. S., A. A. Gusmanov, I. Z. Mullagalin, R. Ju. Muhametshina, A. N. Chervyakova, and A. V. Sveshnikov. 2007. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing]. *Trudy 6-go Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povyshe-niya neftegazootdachi"* [6th Symposium (International) "New Energy Saving Subsoil Technologies and the Increasing of the Oil and Gas Impact" Proceedings]. Moscow. 267–272.

Books and other monographs:

Lindorf, L. S., and L. G. Mamikonians, eds. 1972. *Ekspluatatsiya turbogenera-torov s neposredstvennym okhlazhdeniem* [Operation of turbine generators with direct cooling]. Moscow: Energy Publ. 352 p.

Dissertation and Thesis:

Kozhunova, O. S. 2009. Tekhnologiya razrabotki semanticheskogo slovaryia informat-sionnogo monitoringa [Technology of development of semantic dictionary of information monitoring system]. Moscow: IPI RAN. PhD Thesis. 23 p.

State standards and patents:

GOST 8.586.5-2005. 2007. Metodika vypolneniya izmereniy. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkostey i gazov s pomoshch'yu standartnykh suzhayushchikh ustroystv [Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices]. M.: Standardinform Publ. 10 p.

Bolshakov, M. V., A. V. Kulakov, A. N. Lavrenov, and M. V. Palkin. 2006. Sposob orientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoy golovkoy samonavedeniya [The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head]. Patent RF No. 2280590.

References in Latin transcription are presented in the original language.

References in the text are numbered according to the order of their first appearance; the number is placed in square brackets. All items from the reference list should be cited.

10. Manuscripts and additional materials are not returned to Authors by the Editorial Board.
11. Submissions of files by e-mail must include:
 - the journal title and author's name in the "Subject" field;
 - the article title, authors' names, and the journal title, whereto the paper is being submitted, in the text of the e-mail;
 - an article and additional materials have to be attached using the "attach" function;
 - an electronic version of the article should contain the file with the text and a separate file with figures.
12. "System and Means of Informatics" journal is not a profit publication. There are no charges for the authors as well as there are no royalties.

Editorial Board address:

FRC CSC RAS, 44, block 2, Vavilov Str., Moscow 119333, Russia

Ph.: +7 (499) 135 86 92, Fax: +7 (495) 930 45 05

e-mail: ssi@frccsc.ru (to Svetlana Strigina)

http://www.ipiran.ru/english/journal_systems.asp